



考研专业课全国名校真题题库



# 数学分析与高等代数

■ 金圣才 / 主编



中国石化出版社

[HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM](http://www.sinopec-press.com)

考研专业课全国名校真题题库

# 数学分析与高等代数

■ 金圣才 / 主编

中国石化出版社

[HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM](http://www.sinopec-press.com)

## 内 容 提 要

考研专业课全国名校真题题库系列包括 12 个分册: (1) 数据结构与操作系统、离散数学; (2) 计算机基础、系统结构与数据库; (3) 微机原理及应用; (4) 信号与系统、通信原理; (5) 电路与电子技术; (6) 机械原理与机械设计; (7) 自动控制与控制工程; (8) 无机化学、有机化学与分析化学; (9) 物理化学、生物化学与化工原理; (10) 数学分析与高等代数; (11) 普通物理、固体物理与材料科学基础; (12) 力学。每个分册一般按照各个学校各个专业进行分类和编排。题库系列收集到的考研真题的题量非常大, 一共包括 60 多所名校相关专业历年考研试题 2100 多套, 几乎囊括了全国所有名校各个热门专业的最新考研试题。本书收集和整理了北京大学、清华大学等众多高校数学分析与高等代数及其他专业课考研试题共 350 余套, 部分试题有参考答案。

本书特别适用于在硕士研究生入学考试中参加理工类科目考试的考生, 也适用于各大院校学习理工类高级课程的师生参考, 对于参加高级职称考试及其他相关专业人员来说, 本书也是一本能够很好地学习和了解理工类高级课程的参考资料。

## 图书在版编目(CIP)数据

数学分析与高等代数/金圣才主编. —北京: 中国石化出版社, 2006  
(考研专业课全国名校真题题库)  
ISBN 7-80164-987-7

I. 数… II. 金… III. ①数学分析-研究生-入学考试-试题②高等代数-研究生-入学考试-试题  
IV. ①017-44②015-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 019863 号

## 中国石化出版社出版发行

地址: 北京市东城区安定门外大街 58 号

邮编: 100011 电话: (010)84271850

读者服务部电话: (010)84289974

<http://www.sinopec-press.com>

E-mail: [press@sinopec.com.cn](mailto:press@sinopec.com.cn)

金圣才文化发展(北京)有限公司排版

河北天普润印刷厂印刷

全国各地新华书店经销

\*

787×1092 毫米 16 开本 30.5 印张 727 千字

2006 年 3 月第 1 版 2006 年 3 月第 1 次印刷

定价: 52.80 元

(购买时请认明封面防伪标识)

# 《考研专业课全国名校真题题库》

## 编委会

主编：金圣才

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 编委： | 孙艳  | 刘中秋 | 李宾  | 舒五玲 |
|     | 许新从 | 李天堂 | 吴利平 | 李奋发 |
|     | 连小刚 | 潘世溢 | 余应发 | 李向龙 |
|     | 张文和 | 孙汉中 | 李发良 | 周益林 |
|     | 苏剑平 | 程发慧 | 成上梅 | 徐少芳 |
|     | 万小峰 | 胡向木 | 张文杰 | 严写水 |

# 序 言

对任何一位准备考研的同学来说，历年考研真题的重要性是显而易见的。通过研究历年考研真题可以了解各个专业试题的出题风格和考查程度，既便于考生结合个人的专业水平和爱好选择报考最合适的学校和专业，又可更好地把握专业课的复习方向和重点。但大量收集全国名校的考研真题也是比较困难的，因此，收集和整理全国名校考研热门专业课真题题库就显得非常有价值。这也正是我们编辑出版题库系列的目的所在。

考研专业课全国名校真题题库系列共 12 个分册：(1) 数据结构与操作系统、离散数学；(2) 计算机基础、系统结构与数据库；(3) 微机原理及应用；(4) 信号与系统、通信原理；(5) 电路与电子技术；(6) 机械原理与机械设计；(7) 自动控制与控制工程；(8) 无机化学、有机化学与分析化学；(9) 物理化学、生物化学与化工原理；(10) 数学分析与高等代数；(11) 普通物理、固体物理与材料科学基础；(12) 力学。

需要特别说明的是：

(1) 题库系列收集到的考研真题的题量非常大，每册大体上按照各个学校各个专业进行分类和编排，一共包括 60 多所名校相关专业历年考研试题 2100 多套，几乎囊括了全国所有名校各个热门专业的最新考研试题。

(2) 收集和整理各个高校历年考研专业课试题的工作非常艰苦，我们尽力从各个途径进行收集。在此，我们要感谢全国各高校的众多同学和老师，他们提供了大量宝贵的内部资料和试题，每一真题都是一份优秀的考卷。因此，我们特别对各份考题的出题老师表示深深的感谢。

(3) 由于题库系列主要收集的是全国名校理工类热门专业的考研真题，题目难度较大，我们一般没有提供参考答案(除了部分试题外)。因此，我们即将出版热门专业典型题详解系列，读者可以与之配套进行复习。

圣才考研网开设了专业的论坛及专栏，还提供各大院校最新考研考博真题，如有建议或需要其他资料，请登录网站：

圣才考研网 [www.100exam.com](http://www.100exam.com)

圣才图书网 [www.1000book.com](http://www.1000book.com)

金圣才

# 考研考博图书目录

## ☞ 2007 年考研真题详解系列

1. 西方经济学(微观部分)考研真题与典型题详解
2. 西方经济学(宏观部分)考研真题与典型题详解
3. 微观经济学考研模拟试题详解
4. 宏观经济学考研模拟试题详解
5. 政治经济学考研真题与典型题详解
6. 金融学考研真题与典型题详解
7. 金融联考大纲详解
8. 金融联考真题与模拟试题详解
9. 货币银行学考研真题与典型题详解
10. 财务管理学(含公司财务)考研真题与典型题详解
11. 会计学考研真题与典型题详解
12. 国际贸易考研真题与典型题详解
13. 管理学考研真题与典型题详解
14. 行政管理学考研真题与典型题详解
15. 心理学(基本理论)精讲与考研真题详解
16. 心理学(研究方法)精讲与考研真题详解
17. 教育学考研真题与典型题详解
18. 中外教育史考研真题与典型题详解
19. 英语专业英汉互译考研真题与典型题详解
20. 经济法学考硕考博历年名校真题汇编与疑难解析
21. 罗宾斯《管理学(第7版)》笔记和课后习题详解
22. 罗宾斯《组织行为学(第10版)》笔记和课后习题详解

## ☞ 全国名校考研专业课真题题库系列

1. 数据结构与操作系统、离散数学
2. 计算机基础、系统结构与数据库
3. 微机原理及应用
4. 信号与系统与通信原理
5. 电路与电子技术
6. 机械原理与机械设计
7. 自动控制与控制工程
8. 无机化学、有机化学与分析化学
9. 物理化学、生物化学与化工原理
10. 数学分析与高等代数
11. 普通物理、固体物理与材料科学基础
12. 力学

### 考研数学系列

1. 微积分(经济类)考研真题与典型题详解
2. 线性代数(经济类)考研真题与典型题详解
3. 概率论(经济类)考研真题与典型题详解
4. 高等数学(理工类)考研真题与典型题详解
5. 线性代数(理工类)考研真题与典型题详解
6. 概率论(理工类)考研真题与典型题详解

### 考博英语辅导系列

1. 考博英语全国名校真题详解
2. 考博英语词汇突破
3. 考博英语阅读理解 150 篇详解
4. 考博英语翻译及写作真题解析与强化练习
5. 考博英语全真模拟试题

### 考博专业课真题题库系列

1. 全国名校考博专业课真题题库 - 经管类
2. 全国名校考博专业课真题题库 - 文史哲法类
3. 全国名校考博专业课真题题库 - 理工类
4. 全国名校考博专业课真题题库 - 生物医学类

### 购买图书请联系

中国石化出版社读者服务部

地址: 北京安定门外大街 58 号

电话: 010 - 84289974(兼传真)

# 目 录

## 北京大学

|                                        |        |
|----------------------------------------|--------|
| 解析几何与高等代数 1999 - 2002 .....            | ( 1 )  |
| 数学分析 1999 - 2002 .....                 | ( 5 )  |
| 高等数学与地质学基础 2004 - 2005 .....           | ( 8 )  |
| 专业综合考试 1999 - 2002 .....               | ( 11 ) |
| 综合考试(一)(含高数、常微分、理论力学)2003 - 2005 ..... | ( 36 ) |

## 清华大学

|                             |        |
|-----------------------------|--------|
| 高等代数 1998、2000 - 2001 ..... | ( 39 ) |
| 数学分析 1999 - 2001 .....      | ( 41 ) |

## 北京师范大学

|                            |        |
|----------------------------|--------|
| 概率论与数理统计 2003 - 2004 ..... | ( 43 ) |
| 高等代数 2003 - 2004 .....     | ( 44 ) |
| 数学分析 2003 - 2004 .....     | ( 46 ) |
| 高等数学(物天无)2003 - 2004 ..... | ( 48 ) |

## 北京科技大学

|                            |        |
|----------------------------|--------|
| 数学分析 2004 - 2005 .....     | ( 51 ) |
| 常微分方程 2004 - 2005 .....    | ( 52 ) |
| 高等代数 2004 - 2005 .....     | ( 55 ) |
| 概率论与数理统计 2004 - 2005 ..... | ( 57 ) |
| 概率统计 2004 - 2005 .....     | ( 60 ) |

## 北京化工大学

|                                  |        |
|----------------------------------|--------|
| 高等代数与解析几何 2002、2004 - 2005 ..... | ( 65 ) |
| 数学分析 2002 - 2005 .....           | ( 69 ) |
| 高等数学 2002 - 2005 .....           | ( 78 ) |

## 北京航空航天大学

|                                       |         |
|---------------------------------------|---------|
| 高等代数 2001 - 2005 .....                | ( 85 )  |
| 运筹学 2000 - 2002 .....                 | ( 92 )  |
| 概率与数理统计 2000 - 2001、2003 - 2005 ..... | ( 98 )  |
| 数学分析 2005 .....                       | ( 111 ) |

## 北京理工大学

|                          |         |
|--------------------------|---------|
| 数学物理方程 2002 - 2005 ..... | ( 112 ) |
| 运筹学 2001 - 2005 .....    | ( 115 ) |
| 高等代数 2003 - 2005 .....   | ( 124 ) |
| 数学分析 2003 - 2005 .....   | ( 128 ) |

## 北京交通大学

|                        |         |
|------------------------|---------|
| 高等代数 2002 - 2005 ..... | ( 131 ) |
| 数学分析 2001 - 2005 ..... | ( 137 ) |

|                                     |       |
|-------------------------------------|-------|
| 管理运筹学 2000 - 2005 .....             | (141) |
| <b>北京邮电大学</b>                       |       |
| 概率论 2002 - 2005 .....               | (150) |
| 高等代数 2002 - 2005 .....              | (152) |
| <b>北京工业大学</b>                       |       |
| 数学分析 2000 - 2005 .....              | (156) |
| 数学物理方法 2001 - 2005 .....            | (161) |
| 线性代数 2000 - 2005 .....              | (164) |
| <b>上海交通大学</b>                       |       |
| 运筹学与概率统计 2004 - 2005 .....          | (170) |
| 高等代数 2002 .....                     | (173) |
| 高等代数(含近世代数基础知识)2005 .....           | (173) |
| 数学分析 2002、2005 .....                | (174) |
| 概率论 2002 .....                      | (176) |
| <b>复旦大学</b>                         |       |
| 线性代数与数学分析 2001 - 2005 .....         | (177) |
| <b>华东理工大学</b>                       |       |
| 数学分析 2000 - 2005 .....              | (185) |
| 高等代数 2000 - 2002, 2004 - 2005 ..... | (190) |
| <b>上海理工大学</b>                       |       |
| 概率论与数理统计 2004 - 2005 .....          | (196) |
| 运筹学 2000 - 2005(2002 有 2 种) .....   | (197) |
| 数学分析 2003 - 2005 .....              | (206) |
| 高等代数 2002、2004 .....                | (210) |
| <b>南开大学</b>                         |       |
| 抽象代数 2002 .....                     | (212) |
| 高等代数 2003 - 2005 .....              | (213) |
| 高等数学 2003 - 2005 .....              | (216) |
| 数学分析 2000 - 2005 .....              | (220) |
| 高等代数与解析几何 2000 .....                | (224) |
| 空间解析几何与高等代数 2001 - 2002 .....       | (225) |
| 运筹学 2003 - 2005 .....               | (227) |
| <b>浙江大学</b>                         |       |
| 高等数学 2000 - 2005 .....              | (232) |
| 高等代数 2003 - 2005 .....              | (241) |
| 数学分析 2003 - 2005 .....              | (244) |
| 概率与统计 2003 .....                    | (247) |
| <b>南京大学</b>                         |       |
| 高等数学丙 2004 .....                    | (249) |
| 高等数学乙 2004 .....                    | (250) |
| 基础综合二(数学系各专业)2003 - 2005 .....      | (251) |
| 基础综合一(数学系各专业)2004 - 2005 .....      | (260) |
| 数学物理方法二 2004 - 2005 .....           | (265) |

## 东南大学

|                        |       |
|------------------------|-------|
| 高等代数 2004 - 2005 ..... | (266) |
| 数学分析 2003 - 2005 ..... | (269) |

## 南京航空航天大学

|                        |       |
|------------------------|-------|
| 高等代数 2001 - 2005 ..... | (273) |
| 数学分析 2001 - 2005 ..... | (278) |
| 常微分方程 2001 .....       | (283) |
| 概率论与数理统计 2001 .....    | (284) |
| 微分几何 2001 .....        | (285) |
| 运筹学 2005 .....         | (286) |

## 中山大学

|                             |       |
|-----------------------------|-------|
| 数学初试综合考试 2005 .....         | (288) |
| 高等数学(B) 2003 - 2005 .....   | (294) |
| 数学分析与高等代数 2003 - 2005 ..... | (298) |

## 厦门大学

|                            |       |
|----------------------------|-------|
| 高等数学 2003 - 2005 .....     | (301) |
| 高等代数 2004 .....            | (305) |
| 数学分析 2004 .....            | (306) |
| 综合基础 II (数学各专业) 2004 ..... | (307) |
| 基础综合 II (数学各专业) 2005 ..... | (308) |

## 武汉大学

|                          |       |
|--------------------------|-------|
| 高等数学 A 2003 - 2005 ..... | (310) |
| 数学物理方法 2003 - 2005 ..... | (314) |

## 华中科技大学(原华中理工大学)

|                        |       |
|------------------------|-------|
| 高等代数 2005 .....        | (318) |
| 数学分析 2002 - 2005 ..... | (319) |

## 四川大学

|                        |       |
|------------------------|-------|
| 数学 2005 .....          | (322) |
| 高等数学 2004 - 2005 ..... | (323) |

## 重庆大学

|                               |       |
|-------------------------------|-------|
| 高等数学(含线性代数) 2003 - 2004 ..... | (325) |
| 高等代数 2002 - 2005 .....        | (329) |
| 数学分析 2002 - 2005 .....        | (335) |

## 电子科技大学

|                                         |       |
|-----------------------------------------|-------|
| 概率论(复) 2003 - 2004 .....                | (340) |
| 线性代数 2003 - 2004(均有答案) .....            | (342) |
| 数学分析 2003 - 2004(均有答案) .....            | (349) |
| 高等数学 2003 - 2005(2004 - 2005 有答案) ..... | (359) |
| 复变函数 2003 - 2004(2004 有答案) .....        | (371) |
| 常微分方程 2003 - 2004(2004 有答案) .....       | (374) |
| 计算方法 2003 - 2004(2004 有答案) .....        | (377) |

## 西南交通大学

|                 |       |
|-----------------|-------|
| 高等数学 2003 ..... | (380) |
|-----------------|-------|

|                                              |       |
|----------------------------------------------|-------|
| 高等数学(一)2005 .....                            | (381) |
| <b>大连理工大学</b>                                |       |
| 高等代数 2003 - 2005 .....                       | (383) |
| 数学分析 2003 - 2005 .....                       | (387) |
| 运筹学基础及应用 2004 - 2005 .....                   | (391) |
| <b>东北大学</b>                                  |       |
| 概率论与数理统计 2000 - 2001 .....                   | (394) |
| 复变函数 2002 .....                              | (396) |
| 概率论 2002、2004 .....                          | (397) |
| 高等代数与常微分方程 A 2004 .....                      | (398) |
| 常微分方程 2000 - 2003 .....                      | (399) |
| 数学分析 2000 - 2004 .....                       | (403) |
| 高等代数 2001 - 2003A .....                      | (408) |
| <b>辽宁大学</b>                                  |       |
| 高等数学 2004 - 2005 .....                       | (410) |
| 数学 2004 - 2005 .....                         | (412) |
| 数学分析 2004 - 2005 .....                       | (415) |
| <b>西安交通大学</b>                                |       |
| 高等代数与线性代数 2004 - 2005 .....                  | (417) |
| <b>西安电子科技大学</b>                              |       |
| 运筹学基础 2001 - 2005 .....                      | (420) |
| 概率统计 2002 - 2005 .....                       | (428) |
| 高等数学(无线电物理、光学专业)2003 - 2005 .....            | (432) |
| 高等代数 2005 .....                              | (435) |
| 线性代数与概率论 2004 .....                          | (437) |
| 数学分析 2002 - 2005 .....                       | (438) |
| 高等数学 2004 .....                              | (443) |
| <b>中科院、中国科学技术大学及各院所</b>                      |       |
| 高等数学 B 2003 - 2005(2003 有答案)(中国科学技术大学) ..... | (444) |
| 概率统计 2004 - 2005(均有答案)(中国科学技术大学) .....       | (450) |
| 高等数学丁 A 2001(中国科学技术大学) .....                 | (453) |
| 高等数学 A 2003 - 2005(均有答案)(中国科学技术大学) .....     | (454) |
| 数学分析 2002 - 2005(武汉物理与数学研究所) .....           | (467) |
| 线性代数 2002 - 2005(武汉物理与数学研究所) .....           | (471) |

# 北京大学

## 1999 年硕士研究生入学考试试题

考试科目：解析几何与高等代数

一、(20 分)在仿射坐标系中，已知直线  $l_1, l_2$  的方程分别是

$$\frac{x+13}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{1}, \quad \frac{x-10}{5} = \frac{y+7}{4} = \frac{z}{1}$$

(1)判断直线  $l_1$  和  $l_2$  的位置关系，要求写出理由；

(2)设直线  $l$  的一个方向向量为  $\vec{v}(8, 7, 1)$ ，并且  $l$  与  $l_1$  和  $l_2$  都相交，求直线  $l$  的方程。

二、(10 分)在直角坐标系  $Oxyz$  中，设顶点在原点的二次锥面  $S$  的方程为

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0$$

(1)如果三条坐标轴都是  $S$  的母线，求  $a_{11}, a_{22}, a_{33}$

(2)证明：如果  $S$  有三条互相垂直的直母线，则  $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$

三、(16 分)设实数域上的矩阵  $A$  为  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(1)求  $A$  的特征多项式  $f(\lambda)$ ；

(2) $f(\lambda)$  是否为实数域上的不可约多项式；

(3)求  $A$  的最小多项式，要求写出理由；

(4)实数域上的矩阵  $A$  是否可对角化，要求写出理由。

四、(16 分)设实数域上的矩阵  $A$  为  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

(1)判断  $A$  是否为正定矩阵，要求写出理由；

(2)设  $V$  是实数域上的 3 维线性空间， $V$  上的一个双线性函数  $f(\alpha, \beta)$  在  $V$  的一个基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  下的度量矩阵为  $A$ ，证明  $f(\alpha, \beta)$  是  $V$  的一个内积；并且求出  $V$  对于这个内积所成的欧氏空间的一个标准正交基。

五、(16 分)设  $V$  是数域  $K$  上的一个  $n$  维线性空间， $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是  $V$  的一个基，用  $V_1$  表示由  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$  生成的线性子空间；令

$$V_2 = \left\{ \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i \mid \sum_{i=1}^n k_i = 0, k_i \in K \right\}$$

(1)证明  $V_2$  是  $V$  的子空间；

(2)证明  $V = V_1 \oplus V_2$ ；

(3)设  $V$  上的一个线性变换  $A$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  下的矩阵  $A$  是置换矩阵(即： $A$  的每一行与每一列都只有一个元素是 1，其余元素全为 0)，证明  $V_1$  与  $V_2$  都是  $A$  的不变子空间。

六、(12 分)设  $V$  和  $U$  分别是数域  $K$  上的  $n$  维、 $m$  维线性空间， $A$  是  $V$  到  $U$  的一个线性映射，即  $A$  是  $V$  到  $U$  的映射，且满足

$$A(\alpha + \beta) = A\alpha + A\beta, \quad \forall \alpha, \beta \in V,$$

$$A(k\alpha) = kA\alpha, \quad \forall \alpha \in V, k \in K$$

令

$$\text{Ker } A = \{ \alpha \in V \mid A\alpha = 0 \},$$

称  $\text{Ker } \underline{A}$  是  $\underline{A}$  的核, 它是  $V$  的一个子空间, 用  $\text{Im } \underline{A}$  表示  $\underline{A}$  的象 (即, 值域)

(1) 证明:  $\dim(\text{Ker } \underline{A}) + \dim(\text{Im } \underline{A}) = \dim V$ ;

(2) 证明: 如果  $\dim V = \dim U$ , 则  $\underline{A}$  是单射当且仅当  $\underline{A}$  是满射。

七、(10 分) 设  $V$  是实数域  $R$  上的  $n$  维线性空间,  $V$  上的所有复值函数组成的集合, 对于函数的加法以及复数与函数的数量乘法, 形成复数域  $C$  上的一个线性空间, 记作  $C^V$ 。

证明: 如果  $f_1, f_2, \dots, f_{n+1}$  是  $C^V$  中  $n+1$  个不同的函数, 并且它们满足

$$f_i(\alpha + \beta) = f_i(\alpha) + f_i(\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in V$$

$$f_i(k\alpha) = kf_i(\alpha), \quad \forall k \in R, \alpha \in V$$

则  $f_1, f_2, \dots, f_{n+1}$  是  $C^V$  中线性相关的向量组。

## 北京大学

### 2000 年硕士研究生入学考试试题

考试科目: 解析几何与高等代数

一、(20 分)

(1) 在直角坐标系中, 一个柱面的准线方程为

$$\begin{cases} xy = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

母线方向为  $(1, -1, 1)$ , 求这个柱面的方程。

(2) 在平面直角坐标系  $Oxy$  中, 二次曲线的方程为

$$x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 11 = 0,$$

求  $I_1, I_2, I_3$ ; 指出这是什么二次曲线, 并且确定其形状。

二、(22 分)

(1) 设实数域上的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

求正交矩阵  $T$ , 使得  $T^{-1}AT$  为对角矩阵, 并且写出这个对角矩阵,

(2) 在直角坐标系  $Oxyz$  中, 二次曲面  $S$  的方程为  $2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8xz = 1$ ,

作直角坐标变换, 把  $S$  的方程化成标准方程, 并且指出它是什么二次曲面。

三、(12 分) 设实数域上的  $s \times n$  矩阵  $A$  的元素只有 0 和 1, 并且  $A$  的每一行的元素的和是常数  $r$ ,  $A$  的每两个行向量的内积为常数  $m$ , 其中  $m < r$ 。

(1) 求  $|AA'|$ ; (2) 证明  $s = n$ ; (3) 证明  $AA'$  的特征值全为正实数。

四、(8 分) 设  $V$  是数域  $K$  上的  $n$  维线性空间,  $\underline{A}$  是  $V$  上的线性变换, 且满足  $\underline{A}^3 - 7\underline{A} = -6\underline{I}$ , 其中  $\underline{I}$  表示  $V$  上的恒等变换, 判断  $\underline{A}$  是否可对角化, 写出理由。

五、(12 分) 设  $V$  和  $V'$  都是数域  $K$  上的有限维线性空间,  $\underline{A}$  是  $V$  到  $V'$  的一个线性映射, 证明: 存在直和分解  $V = U \oplus W$ ,  $V' = M \oplus N$ , 使得  $\text{Ker } \underline{A} = U$ , 并且  $W \cong M$ 。

六、(10 分) 设  $f(x)$  和  $p(x)$  都是首项系数为 1 的整系数多项式, 且  $p(x)$  在有理数域  $Q$  上不可约, 如果  $p(x)$  与  $f(x)$  有公共复根  $\alpha$ , 证明:

(1) 在  $Q[x]$  中,  $p(x)$  整除  $f(x)$ ;

(2) 存在首项系数为 1 的整系数多项式  $g(x)$ , 使得  $f(x) = p(x)g(x)$

七、(16分)

(1) 设  $V$  是实数域上的线性空间,  $f$  是  $V$  上的正定的对称双线性函数,  $U$  是  $V$  的有限维子空间, 证明  $V = U \oplus U^\perp$ , 其中  $U^\perp = \{\alpha \in V \mid f(\alpha, \beta) = 0, \forall \beta \in U\}$

(2) 设  $V$  是数域  $K$  上的  $n$  维线性空间,  $g$  是  $V$  上的非退化的对称双线性函数,  $W$  是  $V$  的子空间, 令  $W^\perp = \{\alpha \in V \mid g(\alpha, \beta) = 0, \forall \beta \in W\}$

证明 (a)  $\dim V = \dim W + \dim W^\perp$ ; (b)  $(W^\perp)^\perp = W$ .

## 北京大学

### 2001 年硕士研究生入学考试试题

考试科目: 解析几何与高等代数

一、(15分) 在空间直角坐标系中, 点  $A, B, C$  的坐标依次为

$$(-2, 1, 4), (-2, -3, -4), (-1, 3, 3)$$

(1) 求四面体  $OABC$  的体积;

(2) 求三角形  $ABC$  的面积.

二、(15分) 在空间直角坐标系中,  $l_1: \frac{x-a}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$  与  $l_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$  是一对相交直线.

(1) 求  $a$ ; (2) 求  $l_2$  绕  $l_1$  旋转出的曲面的方程.

三、(12分) 设  $\omega$  是复数域  $C$  上的本原  $n$  次单位根 (即,  $\omega^n = 1$ , 而当  $0 < l < n$  时,  $\omega^l \neq 1$ ),  $s, b$  都是正整数, 而且  $s < n$ , 令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \omega^b & \omega^{2b} & \cdots & \omega^{(n-1)b} \\ 1 & \omega^{b+1} & \omega^{2(b+1)} & \cdots & \omega^{(n-1)(b+1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \omega^{b+s-1} & \omega^{2(b+s-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)(b+s-1)} \end{pmatrix} \quad (1)$$

任取  $\beta \in C^s$ , 判断线性方程组  $AX = \beta$  有无解? 有多少解? 写出理由.

四、(18分)

$$(1) \text{ 设 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

a. 若把  $A$  看成有理数域上的矩阵, 判断  $A$  是否可对角化, 写出理由;

b. 若把  $A$  看成复数域上的矩阵, 判断  $A$  是否可对角化, 写出理由.

(2) 设  $A$  是有理数域上的  $n$  级对称矩阵, 并且在有理数域上  $A$  合同于单位矩阵  $I$ . 用  $\delta$  表示元素全为 1 的列向量,  $b$  是有理数, 证明: 在有理数域上

$$\begin{pmatrix} A & b\delta \\ b\delta' & b \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & b - b^2\delta'A^{-1}\delta \end{pmatrix} \quad (3)$$

五、(14分) 在实数域上的  $n$  维列向量空间  $R^n$  中, 定义内积为  $(\alpha, \beta) = \alpha'\beta$ , 从而  $R^n$  成为欧几里得空间.

(1) 设实数域上的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -7 & 9 & -4 \end{pmatrix} \quad (4)$$

求齐次线性方程组  $AX=0$  的解空间的一个正交基。

(2) 设  $A$  是实数域上  $R$  上的  $s \times n$  矩阵, 用  $W$  表示齐次线性方程组  $AX=0$  的解空间, 用  $U$  表示  $A'$  的列空间 (即,  $A'$  的列向量组生成的子空间), 证明:  $U = W^\perp$ 。

六、(12 分) 设  $A$  是数域  $K$  上  $n$  维线性空间  $V$  上的一个线性变换, 在  $K[x]$  中,  $f(x) = f_1(x)f_2(x)$ , 且  $f_1(x)$  与  $f_2(x)$  互素, 用  $\text{Ker}A$  表示线性变换  $A$  的核, 证明:

$$\text{Ker}f(A) = \text{Ker}f_1(A) \oplus \text{Ker}f_2(A)$$

七、(14 分) 设  $A$  是数域  $K$  上  $n$  维线性空间  $V$  上的一个线性变换,  $I$  是恒等变换, 证明:  $A^2 = A$  的充分必要条件是  $\text{rank}(A) + \text{rank}(A - I) = n$

## 北京大学 2002 年硕士研究生入学考试试题

考试科目: 解析几何与高等代数

一、(18 分) 在空间直角坐标系中, 直线  $l_1$  和  $l_2$  分别有方程

$$\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x+y+2z+1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x+y+1=0 \\ x+3z+2=0 \end{cases}$$

(1) 求过  $l_1$  平行于  $l_2$  的平面的方程。

(2) 求  $l_1$  和  $l_2$  的距离。

(3) 求  $l_1$  和  $l_2$  的公垂线的方程。

二、(12 分) 在空间直角坐标系中, 求直线  $\begin{cases} z=3x+2 \\ z=2y-1 \end{cases}$  绕  $z$  轴旋转所得旋转曲面的方程。

三、(15 分) 用正交变换化下面二次型为标准形

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$$

(要求写出正交变换的矩阵和相应的标准形)。

四、(12 分) 对于任意非负整数  $n$ , 令  $f_n(x) = x^{n+2} - (x+1)^{2n+1}$ , 证明:

$$(x^2 + x + 1, f_n(x)) = 1$$

五、(18 分) 设正整数  $n \geq 2$ , 用  $M_n(K)$  表示数域  $K$  上全体  $n \times n$  矩阵关于矩阵加法和数乘所构成的  $K$  上的线性空间。在  $M_n(K)$  中定义变换  $\sigma$  如下:

$$\sigma((a_{ij})_{n \times n}) = (a'_{ij})_{n \times n}, \quad \forall (a_{ij})_{n \times n} \in M_n(K)$$

其中

$$a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i \neq j \\ i \cdot \text{tr}(A), & i = j \end{cases}$$

(1) 证明  $\sigma$  是  $M_n(K)$  上的线性变换。

(2) 求出  $\ker(\sigma)$  的维数与一组基。

(3) 求出  $\sigma$  的全部特征子空间。

六、(12 分) 用  $R$  表示实数域, 定义  $R^n$  到  $R$  的映射  $f$  如下

$$f(X) = |x_1| + \cdots + |x_r| - |x_{r+1}| - \cdots - |x_{r+s}|, \quad \forall X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$$

其中  $r \geq s \geq 0$ 。证明:

(1) 存在  $R^n$  的一个  $n-r$  维子空间  $W$ , 使得  $f(X) = 0, \forall X \in W$

(2) 若  $W_1, W_2$  是  $R^n$  的两个  $n-r$  维子空间, 且满足  $f(X) = 0, \forall X \in W_1 \cup W_2$

则一定有  $\dim(W_1 \cap W_2) \geq n - (r + s)$ 。

七、(13分) 设  $V$  是数域  $K$  上的  $n$  维线性空间,  $V_1, \dots, V_s$  是  $V$  的  $s$  个真子空间, 证明:

(1) 存在  $\alpha \in V$ , 使得  $\alpha \notin V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_s$ 。

(2) 存在  $V$  中的一组基  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ , 使得

$$\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\} \cap (V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_s) = \emptyset$$

## 北京大学

### 1999 年硕士研究生入学考试试题

考试科目: 数学分析

一、(15分) 判断下列命题的真( $\checkmark$ ) 伪( $\times$ ):

1. 设  $\{a_n\}$  是一个数列, 若在一子列  $\{a_{n_k}\}$  中均存在收敛子列  $\{a_{n_{k_i}}\}$ , 则  $\{a_n\}$  必为收敛列。 ( )

2. 设  $f \in C((a, b))$ , 若存在  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A < 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = B > 0$ , 则必存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) = 0$ 。 ( )

3. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界, 若对任意的  $\delta > 0$ ,  $f(x)$  在  $[a + \delta, b]$  上可积, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积。 ( )

4. 设  $f(x), g(x)$  在  $[0, 1]$  上的瑕积分均存在, 则乘积  $f(x) \cdot g(x)$  在  $[0, 1]$  上的瑕积分必存在。 ( )

5. 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 若有  $a_n \leq b_n, (n = 1, 2, \dots)$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  必收敛。 ( )

二、(40分) 求下列极限值(写出计算过程)

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x + b(1 - \cos x)}{\alpha \log(1 - x) + \beta(1 - e^{-x^2})}, (a^2 + \alpha^2 \neq 0)$

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{\sin \pi}{n+\frac{1}{n}} \right)$

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (1 - x^2)^n dx$

4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + a^n}, (a > 0)$

三、(45分) 求解下列命题:

1. 求级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} 2^n$  之和。

2. 设  $f \in C([0, 1])$ , 且在  $(0, 1)$  上可微, 若有  $8 \int_{\frac{1}{8}}^1 f(x) dx = f(0)$ , 证明: 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ 。

3. 证明: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan n}{\sqrt{n}}$  收敛。

4. 证明: 积分  $\int_0^{+\infty} x e^{-xy} dy$  在  $(0, +\infty)$  上不一致收敛。

5. 设  $u = f(x, y, z)$ ,  $g(x^2, e^y, z) = 0$ ,  $y = \sin x$ , 且已知  $f$  与  $g$  都有一阶连续偏导数,  $\frac{\partial g}{\partial z} \neq 0$ , 求  $\frac{du}{dx}$ 。

6. 设  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上二次连续可微, 且有  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$

证明: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$  绝对收敛。

## 北京大学

### 2000 年硕士研究生入学考试试题

考试科目: 数学分析

一、计算 (8 分  $\times$  5 = 40 分)

1. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2}, a > 0$$

2. 求  $e^{2x-x^2}$  到含  $x^5$  项的 Taylor (台劳) 展开式。

3. 求积分

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$$

其中  $a > b > 0$ 。

4. 求积分

$$\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha dx dy dz,$$

$V$  是实心球  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ ,  $\alpha > 0$ 。

5. 求积分

$$\iint_S x^3 dy dz + y^3 dx dz + z^3 dx dy,$$

$S$  是  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  的外表面。

二、叙述定义 (5 分 + 5 分 = 10 分)

1.  $\lim_{x \rightarrow -x} f(x) = +\infty$ 。

2. 当  $x \rightarrow a-0$  时,  $f(x)$  不以  $A$  为极限

三、(13 分) 函数  $f(x)$  到  $[a, b]$  上一致连续, 又在  $[b, c]$  上一致连续,  $a < b < c$ , 用定义证明  $f(x)$  在  $[a, c]$  上一致连续。

四、(10 分) 构造一个二元函数  $f(x, y)$ , 使得它在原点  $(0, 0)$  两个偏导数都存在, 但在原点不可微。

五、(12 分) 函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  连续, 证明不等式

$$\left[ \int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx$$

六、(7 分 + 8 分 = 15 分)

1. 在区间  $(0, 2\pi)$  内展开  $f(x)$  的 Fourier 级数:  $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$

2. 证明它的 Fourier 级数在  $(0, 2\pi)$  内每一点上收敛于  $f(x)$ 。