恒谦教育
www.hengqian.com

北京教育出版社恒谦教育研究院研究成果

超级备考

高考系统复习

（学生用书）

全国名牌重点中学特高级教师编写
本册主编　曹子清

特别说明
每购100册学生用书，赠送教师用书和备考光盘一套

数学（理科）

北京出版社出版集团
北京教育出版社

恒谦教育
www.hengqian.com

北京教育出版社恒谦教育研究院研究成果

超级备考

高考系统复习

名师精心设计 / 科学系统复习 / 把握高考脉搏 / 金榜题名在即

（学生用书）

本册主编　曹子清

撰 稿 人　曹子清　徐明满
陈劲松　刘　佐
黄爱华　曹治中

数学（理科）

北京出版社出版集团
北京教育出版社

恒谦教育
www.hengqian.com

北京教育出版社恒谦教育研究院研究成果

超级备考

高考系统复习

超级备考 高考系统复习
数学(理科)
(学生用书)
本册主编　曹子清
*
北京出版社出版集团
北京教育出版社　出版
(北京北三环中路6号)
邮政编码：100011
网　址：www.bph.com.cn
北京出版社出版集团总发行
新华书店经销
陕西宏业印务有限公司印刷
*
880×1230 16开本 24.25印张 811 000字
2006年4月第1版　2006年4月第1次印刷
印数：1－20 000
ISBN 7-5303-5014-5
G·4930 定价：39.80元

前言

会当凌绝顶　一览众山小

登山的动力，来源于对自然风光的憧憬，目标直指山巅！

登山的魅力，是临风而立，将山踩在自己的脚下！于是便有了孔子登东山而小齐鲁，登泰山而小天下之感慨。

恒谦人就是登山者。八年的积淀，八年的追求，八年的攀登，最终获得了“恒谦教育”备考用书编写的全面成功！正是基于在高考备考复习方面的成功经验，并依托北京教育出版社恒谦教育研究院的强大教育资源，我们组织了全国数十所名校的百位名师编写了《超级备考高考系统复习》丛书。

《超级备考高考系统复习》作为高三师生的系统复习用书，与其他此类教辅在选题立意上有根本的区别：第一，编写理念创新。我们在认真研究目前高三师生复习现状和分析市场备考类用书优劣的基础上,理清了备考类用书的一种全新编写理念：系统复习+系统训练+信息追补，即《考试大纲》出台前侧重对教材知识的系统梳理和解题能力的综合训练，解决历年考纲中不变的考试内容；《考试大纲》出台后，侧重对高考信息的追补和考题预测，全真模拟最新款式要求的高考试卷，让考生零距离触摸高考考场。第二，备考思路转变。针对2007年高考的命题趋势，本丛书完全从师生备考的实际需要出发，依据教材或知识系统的先后顺序划分章节，纵向对教材进行复习，注重学科内综合的提炼与复习引导，突出对学科知识延展性和联系性的探究，体现了由“深挖洞”向“广积粮”备考思路的转变。第三，理清两大关系。本丛书严格依据《考试大纲》的最新精神和“新课标”的意图，结合地方自主命题的发展趋势，充分体现中央《考试大纲》对全国高考的统一要求和自主命题省区《考试说明》的地方特色（差异性）。

因为具有差异性，所以才具备存在性。《超级备考高考系统复习》特为备战2007年高考系统复习设计，专供高三师生系统复习时课堂同步使用（也可作为高三学生系统复习的自读类教辅）。丛书在编写上凸现了五大特点：

一、版本完整，备考无忧。考虑到2007年广东、山东、宁夏和海南将迎来新课标的首次高考，我们专门为它们编写了《超级备考高考系统复习》的新课标版；为使丛书能更好地指导自主命题省区2007年高考的备考复习，我们还特地编写了各省区专用版，书稿由自主命题省区的备考名师主笔撰写或审定，以确保内容与各省区高考自主命题的地方特色完全匹配。

二、模式创新，功能齐备。从书采用教师用书+学生用书的“1+1”模式编写，体现了人性化设计的理念；并且“教师用书”配有备考光盘，容量大、信息全，为教师提供了信息资料查询和教学资源共享的平台。

三、关注教改，选题权威。集百位全国名师的智慧和心血打造的这套精品教辅，紧追高考走向，全方位锁定所有考点，从最新考题、模拟题和名师预测题中精选题目，讲解、例释、练测三位一体，具备很高的权威性。

四、细梳知识，整合拔高。本丛书以教材为蓝本，对显性的基本知识及隐性的教材延伸知识进行多角度、深层次的归纳、整合，再辅之以例举、练习，使考生能整体把握知识，灵活地迁移、转化、运用，最终找出提高分数的最佳方法，在现有基础之上把成绩拔高一个档次。

五、注重普遍，兼顾特殊。2006年教育部又核准了四川和陕西两省高考自主命题，自主命题的省区已达16个。自主命题试卷在题型、题量、赋分上会有一定的差别，但不会有根本的区别，无论是全国的统一试卷，还是有关省市的自主试卷，都必须根据全国统一的《考试大纲》的要求来命题，即万变不离其宗。《超级备考高考系统复习》一方面根据考纲来编写， 注重选题的普遍性；另一方面本丛书的编者还潜心研究了近年的统考卷、有关省市自主卷，对这些试卷的"个性"（即特殊性）有了较好的把握，并把对这些"个性"比较研究的成果都体现在了书中。

会当凌绝顶，一览众山小。恒谦人历时数载，全程跟踪高考自主命题的深化改革，充分关注高中新课标的推广进程，启用百位名师合力打造的力作已经新鲜出炉，她将给支持她的广大读者带来最大的使用价值和预期效果，我们有理由相信如此大手笔的备考用书势必会点亮2006年的教辅市场！

最后建议读者在使用本丛书时注意：合理、科学地安排复习进度，区别对待重点内容与一般内容；加强复习的针对性，就自身的薄弱环节进行查漏补缺；认真研读"学法点窍"、"解题指导"以及例题或考题后的"点评"、"说明"、"思考"，吸纳名师多年的高考辅导经验与解题智慧。

鉴于本丛书立意新颖、编写难度较大，书中难免存有纰漏，敬请不吝指正。

北京教育出版社恒谦教育研究院

《超级备考高考系统复习》丛书编委会

目录

第1章 集合与简易逻辑

第2章 函 数

第3章 数 列

第4章 三角函数

第5章 平面向量

第6章 不等式

Contents

第7章 直线和圆的方程

第8章 圆锥曲线

第9章 直线 平面 简单几何体

第10章 排列 组合 概率与统计

第11章 极限与导数

第12章 复 数

（参考答案活页装订，随书赠送）

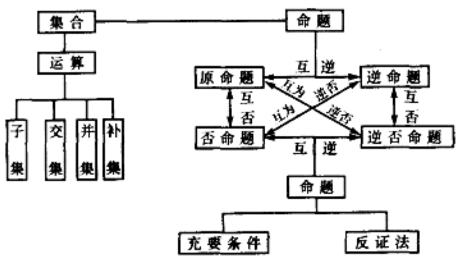
第1章 集合与简易逻辑

内容概要

本章主要内容包括两大类:一是集合的有关概念和运算;二是简易逻辑知识.涉及到的知识点有:集合的基本概念、集合与集合的关系、含有绝对值不等式及一元二次不等式的解法、逻辑联结词、四种命题、充要条件.

集合的初步知识与简易逻辑知识,是掌握和使用数学语言的基础,在学习函数及其他后续内容时,将得到充分的运用.

结构框图



1.1 集合及其运算

难点聚焦

复习难点 对集合三大性质的理解和灵活运用,集合语言和集合思想的准确灵活运用.

运用集合的概念及其运算进行解题时,要注意"或"、"且"的区别.真正理解交集、并集的意义,以能准确地进行集合语言与其文字数学语言的转换.

学法指津

1.关于集合概念应从如下三方面理解:

(1)它的实际意义是什么?

(2)怎样借助图形来表示?

(3)如何用数学方式来表达?

2.与集合有关的问题主要有:

(1)如何用集合来表示我们所要研究的问题?

(2)如何判断一个对象属于我们所讨论的集合?

(3)如何判断两个集合间的包含和相等关系?

(4)如何求集合的交、并、补,它们的实际意义何在?

总之,解答集合问题,首先要正确理解集合的有关概念,特别是集合中元素的三要素;对于用描述法给出的集合$\{x|x\in P\}$,要紧紧抓住竖线前面的代表元素x以及它所具有的性质P;要重视并发挥图示法的作用,通过数形结合直观地解决问题.

典例剖析

例1 已知:集合$A=\{2,4,a^3-2a^2-a+7\}$,$B=\{-4,a+3,a^2-2a+2,a^3+a^2+3a+7\}$,若$A\cap B=\{2,5\}$,求实数$a$的值,并求$A\cup B$.

分析 A中元素只能是a^3-2a^2-a+7为5,从而求出$A\cup B$.

解 $\because A\cap B=\{2,5\}$,$\therefore 5\in A$,$A=\{2,4,5\}$,

由已知可得$a^3-2a^2-a+7=5$.$\therefore a^3-2a^2-a+2=0$,

$\therefore (a^2-1)(a-2)=0$,$\therefore a=2$或$a=\pm1$.

(1)当$a=2$时,$B=\{-4,5,2,25\}$,$A\cap B=\{2,5\}$与题设相符;

(2)当$a=1$时,$B=\{-4,4,1,12\}$,$A\cap B=\{4\}$与题设矛盾;

(3)当$a=-1$时,$B=\{-4,2,5,4\}$,$A\cap B=\{2,4,5\}$与题设矛盾.

综上(1)、(2)、(3)知:$a=2$,且$A\cup B=\{2,4,5\}\cup\{-4,5,2,25\}=\{-4,2,4,5,25\}$.

评注 在例1的解题过程中,由题设条件得到a的方程并求出a为2或±1后,问题是否就解决了呢?$5\in A$仅是$A\cap B=\{2,5\}$的一个必要条件,因此有可能产生增根,同样需要将求得a的值代入题设条件中检验,看它是否与条件相符合.

例2 已知集合$A=\{x|x^2+x-2\leqslant0\}$,$B=\{x|2<x+1\leqslant4\}$,$C=\{x|x^2+bx+c>0\}$,如果集合$A$,$B$,$C$满足$(A\cup B)\cap C=\varnothing$,$(A\cup B)\cup C=\mathbf{R}$,求$b$及$c$的值.

解 由题意,$A=\{x|-2\leqslant x\leqslant1\}$,$B=\{x|1<x\leqslant3\}$,

$A\cup B=\{x|-2\leqslant x\leqslant3\}$,由$(A\cup B)\cap C=\varnothing$,$(A\cup B)\cup C=\mathbf{R}$

得 $C=\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=\{x|x<-2$或$x>3\}$,

又$C=\{x|x^2+bx+c>0\}$,故-2,3是方程$x^2+bx+c=0$的两根,

由韦达定理可得,$b=-1$,$c=-6$

评注 本题涉及集合交、并、补的简单运算及性质,二次方程与二次不等式的联系,本题的解题关键是把$A\cup B$看作一个整体,该集合与C的交集为空集,并集为全集,因此该集合为C的补集,从而求得集合C.

例3 设已知集合$A=\{x|10+3x-x^2\geqslant0\}$,$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant2m-1\}$,如果$A\cap B=\varnothing$,求$m$的取值范围.

分析 先化简集合A,再由$A\cap B=\varnothing$建立不等式组求m的范围.这里应特别注意"$A\cap B=\varnothing$"的意思是:一方面A与B中的不等式无公共解,另一方面B集合可以为空集.

解 解不等式$10+3x-x^2\geqslant0$,得

$A=\{x|-2\leqslant x\leqslant5\}$.

由 $A\cap B=\varnothing$，有

(1) $B=\varnothing$，即 $2m-1<m+1$，解得 $m<2$；

(2) $\begin{cases} m+1\leqslant 2m-1, \\ 2m-1<-2, \end{cases}$ 此时无解；

(3) $\begin{cases} m+1\leqslant 2m-1, \\ m+1>5, \end{cases}$ 解得 $m>4$.

综上可知，$m>4$，或 $m<2$.

评注 空集是一个特殊的集合.当题中隐含着空集参与集合关系及运算时，我们应像重视数"0"在解题中的作用那样，重视空集在解集合问题中的作用.本题若忽视 $B=\varnothing$，就会漏掉 $m<2$ 的情况.

A组 基础题

选择题

1. 设 P,Q 为两个非空实数集合，定义集合 $P+Q=\{a+b\mid a\in P,b\in Q\}$.若 $P=\{0,2,5\}$，$Q=\{1,2,6\}$，则 $P+Q$ 中元素的个数为(　　).

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

2. 如图 1-1-1 所示，I 为全集，M、N、S 是 I 的子集，则图中阴影部分所示的集合是(　　).

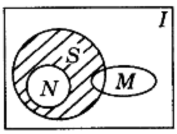


图 1-1-1

A. $(\complement_I M\cap \complement_I N)\cap S$　　B. $\complement_I(M\cap N)\cap S$

C. $(\complement_I N\cap S)\cup M$　　D. $(\complement_I M\cap S)\cup N$

3. 已知集合 $M=\{0,1,2,3,4\}$，$N=\{0,2,4,8\}$，集合 $A\subseteq M$ 且 $A\subseteq N$，则 A 的个数是(　　).

A. 4 个　　B. 6 个

C. 8 个　　D. 10 个

4. 已知集合 $A=\{x\mid \frac{1}{x}\leqslant 1\}$，集合 $B=\{x\mid \sqrt{x-1}\leqslant 1\}$，则(　　).

A. $A\cup B=\mathbf{R}$　　B. $A=B$

C. $B\subsetneqq A$　　D. $A\subsetneqq B$

5. 已知集合 $M=\{x\mid 2x+1\geqslant 0\}$，集合 $N=\{x\mid x^2-(a+1)x+a<0\}$，若 $N\subseteq M$，则 a 的取值范围是(　　).

A. $a\geqslant -\frac{1}{2}$　　B. $a\leqslant -\frac{1}{2}$

C. $a\geqslant 1$　　D. $a\leqslant 1$

6. 如果集合 $P=\{y\mid y=x^2,x\in \mathbf{N}^*\}$，$Q=\{y\mid y=2^x,x\in \mathbf{N}^*\}$，则(　　).

A. $P\cap Q=\{2,4\}$　　B. $P\cap Q=\{4,16\}$

C. $P=Q$　　D. 以上均错

B组 提高题

填空题

1. 若集合 $\{(x,y)\mid x+y-2=0$ 且 $x-2y+4=0\}\subsetneqq\{(x,y)\mid y=3x+b\}$，则 $b=$______.

2. 设全集 $I=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{2,|a+1|\}$，$\complement_I A=\{5\}$，$M=\{x\mid x=\log_2|a|\}$，则集合 M 的所有子集是______.

3. 已知 $a\in\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x^2=1\}$，集合 $B=\{x\mid ax=1\}$.若 $A\cup B=A$，则实数 a 的所有可能值构成的集合为______.

4. 设① $A\subseteq\{1,2,3,4,5,6,7\}$；② 当 $a\in A$ 时，必有 $(8-a)\in A$，则同时满足条件①，②的非空集合 A 的个数为______.

5. 若全集 $I=\mathbf{R}$，$f(x)$、$g(x)$ 均为 x 的二次函数，$P=\{x\mid f(x)<0\}$，$Q=\{x\mid g(x)\geqslant 0\}$，则不等式组 $\begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)<0 \end{cases}$ 的解集可用 P、Q 表示为______.

C组 高考预测题

1. 某旅行社有 32 名翻译，其中 10 人会日语，6 人会俄语，24 人会英语，2 人会日语和俄语，3 人会俄语和英语，4 人会日语和英语，问共有几人会日、俄、英三国语言？

2. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-4mx+2m+6=0,x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap\mathbf{R}^-\neq\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

3. 若集合 $A=\{x\mid x^2+ax+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，集合 $B=\{1,2\}$，且 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

1.2 含绝对值的不等式与一元二次不等式的解法

难点聚焦

复习难点 含有多个绝对值符号的不等式的求解，以及带参数的一元二次不等式的求解.

设法去掉绝对值不等式的绝对值符号(零点分段法、平方法、数形结合、利用绝对值的性质)来求解是常规思路，含参数的一元二次不等式求解注意分类讨论，应充分利用二次函数的图象，及不等式解集端点与二次方程根的关系.

学法指津

1. 含有多个绝对值的不等式，一般可用零点分段法求解，对于形如 $|x-a|+|x-b|>m$ 或 $|x-a|+|x-b|<m$(m 是正常数)，利用实数绝对值的几何意义求解较简便. 要特别重视下列三类绝对值不等式的解法：

(1) $|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$；

(2) $|f(x)|>|g(x)|\Leftrightarrow f^2(x)>g^2(x)$；

(3) $|f(x)|<|g(x)|\Leftrightarrow f^2(x)<g^2(x)$.

2. 解带参数的不等式 $(x-a)(x-b)>0$ 应讨论 a 与 b 的大小. 解一元二次不等式的一般过程是：一看(看二次项系数的符号)，二算(计算判别式，判断相应方程根的情况或求根)，三写(写出不等式解集).

3. 解分式不等式时不宜去分母，应把分式 $\frac{ax+b}{cx+d}\geqslant 0$ 转化成和它等价的 $\begin{cases}(ax+b)(cx+d)\geqslant 0,\\ cx+d\neq 0\end{cases}$ 不等式组来解.

典例剖析

例1 解不等式：$\left|\frac{3x}{x^2-4}\right|\leqslant 1$.

分析 可按学法指津中的第(1)类绝对值不等式求解，也可以按第(3)类绝对值不等式求解.

解 **方法1** $\left|\frac{3x}{x^2-4}\right|\leqslant 1\Leftrightarrow -1\leqslant\frac{3x}{x^2-4}\leqslant 1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{3x}{x^2-4}\geqslant -1,\\ \frac{3x}{x^2-4}\leqslant 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x^2+3x-4}{x^2-4}\geqslant 0,\\ \frac{x^2-3x-4}{x^2-4}\geqslant 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+4)(x+2)(x-1)(x-2)\geqslant 0(x\neq\pm 2),\\ (x+2)(x+1)(x-2)(x-4)\geqslant 0(x\neq\pm 2)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant -4,\text{或}-2<x\leqslant 1,\text{或}\ x>2,\\ x<-2,\text{或}-1\leqslant x<2,\text{或}\ x\geqslant 4.\end{cases}$$

故原不等式的解集为 $(-\infty,-4]\cup[-1,1]\cup[4,+\infty)$.

方法2 $\left|\frac{3x}{x^2-4}\right|\leqslant 1\Leftrightarrow\left(\frac{3x}{x^2-4}\right)^2\leqslant 1$

$\Leftrightarrow 9x^2\leqslant(x^2-4)^2\quad(x\neq\pm 2)$

$\Leftrightarrow x^4-17x^2+16\geqslant 0$

$\Leftrightarrow x^2\leqslant 1$，或 $x^2\geqslant 16$

$\Leftrightarrow -1\leqslant x\leqslant 1$，或 $x\leqslant -4$，或 $x\geqslant 4$.

评注 显然第2种解法较简单. 如果从函数的观点看，$f(x)=\left|\frac{3x}{x^2-4}\right|-1$ 为偶函数，所以可先在区间 $[0,+\infty)$ 上解不等式，再利用对称性确定不等式在 $(-\infty,0]$ 上的解.

例2 解不等式 $|x-1|+|2-x|>3+x$.

分析 不等式左边含有两个绝对值符号，从而考虑采用"零点分段".

解 分类求解如下：由于实数1，2把数轴分成 $(-\infty,1]$、$(1,2]$、$(2,+\infty)$ 三部分，所以

(1)当 $x\leqslant 1$ 时，原不等式等价于

$$\begin{cases}-(x-1)-(x-2)>x+3,\\ x\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<0,\\ x\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow x<0;$$

(2)当 $1<x\leqslant 2$ 时，原不等式等价于

$$\begin{cases}x-1-(x-2)>x+3,\\ 1<x\leqslant 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<-2,\\ 1<x\leqslant 2\end{cases}\Rightarrow\text{无解};$$

(3)当 $x>2$ 时，原不等式等价于

$$\begin{cases}x-1+x-2>x+3,\\ x>2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>6,\\ x>2\end{cases}\Rightarrow x>6.$$

综合(1)、(2)、(3)，得原不等式的解集为

$\{x|x<0,\text{或}\ x>6\}$.

评注 "零点分段"是解含有多个绝对值符号不等式的常用方法. 请读者根据绝对值的几何意义思考如下更一般的情形：

"对任意实数 x，若不等式 $|x+1|-|x-2|>k$ 恒成立，求 k 的取值范围".

例3 解不等式 $|ax+3|<2$，$a\neq 0$.

分析 本题属 $|ax+b|<c(c>0)$ 型不等式，可按解此类不等式常规方法来解，去掉绝对值后还要注意 x 的系数是参数 a，须对 a 进行分类讨论.

解 原不等式可化为 $-2<ax+3<2$，

即 $-5<ax<-1$.

当 $a>0$ 时，解集为 $\left\{x\middle|-\frac{5}{a}<x<-\frac{1}{a}\right\}$；

当 $a<0$ 时，解集为 $\left\{x\middle|-\frac{5}{a}>x>-\frac{1}{a}\right\}$.

评注 设法去掉绝对值符号来求解属常规思路，若能化为 $|ax+b|<c$，或 $|ax+b|>c$ 的基本类型，直接利用解集公式，则更加简便.

例4 (1)若 $1<x\leqslant 2$，不等式 $ax^2-2ax-1<0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

解 **分析1** 从函数图象与不等式解集入手. 不等式在 $(1,2]$ 上恒成立，即 $f(x)=ax^2-2ax-1$ 的图象在 $x\in(1,2]$ 恒在 x 轴下方.

方法1 当 $a=0$ 时，不等式变为 $-1<0$ 恒成立.

当 $a\neq 0$ 时，设 $f(x)=ax^2-2ax-1$，则对称轴为 $x=1$，结合二次函数图象当 $a>0$ 时，只需 $\begin{cases}f(1)<0\\ f(2)<0\end{cases}$ 可得 $a>0$

当 $a<0$ 时，只需 $f(1)\leqslant 0$ 即 $0>a\geqslant -1$

综上可得 $a\geqslant -1$.

分析2 因不等式恒成立，所以不等式对应函数在 $(1,2]$

上的最大值恒小于0，从而转化为二次函数在闭区间上的最值问题.

方法2 设 $f(x)=ax^2-2ax-1$，当 $a=0$ 时，$f(x)=-1$，满足不等式 $f(x)<0$

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的对称轴为 $x=1$，结合二次函数图象，$(1,2]$ 为 $f(x)$ 的增区间. $\therefore f_{\max}(x)=f(2)=-1<0 \therefore a>0$ 成立；

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 对称轴为 $x=1$，区间 $(1,2]$ 为 $f(x)$ 的减区间

$\therefore f_{\max}=f(1)=-a-1\leqslant 0 \therefore a\geqslant -1 \therefore -1\leqslant a<0$

综上所述 $a\geqslant -1$.

评注 从以上两种解法可知：二次函数、二次不等式与二次方程是密不可分的. 从它们的转化中可以考查三者的联系. 也可以以它们为载体考查几种重要的数学思想方法.

解题步骤 JIETIBUZHOU

A组 基础题

选择题

1. 设不等式 $|x-a|<b$ 的解集为 $\{x|-1<x<2\}$，则 a 与 b 的值为(　　).

A. $a=1,b=3$　　B. $a=-1,b=3$

C. $a=-1,b=-3$　　D. $a=\frac{1}{2},b=\frac{3}{2}$

2. 不等式 $ax^2+5x+c>0$ 的解集为 $(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$，那么 a,c 为(　　).

A. $a=6,c=1$　　B. $a=-6,c=-1$

C. $a=1,c=6$　　D. $a=-1,c=-6$

3. 不等式 $|x|\geqslant\frac{2}{x}$ 的解集是(　　).

A. $(-\infty,0)$　　B. $[\sqrt{2},+\infty)$

C. $(-\infty,0)\cup[\sqrt{2},+\infty)$　　D. $[-\sqrt{2},0)\cup[\sqrt{2},+\infty)$

4. 不等式 $|\frac{mx-1}{x}|>m(m>0)$ 的解集是(　　).

A. $\{x|x>m\}$　　B. $\{x|x<\frac{1}{2m}\}$

C. $\{x|\frac{1}{2m}<x<\frac{1}{m}\}$　　D. $\{x|x<0$ 或 $0<x<\frac{1}{2m}\}$

5. 不等式 $|x+2|+|x-1|<a$ 的解集是 $\varnothing$，则 a 的取值范围是(　　).

A. $(3,+\infty)$　　B. $[3,+\infty)$

C. $(-\infty,3]$　　D. $(-\infty,3)$

6. 对于任意 $x\in\mathbf{R}$，代数式 $ax^2-4ax+3$ 的值都大于零，则 a 的取值范围是(　　).

A. $0<a<\frac{3}{4}$　　B. $0\leqslant a<\frac{3}{4}$

C. $0<a\leqslant\frac{3}{4}$　　D. $a>\frac{3}{4}$

B组 提高题

填空题

1. 不等式 $(1-|x|)(x+1)>0$ 的解集是______.

2. $\left|\frac{x}{1+x}\right|>\frac{x}{1+x}$ 的解是______.

3. 设 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x|mx^2+8mx+21>0\}$，$\complement_U A=\varnothing$，则 m 的取值范围是______.

解答题

4. 解下列不等式

(1) $3<|1-2x|\leqslant 5$；

(2) $|x^2-9|\leqslant x+3$.

5. 解关于 x 的不等式 $12x^2-ax>a^2$.

6. 解不等式 $|x^2-3|x|-3|\leqslant 1$.

C组 高考预测题

1. 已知不等式 $2x-1>m(x^2-1)$.

(1) 若对于所有的实数 x 不等式恒成立，求 m 的取值范围；

(2) 若对于 $m\in[-2,2]$ 不等式恒成立，求实数 x 的取值范围.

2. 已知$\{x|x^2+(2a-1)x+a^2-a>0\}\supseteq\{x|x^2-x-6>0\}$，求实数 a 的取值范围.

1.3 简易逻辑与充要条件

难点聚焦

复习难点 关于简单命题和复合命题的理解和认识，四种命题的关系及真假判断是本节的难点.

逻辑中的“或”可视为集合中的“并”，“且”可视为“交”，“非”可视为“补”. 可见，“或、且、非”是三种基本的逻辑运算，且可用集合的三种运算来描述. 简单命题与复合命题的分辨不能只从字面上看有没有“或”、“且”、“非”. 因为逻辑联结词还有不少，如“若……则”，“因为……所以……”等.

判定 A 是 B 的什么条件关键是看“若 A 则 B”、“若 B 则 A”是否为真命题. 当“若 A 则 B”是否为真难以判别时可以判别它的等价命题“若非 B 则非 A”的真假. 去探求充要条件时一般可先探求其必要条件，再看其充分性是否成立.

学法指津

1. 一个语句是否为命题，关键要看能否判断真假. 陈述句、反诘疑问句都是命题，而祈使句、疑问句、感叹句都不是命题.

2. 如何运用逻辑联结词，把几个简单命题构成复合命题？反之，如何把一个复合命题分解为几个简单命题？

3. 根据一个命题来构造它的逆命题、否命题和逆否命题的关键在于分清条件和结论. 一个命题的否定与命题的否命题是不同的，前者只否定结论，后者既否定条件，又否定结论.

4. 判断命题的真假要以真值表为依据. 原命题与其逆否命题为等价命题，逆命题与否命题为等价命题，一真俱真，一假俱假. 当一个命题的真假不易判断时，可考虑判断其等价命题的真假.

5. 确定一个“若 p 则 q”形式的命题为真，一般要由条件“p”经过一定的逻辑推理得出结论“q”，确定一个“若 p 则 q”的命题为假，一般只须举一个反例说明即可.

判断命题充要条件有如下三种常用方法：

(1)定义法；

(2)等价法：即利用 $A\Rightarrow B$ 与非 $B\Rightarrow$ 非 A；$B\Rightarrow A$ 与非 $A\Rightarrow$ 非 B；$A\Leftrightarrow B$ 与非 $B\Leftrightarrow$ 非 A 的等价关系，对于条件或结论是不等关系(否定式)的命题，一般运用等价法；

(3)利用集合间的包含关系判断，若 $A\subseteq B$，则 A 是 B 的充分条件或 B 是 A 的必要条件；若 $A=B$，则 A 是 B 的充要条件.

典例剖析

例 1 指出下列语句是不是命题，若为命题，指出其中复合命题的基本形式及构成它的简单命题，并判断复合命题的真假：

(1)π 既大于 3 又是无理数；

(2)直角不等于 90°；

(3)$x+1\geqslant 2x-3$；

(4)垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分这条弦所对的两条弧.

解 除(3)外，其余语句都是命题. (1)这个命题是 p 且 q 的形式，其中

p:π 大于 3，q:π 是无理数；

(2)这个命题是非 p 的形式，其中

p:直角等于 90°；

(4)这个命题是 p 且 q 的形式，其中

p:垂直于弦的直径平分这条弦.

q:垂直于弦的直径平分这条弦所对的两条弧；

(1)、(4)为真命题，(2)为假命题.

评注 有的“p 或 q”与“p 且 q”形式的复合命题语句中，字面上未出现“或”与“且”字，如此例中的(1)与(4)，此时应从语句的陈述中搞清含义从而分清是“p 或 q”还是“p 且 q”形式. 一般地，若两个命题属于同时都要满足的为“且”，属于并列的为“或”.

例 2 将下列命题改写成“若 p 则 q”的形式，然后写出各命题的否定、逆命题、否命题和逆否命题，并逐一判断其真假：

(1)相等向量的模相等；

(2)顶点在底面上的射影是底面三角形重心的三棱锥是正三棱锥.

(3)直线和圆相切，切点与圆心的连线垂直于这条直线.

解 (1)若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，是真命题；

命题的否定：若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$，是假命题；

逆命题：若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，是假命题；

否命题：若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$，是假命题；

逆否命题：若 $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$，是真命题；

(2)若三棱锥 $A—BCD$ 的顶点 A 在底面 BCD 上的射影是$\triangle BCD$ 的重心，则三棱锥 $A—BCD$ 是正三棱锥，是假命题；

命题的否定：若三棱锥 $A—BCD$ 的顶点 A 在底面 BCD 上的射影是$\triangle BCD$ 的重心，则三棱锥 $A—BCD$ 不一定是正三棱锥，是真命题；

逆命题：若三棱锥 $A—BCD$ 是正三棱锥，则三棱锥 $A—BCD$的顶点 A 在底面 BCD 上的射影是$\triangle BCD$ 的重心，是真命题；

否命题：若三棱锥 $A—BCD$ 的顶点 A 在底面 BCD 上的射影不是$\triangle BCD$ 的重心，则三棱锥 $A—BCD$ 不是正三棱锥，是真命题；

逆否命题：若三棱锥 $A—BCD$ 不是正三棱锥，则顶点 A 在底面 BCD 上的射影一定不是$\triangle BCD$ 的重心，是假命题.

(3)若直线和圆相切，则切点与圆心的连线垂直于这条直线，是真命题；

命题的否定：若直线和圆相切，则切点与圆心的连线不垂直于这条直线，是假命题；

逆命题：若圆上点与圆心的连线垂直于过这点的直线，则这条直线与圆相切，是真命题；

否命题：若直线和圆不相切，则直线与圆的公共点与圆心的连线与这条直线不垂直，是真命题；

逆否命题：若圆上一点与圆心的连线与过圆上这点的直线不垂直，则这条直线不是圆的切线，是真命题.

评注 改写命题时，在等价条件下可以使用符号语言，以使问题表述得更清楚简明；命题中使用了判断词"是"，根据对象的分类，其否定可以为"不是"或"不一定是"；检验所改写的命题是否正确的一个有效手段是利用互为逆否命题的两个命题的等价关系进行判断.

例3 求关于 x 的方程 $x^2+(2k-1)x+k^2=0$ 的两个实根均大于1的充要条件.

分析 有关一元二次方程实根分布问题. 常用二次函数的图象.

解 方法1 设方程的两根为 x_1、x_2 则

$$\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\ x_1>1\\ x_2>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\ x_1-1>0\\ x_2-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\ (x_1-1)+(x_2-1)>0\\ (x_1-1)(x_2-1)>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\ x_1+x_2>2\\ x_1x_2-(x_1+x_2)+1>0\end{cases}$$

解得 $k<-2$

则关于 x 的方程 $x^2+(2k-1)x+k^2=0$ 的两实根均大于1的充要条件是 $k<-2$.

方法2 记 $f(x)=x^2+(2k-1)x+k^2$. 所求充要条件是

$$\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\ -\dfrac{2k-1}{2}>1\\ f(1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2k-1)^2-4k^2\geqslant 0\\ k<-\dfrac{1}{2}\\ 1+2k-1+k^2>0\end{cases}$$

解得 $k<-2$.

评注 此题易产生下列错误解法.

$$\begin{cases}\Delta\geqslant 0\\ x_1+x_2>2\\ x_1x_2>1\end{cases}\Rightarrow k<-1$$

错误根源在于用"必要条件"替代"充要条件".

例4 指出下列条件中 p 是 q 的什么条件，q 是 p 的什么条件，并说明理由.

(1) $p:\begin{cases}\alpha+\beta>4\\ \alpha\beta>4\end{cases}$；$q:\begin{cases}\alpha>2\\ \beta>2\end{cases}$.

(2) $p:x\sqrt{2x+3}=x^2$；$q:2x+3=x^2$.

(3) p：$\triangle ABC$ 是直角三角形；q：$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

(4) $p:\angle C=90^\circ$；q：$\triangle ABC$ 是直角三角形.

(5) $p:A\cap B=A$；$q:A\subsetneqq B$.

(6) $p:\dfrac{2}{x}\geqslant 1$；$q:x^2<2x$.

解 (1) $\begin{cases}\alpha>2,\\ \beta>2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta>4,\\ \alpha\beta>4.\end{cases}$ 反之却不一定成立. 例如取 $\alpha=1,\beta=5$ 时，虽然满足 $\begin{cases}\alpha+\beta>4,\\ \alpha\beta>4,\end{cases}$ 但不满足 $\begin{cases}\alpha>2,\\ \beta>2,\end{cases}$ 故 $p\nRightarrow q$. 但 $q\Rightarrow p$，p 是 q 的必要而不充分条件，q 是 p 的充分而不必要条件.

(2) 此题的 p 与 q 是两个方程的根，首先要解方程，要注意解方程时的同解变形，把增根舍去. $p:x\sqrt{2x+3}=x^2$，解得 $x=-1$ 或 $x=0$ 或 $x=3$，把 $x=-1$ 代入原方程时，得 $-1=1$，舍去，而 $q:2x+3=x^2\Leftrightarrow x=-1$ 或 $x=3$，故 p、q 互为既不充分也不必要条件.

(3) p、q 互为既不充分也不必要条件.

(4) $p:\angle C=90^\circ\Rightarrow q$：$\triangle ABC$ 是直角三角形. 反之，q 成立时，有可能 $\angle B$ 或 $\angle A$ 为 90°，故 $q\nRightarrow p$.

所以 p 是 q 的充分而不必要条件，q 是 p 的必要而不充分条件.

(5) $A\cap B=A\Rightarrow A\subseteq B\nRightarrow A\subsetneqq B$，而 $A\subsetneqq B\Rightarrow A\cap B=A$，故 p 是 q 的必要而不充分条件，q 是 p 的充分而不必要条件.

(6) 此题的 p、q 是两个不等式的解集，要注意最后得到的解集之间的包含关系.

$$p:\frac{2}{x}\geqslant 1\Leftrightarrow\begin{cases}2x\geqslant x^2\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow 0<x\leqslant 2.$$

还可以这样解：$\dfrac{2}{x}\geqslant 1$，故 $x>0$，

所以 $2\geqslant x$，从而 $0<x\leqslant 2$，

$q:x^2<2x\Leftrightarrow 0<x<2$，

所以 $\{x|0<x<2\}\subsetneqq\{x|0<x\leqslant 2\}$，

故 $p\nRightarrow q$ 而 $q\Rightarrow p$，故 p 是 q 的必要而不充分条件，q 是 p 的充分而不必要条件.

评注 此类题只要判断 $p\Rightarrow q$ 与 $q\Rightarrow p$ 的真假即可，在推导不成立时，往往可通过举反例来否定一个命题的成立.

例5 求证：关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有一个等于1的根的充要条件是 $a+b+c=0$.

分析 本命题的条件是"$a+b+c=0$"，结论是"$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有一个等于1的根"，所以证必要性即证明"若 $x=1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，则 $a+b+c=0$"，证充分性即证明"若 $a+b+c=0$，则 $x=1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根".

证明 (1)先证必要性

∵ $x=1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，

∴ $a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=0$，即 $a+b+c=0$.

(2)再证充分性

∵ $a+b+c=0$，

∴ $c=-(a+b)$，代入方程，得

$(x-1)(ax+a+b)=0$，

∴ $x=1$，或 $x=-\dfrac{a+b}{a}(a\neq 0)$.

∴ 方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根等于1.

评注 充要条件的证明，一般先证必要性，再证充分性，从本例可引申出命题"直线 $ax+by+c=0$ 通过定点 $(1,1)$ 的充要条件是 $a+b+c=0$ (a、b、c 不全为0).

例6 在 $M=\{x||x+1|+|x-3|>8\}$，$P=\{x|x^2+(a-8)x-8a\leqslant 0\}$ 的前提下：

(1)求 a 的一个值，使它成为 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$ 的一个充分而不必要条件.

(2)求 a 的取值范围，使它成为 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$ 的一个必要而不充分条件.

解 由题意 $M=\{x|x<-3$ 或 $x>5\}$，$P=\{x|(x+a)\cdot(x-8)\leqslant 0\}$

(1)由 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$ 得：$-3\leqslant -a\leqslant 5$ 即 $-5\leqslant a\leqslant 3$. 取 $a=0$，可得 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$，但由 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$ 未必得 $a=0$，故 $a=0$ 是 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$ 成立的一个充分而不必要条件.

(2)由 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$ 得 $-5\leqslant a\leqslant 3$，此时可推出 $a\leqslant 3$，但 $a\leqslant 3$ 时未必有 $-5\leqslant a\leqslant 3$，从而 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$ 不能成立，因此 $a\leqslant 3$ 是 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$ 的一个必要而不充分条件.

评注 (1)本题的解题思路是：首先找出 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$ 成立的充要条件 $-3\leqslant -a\leqslant 5$，再进一步得出必要而不充分条件或充而分而不必要条件，要注意本题的结果不惟一.

(2)要善于借助集合的观点来理解充要条件，找出 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$ 的充要条件 $P=[-5,3]$ 后，求题设的一个充分而不必要的条件就是求 P 的真子集，求题设的一个必要而不充分的条件就是求一个集合 Q，使 P 是 Q 的真子集.

解题步骤 JIETIBUZHOU

A组 基础题

选择题

1. 设原命题为“$A\cap B=B$，则 $A\subseteq B$”，则原命题、逆命题、否命题和逆否命题中为真命题的个数是（　　）.

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 4

2. “$(a+b)(b+c)(c+a)=0$”的含义是（　　）.

A. a,b,c 中有两个为零

B. a,b,c 两两互为相反数

C. a,b,c 中至少有一个不为零

D. a,b,c 中至少有两个互为相反数

3. 在 $\triangle ABC$ 中，“$A>30^\circ$”是“$\sin A>\frac{1}{2}$”的（　　）.

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分又不必要条件

4. 已知 A 和 B 是两个命题，如果 A 是 B 的充分而不必要条件，那么非 A 是非 B 的（　　）.

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. 方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负的实数根的充要条件是（　　）.

A. $0<a\leqslant 1$　　B. $a<1$

C. $a\leqslant 1$　　D. $0<a\leqslant 1$ 或 $a<0$

6. 如果命题“p 或 q”是真命题，“非 p”是假命题，那么（　　）.

A. 命题 p 一定是假命题

B. 命题 q 一定是假命题

C. 命题 q 一定是真命题

D. 命题 q 可以真也可以假

B组 提高题

填空题

1. 设命题 A：小王在看书；命题 B：小赵在看书；命题 C：小孙在看书.

①命题“小王、小赵、小孙都在看书”是“A 且 B 且 C”形式的复合命题；

②命题“小王、小赵、小孙至少一人在看书”是“A 或 B 或 C”形式的复合命题；

③命题“小王、小赵都在看书，只有小孙没有看书”是“A 且 B 或 C”形式的复合命题；

④命题“小王、小赵都没有看书，只有小孙在看书”是“A 或 B 且 C”形式的复合命题.

以上四个命题中正确的是________.（填上所有正确命题的序号）

2. $x\in\mathbf{R}$ 且 $(1-|x|)(1+x)>0$ 的充要条件是______.

3. 条件 p：$-1<m<5$；条件 q：方程 $x^2-2mx+m^2-1=0$ 的两根均大于 -2 小于 4，则 p 是 q 的________.

4. 已知条件 p：$|x+1|>2$，条件 q：$5x-6>x^2$，则非 p 是非 q 的________条件.

5. 已知下列三个方程 $x^2+4ax-4a+3=0$，$x^2+(a-1)x+a^2=0$，$x^2+2ax-2a=0$ 至少有一个方程有实根，求实数 a 的取值范围________.

解答题

6. 已知条件 p：$-2<b<0$，$0<c<1$；条件 q：关于 x 的方程 $x^2+bx+c=0$ 有两个小于 1 的正根，则 p 是 q 的什么条件？

7. 设命题 p：$|4x-3|\leqslant 1$，命题 q：$x^2-(2a+1)x+a(a+1)\leqslant 0$. 若 p 是 $\neg q$ 的必要而不充分条件，求实数 a 的取值范围.

C组

高考预测题

设 $x、y\in\mathbf{R}$，求证 $|x+y|=|x|+|y|$ 成立的充要条件是 $xy\geqslant0$.

1.4 全章综合应用与高考

学法指津

综合问题的求解关键是要深刻理解原始概念，要在运用中理解，在理解中深化，使知识的掌握时时处在解决问题的动态实践活动中.

1. 对集合问题求解应紧扣集合本身的概念和性质，对问题作出准确的化简和合理的转化.

2. 对简易逻辑问题则应紧抓逻辑关联词、充要条件，顺利实施实际问题向数学问题的自然过渡和转化.

典例剖析

例 1 求证一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 最多有两个不相等的根.

分析 所谓最多有两个，就是不可能有三个. 欲证"最多有两个不相等的根"，只要证明它的反面"有三个不相等的根"不成立，即证明了原命题，可考虑用反证法证明.

证明 假设方程有三个不相等的根 x_1,x_2,x_3，则

$$\begin{cases}ax_1^2+bx_1+c=0, & ①\\ ax_2^2+bx_2+c=0, & ②\\ ax_3^2+bx_3+c=0, & ③\end{cases}$$

由①−②，得 $a(x_1+x_2)+b=0$ ④

由①−③，得 $a(x_1+x_3)+b=0$ ⑤

由④−⑤，得 $a(x_2-x_3)=0$

$\because a\neq0$，$\therefore x_2-x_3=0$，即 $x_2=x_3$.

这与假设 x_1,x_2,x_3 互不相等矛盾.

故原方程最多只有两个不相等的实根.

评注 本例中，否定结论是有三个以上的不相等的根，但在反证法证明中只证有三个不相等的根的情况，为什么可以这样证明呢？我们来看看证明有四个不相等的根的情况：设这四个不相等的根是 x_1,x_2,x_3,x_4，利用 x_1,x_2,x_3，按照本例中的推导方法，即可推出 $x_2=x_3$ 的矛盾结论. 同样对于五个、六个……不相等的根的情况也可同样处理. 这说明在证明这类问题时，只要证明其最小量不能成立就可以了.

例 2 已知关于 x 的一元二次方程($m\in\mathbf{Z}$)，

$mx^2-4x+4=0$， ①

$x^2-4mx+4m^2-4m-5=0$， ②

求方程①和②的根都是整数的充要条件.

分析 根据方程①和②有实根且实根为整数，先求出整数 m，然后再确定它是否具有充分性.

解 方程①有实数根的充要条件 $\Delta=16-4\times4m\geqslant0$. 解得 $m\leqslant1$.

方程②有实数根的充要条件是 $\Delta=16m^2-4(4m^2-4m-5)\geqslant0$，解得 $m\geqslant-\frac{5}{4}$.

所以 $-\frac{5}{4}\leqslant m\leqslant1$，而 $m\in\mathbf{Z}$，故 $m=-1$ 或 $m=0$ 或 $m=1$.

当 $m=-1$ 时，方程①为 $x^2+4x-4=0$，无整数根；

当 $m=0$ 时，方程②为 $x^2-5=0$，无整数根；

当 $m=1$ 时，方程①为 $x^2-4x+4=0$，

方程②为 $x^2-4x-5=0$，①和②均有整数根.

从而，①和②均有整数根 $\Rightarrow m=1$；

反之，$m=1$，方程①为 $x^2-4x+4=0$，

方程②为 $x^2-4x-5=0$，①和②均有整数根.

$\therefore m=1\Rightarrow$①和②均有整数根.

所以方程①和②均有整数根的充要条件是 $m=1$.

评注 对于求充要条件问题，一般地是先求出必要条件后，再证明具有充分性. 证明充要条件，既要证充分性(证明原命题成立)，又要证必要性(证明原命题的逆命题成立).

例 3 设 a,b 是两个实数，$A=\{(x,y)\mid x=n,y=na+b,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{(x,y)\mid x=m,y=3(m^2+5),m\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant144\}$.

讨论是否存在 a 和 b，使得 $A\cap B\neq\varnothing$，且 $(a,b)\in C$.

解 集合 A、B 可化简为 $A=\{(x,y)\mid y=ax+b,x\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{(x,y)\mid y=3(x^2+5),x\in\mathbf{Z}\}$，$A\cap B\neq\varnothing$，即方程组 $\begin{cases}y=ax+b\\ y=3(x^2+5)\end{cases}$ 有解，且 x 为整数，即关于 x 的方程 $ax+b=3(x^2+5)$①有整数解；又由 $(a,b)\in C$，即 $a^2+b^2\leqslant144$②，将①、②看作关于 a,b 的方程和不等式，它们的几何意义分别表示直线和圆及其内部，同时满足①、②，即直线与圆有公共点，故 $d=\frac{3(x^2+5)}{\sqrt{x^2+1}}\leqslant12$，即 $(x^2+5)^2\leqslant16(x^2+1)$，整理得 $(x^2-3)^2\leqslant0$ $\therefore x^2=3$，与 x 为整数矛盾，可见符合条件的 a、b 不存在.

评注 有些集合问题的求解必须在集合语言与几何语言及其他数学语言之间进行互译，用其他数学知识来解决某些集合问题，本题就是一个典型的例子，将上题作改动；a、b 是两个整数，$B=\{(x,y)\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant2\}$，再讨论.

高考导向标

1. 命题趋向

集合是高考每年必考的知识点之一，主要考查集合的概念、交、并、补的运算及有关术语、符号，数轴与维恩图.

近年来，高考中关于集合与简易逻辑的试题可分为两大类. 一类是集合、条件、命题本身的基本题. 这类题多为选择、

填空题;另一类是集合、条件、命题与其他知识的综合题.

在上面第二类题中又有两种情形:一种是用集合、条件和命题来表述的题(因为用集合、条件、命题的语言来表述的数学概念和数学判断往往具有简明性和精确性),这种题实质上就是代数、几何或三角题,大部分属中档难度题;另一种情形是需要用集合的思想或者从条件的重要性来思考的数学题,这时解题思想往往很深刻,因而也较难.

不等式也一直是高考的热点,试题大致有三类,一是考查不等式性质,常与第二章要学到的指数函数、对数函数结合起来考查,有时与充要条件知识结合考查,多数采用选择题形式;二是解不等式,有采用选择或填空形式的基本题,也有解答题,在解答题中,含有字母参数的不等式为多,也较难,需要对字母参数进行分类讨论;三是与应用题结合考查,应用题是近几年高考的热点,而应用题多与不等式有关.

2. 高考预测

(1)在复习中首先把握基础性知识,深刻理解本单元的基本知识点、基本数学思想和基本数学方法.重点掌握集合、充分条件与必要条件的概念和运算方法.要真正掌握数形结合思想——用维恩图解题.

(2)涉及本单元知识点的高考题,如前所述,既有小型综合题,也有大型综合题.所以在复习中,要灵活掌握小型综合题型(如集合与映射,集合与自然数集,集合与不等式,集合与方程等;充分条件、必要条件与三角、立体几何、解析几何中的知识点的结合等);也应对有一定难度的大型综合题型进行有针对性的训练与准备.

3. 历年高考题选

● **样题一** (2002·天津·江西)设集合

$M=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$,

$N=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$,则( ).

A. $M=N$　　B. $M\subsetneqq N$

C. $M\supsetneqq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

命题意图 本题考查实数、集合的基本知识.

解答要点 在 M 中,$x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2k+1}{4}$,在 N 中,$x=\frac{k+2}{4}$.显然,由于 $k\in\mathbf{Z}$,故有对于相同的 k,$2k+1$ 所取实数个数少于 $k+2$ 所取实数的个数.

$\therefore M\subsetneqq N$.故应选 B.

考点扫描 本题涉及实数与集合的有关知识,题目小巧玲珑,富于思考,活而不难,属易题.

● **样题二** (2003·上海)设集合 $A=\{x\mid x<4\}$,$B=\{x\mid x^2-4x+3>0\}$,则集合 $\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin A\cap B\}=$ ______.

命题意图 本题主要考查不等式、集合等基本知识.

解答要点 $\because B=\{x\mid x>3$,或 $x<1\}$,

$A=\{x\mid x<4\}$,

$\therefore A\cap B=\{x\mid x<1$,或 $3<x<4\}$.

$\therefore\{x\mid x\in A$,且 $x\notin A\cap B\}=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$.

考点扫描 本题涉及知识点是解不等式、集合的有关运算.理解集合的有关含义及会解(简单二次)不等式,考生均可以得到分数,属容易题.

● **样题三** (2004·全国)设 A、B、I 均为非空集合,且满足 $A\subseteq B\subseteq I$,则下列各式中错误的是( ).

A. $(\complement_I A)\cup B=I$

B. $(\complement_I A)\cup(\complement_I B)=I$

C. $A\cap(\complement_I B)=\varnothing$

D. $(\complement_I A)\cap(\complement_I B)=\complement_I B$

命题意图 本小题主要考查有关集合的概念及运算.

解答要点 利用图形及已知知,答案 B 是错误的.

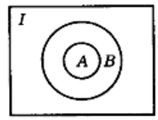


图 1-4-1

故选 B.

● **样题四** (2004·全国·理)设集合 $M=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$,$N=\{(x,y)\mid x^2-y=0,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$,则集合 $M\cap N$ 中元素的个数为( ).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

命题意图 考查集合的概念与运算以及简单数形结合的数学思想.

解答要点 $M\cap N=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}x^2+y^2=1,\\y=x^2\end{cases}\right\}$

由 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\y=x^2\end{cases}\Rightarrow y^2+y-1=0$

$y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}=x^2$

取 $x^2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,故有两组解.

$\therefore$ 选 B.

● **样题五** (2004·天津·文)设集合 $P=\{1,2,3,4,5,6\}$,$Q=\{x\in\mathbf{R}\mid 2\leqslant x\leqslant 6\}$,那么下列结论正确的是( ).

A. $P\cap Q=P$　　B. $P\cap Q\supsetneqq Q$

C. $P\cup Q=Q$　　D. $P\cap Q\subsetneqq P$

命题意图 考查集合的运算与概念.

解答要点 $P\cap Q=\{2,3,4,5,6\}\subsetneqq P$

故选 D.

● **样题六** (2004·湖北·理 10)设集合 $P=\{m\mid -1<m<0\}$,$Q=\{m\in\mathbf{R}\mid mx^2+4mx-4<0$ 对任意实数 x 恒成立$\}$,则下列关系中成立的是( ).

A. $P\subsetneqq Q$　　B. $Q\subsetneqq P$

C. $P=Q$　　D. $P\cap Q=\varnothing$

命题意图 考查集合的运算及二次函数、二次不等式之间的关系.

解答要点 $mx^2+4mx-4<0$ 恒成立

若 $m=0$,则 $-4<0$ 成立,故 $m=0$

若 $m\neq0$,则 $\begin{cases}m<0,\\\Delta=16m^2+16m<0\end{cases}$

$\therefore -1<m<0$

故 $Q=\{m\mid -1<m\leqslant 0\}$

$\therefore P\subsetneqq Q$.

故选 A.

考点扫描 集合的概念、交、并、补的运算.

集合符号的正确理解与应用,结合一次、二次不等式是高考客观题中考查集合方面的主要考点.

● **样题七** (2004·天津·理 8)已知数列$\{a_n\}$,那么"对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$,点 $P_n(n,a_n)$都在直线 $y=2x+1$ 上"是"$\{a_n\}$为等差数列"的( ).

A. 必要而不充分条件

B. 充分而不必要条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

命题意图 本小题主要考查充要条件的概念.

解答要点 $P_n(n,a_n)$在直线 $y=2x+1$ 上

$\Rightarrow a_n=2n+1$

$\Rightarrow\{a_n\}$为等差数列

反之,若$\{a_n\}$为等差数列.

如 $a_n=2$ 不满足 $a_n=2n+1$

$\therefore$选 B.

● **样题八** (2004·湖北·理 4)已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为非零的平面向量.甲:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,乙:$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,则( ).

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

命题意图 本小题主要考查向量内积及充要条件的有关概念.

解答要点 若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

反之 $\boldsymbol{a}=(0,1),\boldsymbol{b}=(1,0),\boldsymbol{c}=(-1,0)$.

满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 但 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{c}$.

$\therefore$选 B.

● **样题九** (2004·湖南·理·9)设集合 $U=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$,$A=\{(x,y)\mid 2x-y+m>0\}$,$B=\{(x,y)\mid x+y-n\leqslant 0\}$,那么点 $P(2,3)\in A\cap(\complement_U B)$的充要条件是( ).

A. $m>-1,n<5$ B. $m<-1,n<5$

C. $m>-1,n>5$ D. $m<-1,n>5$

命题意图 本小题考查集合的运算及充要条件的概念.

解答要点 依题意得 $P(2,3)\in A$

$\therefore 1+m>0,m>-1$

$P(2,3)\notin B$

$\therefore 5-n>0\quad\therefore n<5$

故选 A.

● **样题十** 命题 p:若 $a、b\in\mathbf{R}$,则$|a|+|b|>1$ 是$|a+b|>1$的充分而不必要条件.

命题 q:函数 $y=\sqrt{|x-1|-2}$的定义域是$(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$,则( ).

A."非 p 或 q"为假 B."p 且 q"为真

C. p 真 q 假 D. p 假 q 真

命题意图 本小题主要考查不等式及复合命题的有关知识及充要条件的概念.

解答要点 $|a|+|b|>1\nRightarrow|a+b|>1$.

如取$|a|=|b|=1$,其中 $a=1,b=-1$.

$|a+b|=|0|=0\ngtr 1$

反之$\because|a+b|\leqslant|a|+|b|$

$|a+b|>1\quad\therefore|a|+|b|>1$

$\therefore p$ 为假命题

由$|x-1|-2\geqslant 0$ 得 $x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -1$

$\therefore q$ 为真命题

$\therefore$选 D.

考点扫描 充分性、必要性的概念及命题真假的判定常出现在高考的客观题中.

自测试题

(满分:150 分 时间:120 分钟)

一、选择题(每小题 5 分,共 60 分)

1. 集合 $A=\{x\mid 0\leqslant x<3$,且 $x\in\mathbf{N}\}$的真子集的个数是( ).

A. 16 B. 8 C. 7 D. 4

2. 设集合 $A=\{x\mid x\in\mathbf{Z}$ 且 $-10\leqslant x\leqslant -1\}$,$B=\{x\mid x\in\mathbf{Z}$,且$|x|\leqslant 5\}$,则 $A\cup B$ 中的元素个数是( ).

A. 11 B. 10 C. 16 D. 15

3. 已知集合 $P=\{y\mid y=-x^2+2,x\in\mathbf{R}\}$,$Q=\{y\mid y=-x+2,x\in\mathbf{R}\}$,那么 $P\cap Q$ 等于( ).

A. $(0,2),(1,1)$ B. $\{(0,2),(1,1)\}$

C. $\{1,2\}$ D. $\{y\mid y\leqslant 2\}$

4. 不等式$|x-1|+|x-2|<3$ 的解集是( ).

A. $0<x<3$ B. $0<x\leqslant 2$

C. $x<1$ D. $x<3$

5. 不等式$|2x^2-1|\leqslant 1$ 的解集是( ).

A. $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$ B. $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$

C. $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$ D. $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 0\}$

6. 50 名学生参加跳远和铅球两项测验,跳远和铅球两项及格的人数分别是 40 人和 31 人,两项测验均不及格的有 4 人,两项测验都及格的人数是( ).

A. 35 B. 25 C. 28 D. 15

7. 设集合 $I=\{(x,y)\mid x、y\in\mathbf{R}\}$,集合 $M=\left\{(x,y)\left|\frac{y-3}{x-2}=1\right.\right\}$,$N=\{(x,y)\mid y-3=x-2\}$,那么$(\complement_I M)\cap N$ 等于( ).

A. $\varnothing$ B. $\{2,3\}$

C. $\{(x,y)\mid y-3\neq x-2\}$ D. $\{(2,3)\}$

8. 函数 $f(x)=x|x+a|+b$ 是奇函数的充要条件是( ).

A. $ab=0$ B. $a+b=0$ C. $a=b$ D. $a^2+b^2=0$

9. 已知 $p:a\neq 0,q:ab\neq 0$,则 p 是 q 的( ).

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件