

沈康身 著

(三)

数学的魅力

*Beauty
of
Mathematics*



上海辞书出版社



SHUXUE DE MEILI
BEAUTY OF MATHEMATICS

我们欣赏数学，
我们需要数学。

—— 陈省身



ISBN 7-5326-1997-4



9 787532 619979 >

定价: 20.00 元

(三)

数学的魅力

*Beauty
of
Mathematics*



上海辞书出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学的魅力(三)/沈康身著. —上海:上海辞书出版社,2006.7
ISBN 7-5326-1997-4

I. 数... II. 沈... III. 数学—普及读物 IV. 01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 025814 号

责任编辑 陈为众 董 放
绘 图 朱思源 朱旭东 赵月娣
封面设计 汪 溪
版面设计 任欣伟

数学的魅力(三)

上海世纪出版股份有限公司 出版、发行
上 海 辞 书 出 版 社
(上海陕西北路457号 邮政编码 200040)
www.ewen.cc www.cihai.com.cn

上海社会科学院印刷厂印刷

开本 787×1092 1/20 印张 12.6 插页 1 字数 204 000

2006 年 7 月第 1 版 2006 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 7-5326-1997-4/O·56

定价: 20.00 元

如发生印刷、装订质量问题,读者可向工厂调换。

联系电话:021—53062398

序

江泽民同志在为《院士科普体系》所作序言中曾指出,科教兴国,全社会都应参与,科教人士更应在全社会带头弘扬科学精神,传播科学思想,提倡科学方法和普及科学知识。科学的创新和科学的普及是发展科学相辅相成的两个方面,后者是一种基本建设,有赖于科普著作的写作与出版。这事说来容易其实却极其困难,影响后世的科研名著不胜其多,但传世的科普著作却几乎绝无仅有,即是很好的说明。

科普写作之所以困难,是由于对写作者具有特殊的很高要求。首先,写作者必须对所需普及的科学知识有深刻的认识;其次对该门科学的历史发展过程也有深刻的理解。此外还需有很高的文学修养与写作水平,善于用通俗易解的笔墨来表达深奥的科学道理。正是由于这样的多面手不可多得,优秀的科学著作也就不易产生了。

但是在数学科普写作方面,特别是中国的数学史方面,沈康身教授可以说具备了以上的这些特殊要求。

沈康身教授曾将中国数学的古典名著《九章算术》译成英文。由于他对世界数学发展的渊博知识,还就这本书的内容与世界各地的历代成果进行了比较与评论。此书的英文名称为《The Nine Chapters on the Mathematical Art》,并附 Companion and Commentary,于1999年由Oxford University Press与

科学出版社联合出版,对国外颇具影响。

现在,沈康身教授又用中文写成了《数学的魅力》一书,用深入浅出、生动活泼的笔墨揭出数学的无穷魅力,反映出数学的抽象美、协调美与精确美。这将使广大青少年学生不仅学到许多课本上没有的知识,更将促使他们掌握灵活巧妙的思维方法,培养科学探索精神。特别是此书着意于比较中西各自长处,由此宣扬中算之善,尤为不可多得。

此书是一巨著,总共有四册,将在近期内陆续出版。我们期望看到《魅力》的不断涌现,并祝贺它的巨大成功。

吴文俊

2004年7月

前言

数学,是中、小学生每天学习的课程,是大学理工专业的基础课,也是今日社会、经济、生命科学、文、史、哲、体、艺术等院系的必修课,更是公民素质教育的重要内容。可是人们又常在抱怨数学枯燥乏味、难懂难学,有些人甚至丧失学习的信心。如此循环往复,影响所及,后果是可以想像的。

数学真的枯燥乏味吗?答案应该是否定的。

事实上,数学靓丽多姿,光彩照人。数学具有十分魅力,引人入胜。魅、媚、美三字同音同义,后两字是对前者最好的注解。什么是美?美是指事物具有给人愉快、欢乐的一种属性。先民会意造了美这个字:羊大则美(徐铉注汉许慎《说文解字》)。当时突出味觉,以描绘这一属性。后来社会发展,美感就延伸、扩大、渗透到方方面面,特别是意识形态之中。数学及其思想方法除了是生产技术中必不可少的工具而外,它像音乐、绘画、雕塑、建筑、诗歌等艺术作品一样充满着美:逗人爱,受人称赞,供人欣赏。

数学之美在于:

——**和谐** 和谐就是协调、统一、秩序。是指若干事物相互共处,相辅相成。一场成功的音乐会,管、弦、锣、鼓和声演出,为一好例。在数学研究中,不论空间形式或是数量关系在一定条件下所有命题、公式虽各有个性,却从无矛盾;即使条件变了,命题的形式还能通过对称、对偶、对应等手段和谐地变换着。举例说,

如果 $\triangle ABC$ 的三边长是 a 、 b 、 c ,那么面积

$$(S(ABC))^2 = \frac{1}{16} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix};$$

而如果四面体 $A-BCD$ 三棱的棱长是 $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$, $BC = l$, $CD = m$, $DB = n$, 那么体积

$$(V(A-BCD))^2 = \frac{1}{288} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l^2 & m^2 & n^2 \\ 1 & l^2 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & m^2 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & n^2 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

命题因推论、推广、开拓进入新的境界,新旧虽有区别,但仍是和谐地前后统一着。

——**简练** 数学研究避重就轻,以简取胜。千言万语说不清,讲不完;千头万绪,虽理还乱的现象,如果处理得当,用数学语言可以“一言蔽之”。数学归纳法就是典型:两句话胜过讲一万句,这当然不是笑话。当年匈牙利知名数学家厄尔多斯(Erdős Paul, 1913—1996)要测试聪明小孩波萨(Posa)的数学才华,即兴命题:“在 1 至 2 000 两千个自然数中,任取一千零一个,那么一定有两个互素。”小孩用分类方法作出满分的答卷。后人在复述这个故事时,常归结为:证两相继自然数互素。怎样证两自然数 $n, n+1$ ($n > 1$) 互素? 与其用颇费口舌的反证法,不如用我国 3 世纪时刘徽《九章·方田》注的更相减损术。只需做一次减法: $n+1-n=1$, 于是 $(n, n+1)=1$, 命题已证。难道还有比这更简练的说法吗?

——**奇巧** 许多数学现象视似无法实现,却是千真万确。事实

胜于雄辩,犹如看了一场精彩的杂技表演,梦幻成真。你能不感染其美,不为之拍案惊奇叫好吗?在数学研究中奇事特多。例如存在一条带子(牟比乌斯带),蚂蚁不经过边缘,能爬遍带子正反两面所有的点。存在一个瓶子(克莱因瓶),蚂蚁可以不经过瓶口爬遍瓶子内外两面所有的点。

为宣传数学内在的美,近年来各级学校、有关书刊、各种媒体从业人员都在认真地做好有关工作。教育部颁发的《普通高中数学课程标准》(2003)也指出,要“强调数学学科的科学价值、文化价值和美学价值”。特别是在2002年8月世界数学家大会在北京召开之际,中央电视台编制名为《数学的魅力》的十集专辑,在10频道逐集播放,有很好的社会效益,并博得很高声誉。但这一举措也有美中不足之处:其一,电视画面稍纵即逝;其二,数学大千世界非短短十集所能包容;其三,很多专题不可能在如此众多的电视观众中播放。

笔者从事数学教学多年,在教中学,教学相长,深感数学之美、之善。曾以数年之力写成《历史数学名题赏析》一书,2002年在上海教育出版社出版,尚得舆论好评和领导嘉奖。此书于1998年交稿,五年来笔者继续学习国内外有关文献,随时记录心得体会,积稿甚丰。设想有朝一日能以单篇、分册,以十集电视专辑同名为书名出版面市,作为《历史数学名题赏析》的姐妹篇,畅所欲言地以书面形式为电视专辑《数学的魅力》做好辅导和补充。总共拟分四册:图形(2册)、数量及综合(2册),每册收10篇。“中国历来是数学大国”(吴文俊语),中算源远流长,乃华夏文化殊荣之一。几乎在所有数学领域内中国数学家都有过精湛的创造发明。即使游戏笔墨、趣味数学也不例外:幻方、九连环、华容道、鲁班锁等等都久已驰誉海内外。本书将其一一安插入有关篇章、分册。乡土风味、秀色可餐,益臻数学的魅力。

2003年之春得到上海辞书出版社唐尚斌编审的引荐,承李伟国社长大力支持,接受《数学的魅力》出版。设想成真,使笔者能再次为宣传数

学之美添砖加瓦,在此由衷致谢。

笔者的儿子之璋博士经常从美国提供有关文献、信息、动向,妻子鲍靓修饰文稿、增添文采;并包揽家政,使能全力投入工作,在此一并致谢。

沈康身

2004年3月于浙江大学数学系

符号说明

$a \sim b$ ($a < b$, 都是自然数)指遍历自 a 至 b 间的自然数。年代起迄则中间用短划。

以 $[a]$ 记 a 的最大正整数部分, $\{a\}$ 记其小数部分。

$a|b$ 指 a 整除 b , $a \nmid b$ 指 a 不整除 b 。

以 $(a, b, \dots, c)$ 记自然数 $a, b, \dots, c$ 的最大公约数; 以 $\{a, b, \dots, c\}$ 记它们的最小公倍数或最小公共周期(含 $a, b, \dots, c$ 中有分数)。

以 $\min(a, b, \dots, c)$ 记 $a, b, \dots, c$ 中之最小者; 以 $\max(a, b, \dots, c)$ 记它们中之最大者。

$\lg a$ 指以 10 为底的 a 的对数, $\ln a$ 指以 e 为底的 a 的对数。

$$\operatorname{sgn} a = \begin{cases} +1, & \text{当 } a > 0; \\ 0, & \text{当 } a = 0; \\ -1, & \text{当 } a < 0. \end{cases}$$

$\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 所对边依次记为 a 、 b 、 c ; 当 $\triangle ABC$ 为直角三角形时, 直角顶点记为 C , 其短直角边(勾)、长直角边(股)、斜边(弦)依次记为 a 、 b 、 c 。

单位圆内接正 n 边形、外切正 n 边形边长分别记为 a_n 、 b_n ; 它们相应的周长记为 p_n 、 q_n 。

以 $S(ABC)$ 记 $\triangle ABC$ 的面积, 类似地记多边形及曲边形面积。

以 $V(A-BCD)$ 记四面体 $A-BCD$ 的体积, 类似地记多面体及曲面体体积。

以 $\binom{n}{m}$ 记 $\frac{n!}{(n-m)!m!}$, 其中 $m \leq n$ 。

$$g = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = 0.618\,033\,9\cdots,$$

$$\tau = \frac{1}{g} = 1.618\,033\,9\cdots。$$

目 录

前言	1
符号说明	1
一、拟柱体	1
1. 二次函数变截面立体	2
1.1 圆台和圆锥	2
1.2 球体及其部分	3
1.3 拟柱体	5
2. 古世界拟柱体大观	8
2.1 中国	9
2.2 外国	15
习作与思考	22
参考文献	23
二、面积与拼补相等	25
1. 面积相等的两多边形拼补相等	26
1.1 出入相补、以盈补虚	26
1.2 鲍耶定理	26
2. 体积相等的两多面体拼补相等吗	30
2.1 问题的提出和发展	30
2.2 哈德威格定理	31
2.3 德恩定理的推导	32

3. 图形的度量	34
3.1 平面图形的面积	34
3.2 空间图形的体积	35
3.3 历史上东、西方的体积论	36
习作与思考	43
参考文献	44

三、正多面体作法历史演进

——这长长两千年的知识链	46
1. 欧几里得	47
2. 帕普斯	54
3. 文艺复兴三杰	57
4. 梅文鼎	59
习作与思考	61
参考文献	62

四、宇宙的和谐

——正多面体互容的探讨	64
1. 正多面体互容问题分析	65
1.1 引理	65
1.2 定理	67
2. 正多面体互容问题探源	78
2.1 西方	78
2.2 中国	79
习作与思考	87
参考文献	87

五、阿基米德体

——正多面体的拓广(上)	89
1. 阿基米德体有十三种	89
1.1 阿基米德体构造法	90
1.2 阿基米德体研究探源	95
2. 阿基米德体只有十三种	97
2.1 欧拉定理	97
2.2 阿基米德体只有十三种的证明	100
2.3 四种变体	103
3. 阿基米德体中的几何参数	104
4. 正多边形覆盖平面	105
5. 多面体填满空间	108
5.1 正多面体填满空间	108
5.2 阿基米德体填满空间	108
5.3 正多面体和阿基米德体组合填满空间	109
习作与思考	109
参考文献	110

六、循环、对称、对偶

——文学与数学联姻	112
1. 文学中的回文、对句	112
1.1 文学中的回文	112
1.2 文学中的对句	113
2. 数学中的循环、对称现象	116
2.1 循环小数	116
2.2 $3n-1$ 的怪圈	123

2.3 加法的回文现象	124
2.4 循环素数和回文素数	125
3. 数学中的对偶现象	125
3.1 平面	126
3.2 空间	128
3.3 三角	131
习作与思考	131
参考文献	132

七、卡特朗体

——阿基米德体的对偶体	133
1. 概述	133
1.1 简史	133
1.2 与阿基米德体的对偶关系	134
1.3 构造方法	135
2. A_i 及其对偶体 $C_i (i=1, 2, \dots, 13)$	142
2.1 $(3.6^2), A_1, C_1$	143
2.2 $(3.4.3.4), A_2, C_2$	145
2.3 $(4.6^2), A_3, C_3$	147
2.4 $(3.8^2), A_4, C_4$	149
2.5 $(3.5.3.5), A_5, C_5$	151
2.6 $(5.6^2), A_6, C_6$	153
2.7 $(3.4^3), A_7, C_7$	155
2.8 $(3^4.4), A_8, C_8$	157
2.9 $(3.10^2), A_9, C_9$	159
2.10 $(3.4.5.4), A_{10}, C_{10}$	160

2.11	$(4.6.8), A_{11}, C_{11}$	162
2.12	$(3^4.5), A_{12}, C_{12}$	164
2.13	$(4.6.10), A_{13}, C_{13}$	166
习作与思考		168
参考文献		169

八、靓丽的星体

——正多面体的拓广(下)		170
1.	星形和星体	170
1.1	星形构造法	170
1.2	星体构造法	171
2.	开普勒-普安索星体	174
2.1	小星状正十二面体	176
2.2	大正十二面星体	177
2.3	大星状正十二面体	179
2.4	大正二十面星体	181
3.	其他星体	184
3.1	梅文鼎-孔林宗星体	184
3.2	立方体、正八面体相交的星体	185
3.3	正二十面体与正十二面体相交的星体	185
3.4	大星状正二十面体	185
习作与思考		186
参考文献		187

九、蜜蜂的智慧

——一个数学极值问题		188
1.	平面问题	188