

报考高等职业院校数学复习与训练

上海东方激光教育文化有限公司 组编

数 学

复习指导 (上册)

◁ 第一轮复习用 ▷

已连续六版获最高销量

今年第 7 版 ...

JJ006

中国三峡出版社

三校生

——
相约在高职

报考高等职业院校数学复习与训练

数学复习指导 (上册)

第一轮复习用

● 上海东方激光教育文化有限公司 组编

报考高等职业院校复习丛书编委会

主 任	孙 炜			
副 主 任	何学仪			
顾 问	金旦生			
编 委	卢树达	陈 瑜		
学科主编	张义军			
编 者	刘广渝	冯 杰	臧林法	
	徐仁安	蒋荣华	肖丽萍	

中国三峡出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

报考高等职业技术学院数学复习与训练. 1, 数学复习指导. 上册
/ 上海东方激光教育文化有限公司 组编.

— 北京: 中国三峡出版社, 2005. 7

ISBN 7-80099-786-3

I. 报… II. 上… III. 数学课 - 高等学校: 技术学校 - 入学考试
- 教学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 073827 号

责任编辑 马文晓

特约编辑 苏宁萍 陈瑜

中国三峡出版社出版发行

(北京市海淀区太平路 23 号院 12 号楼 100036)

电话: (010) 68218553 51933037

<http://www.e-zgsx.com>

E-mail: sanxiaz@sina.com

上海交大印务有限公司印制 新华书店经销

2005 年 7 月第 1 版 2005 年 7 月第 1 次印刷

开本: 787×1092 毫米 1/16 印张: 50 字数: 1200 千字

ISBN 7-80099-786-3

定价: 68.00 元 (全四册)

序

根据《面向 21 世纪中国教育行动计划》，国家正在积极发展高等职业教育，构建各类相互沟通的“立交桥”。上海的各类职业学校（中专、职校和技校）的毕业生和普通高中毕业生一样，也可以报考普通高等学校。这样，“三校生”也有了接受高等教育、提高素质的通道，这对我国培养大批优秀人才和高素质的劳动者，加快提高综合国力，迎接新世纪挑战，具有十分重要的意义。

原上海市市长徐匡迪早在上个世纪 90 年代初，就提出我国教育要大力发展职业技术教育。职业技术教育是支撑我国现代化建设的一个重要支柱，他形象地描述：我国教育要形成“门”字形框架结构，一条是普通教育，一条是职业技术教育。目前，职业技术教育这一条腿，太细，今后职业技术教育要加强、加大、加粗，与普通教育形成相适应的教育，逐步建立与我国社会经济发展相适应、有中国特色的教育体系。目前，全国共有独立设置的普通高等职业院校 908 所，占会国普通高校总数的 58.5%。上海高等职业学校的新体系是逐步发展形成的：1994 年在市政府主管行政部门积极扶持下，进行对“毕山”等几所艺术类中专、职技的优秀毕业生框考高等艺术类学技的试点，得到方方面面的称赞，获得成功。1997 年，上海第二工业大学、同济大学等院技经过正式批准，举办高等职业教育，招收应届高中、中专和职技校的毕业生。1999 年，全国高等职业技术学院招收 10 万余人，上海招收 8000 余人，其中 3000 多名是从报者的三校生中挑选的，这在上海教育史上也是破天荒的第一次；2000 年，超过了 9000 多人；2001 年，录取了 13000 多人；2003 年，在“三校生”中录取高职（大专）生 16000 多人；2004 年三校生高者录取 14000 多人；2005 年计划招生与 2004 年早基木特早，为 1.4 万人。

大力发展高等职业教育，形成第一线高层次技术应用人才的培养机制，在上海已成格局。从招生政策、学籍和户籍管理、毕业证书、就业政策等方面，大专与高职都“一体化”了，上海从名牌大学到民办大学都向“三校生”开放，已建我 15 所独立设置的高等职业技术学院。目前，上海高职（大专）在校生已达 15.5 万人，已占整个高等教育在技生总数的 41% 以上；已建设 10 个实训基地，改变普进高校传统的学科本位的框式，培养和训练学生的综合职业能力，从而培养和选就新一代的高层次、高素质的应用型、操作型的技术人才。

世界上发达国家，高等职业教育已到“半壁江山”的地位，如美国在 20 世纪 80 年代本，社区大学占会部高校的三分之一，而它的在校生却占到全部大学

生的一半；加拿大的高中生 28%进社区学院，只有 23%进大学。我国国务院、教育部最近发文规定：凡今后省市批准的大专层次的高校，一律要用“职业技术学院”名称。上海市政府已经批准成立了一批高等学校，全部定名职业技术学院。

从近几年看，三校生入学考试的成绩每年都有提高，但从语文、数学、外语三门基础学科的考试来看，总体上与普通高中比较悬殊还是相当大的。在这样的一种背景下，上海许多中专、职校和技校的领导、教师认为必须重视三校生的基础教育的质量，要重点抓好作为中等职业教育中文化教育的语文、数学、外语基础课的教学。这次以上海化工教育培训中心的骨干教师为主，部分中专、职校第一线的高级教师与大学教授、专家参与，共同研究、探讨，从实际出发，第七次改版编写了《报考高等职业技术学院教复习丛书》，旨在弥补学生以往知识上的缺陷，给以“拾遗补缺”。由于中专职校学校在以往教学中往往各有侧重，故应针对学生素质教育中的薄弱部分进行必要的补充、强化，要紧扣教育部门编写的大纲，紧扣教材，抓住基础概念和基本方法进行教育。同时，此书也可作为历届三校生参加高职考试的同学的复习量料。我认为，编辑这样一套丛书，是一桩有益的事，是一件值得进一步报索研究的工作。

《报考高等职业技术学院复习丛书》(三校生——相约在高职)有较强的应试针对性，这是一个亮点，已在上海近 200 所中等职业类学校中形成强烈的反响，得到数万毕业生的欢迎。对广大欲进一步深造的三校优秀毕业生来说，在知识的整理、巩固、提高方面，无疑是有帮助的。为此，编者在广泛听取意见的基础上，依据上海市教育考试院新编的升学考试大纲，作了第七次修改，突出了重点，加强了能力要求的训练，在各方面作了许多努力，这都为进一步提高丛书的质量打下了坚实的基础。

本套丛书新版的编辑，根据这几年来三校生升高等职业学院考试大纲的变化，以及这几年来高考重视能力的考核，如语文卷的文字信息处理能力，数学卷的重视考查学生发散性的思维、空间想象能力等，进行了一些改革与报索，题型也已作了相应的调整，复习丛书在“精心设计”、“积报诱导”等方面作了许多创造性的努力，这都是有益的导向，是值得庆幸的好事。

祝愿我们的三校毕业生，在步入人生的新阶段，对于自己的理想与未来所从事职业的初选中，获圆满成功！

金旦生

(金旦生同志是原上海市教育考试院副院长)

前 言

近年来，上海市高等职业技术学院的数量和发展规模在不断增加和扩大，招生人数亦颇具规模，而且国家建设、经济发展对高等职业技术人才（即“灰领”）的需求越来越紧迫。面对如此良好形势，“中职生”高考前的复习指导就显得非常重要。在众多的复习指南参考资料中，《三枝生——相约在高职》复习用书，因其资料齐全、内容详实、实用性强等特点，多年来一直受到各学校的考生及任课教师的认可和好评，已六次改版并再版，销量名列同类辅导用书的前茅，占此类辅导用书市场达90%以上份额。

为更好地服务于考生及广大读者，满足学习与教学的需要，我们在广泛征求专家及用书学生和教师的意见，在保留原有特点的基础上，依据上海市2005年高等职业技术学院招生考试大纲的要求，对数学复习用书（第六版）的相关内容作了相应的修改，进一步增加了教材的实用性，提高了教材的参考价值，使此次改版后的教材更加贴近中等职业技术学校学生的实际水平，不仅可以作为高职考生的数学复习用书，也可作为中职学校的数学用书，还可作为各类中专、中职学生的参考用书。

此次改版后的数学复习用书仍然分上、下两册及配套的测试卷。

在上册的卷首，是2005年的上海市三校生高考数学试卷及对试卷的详解分析，以帮助学生了解并掌握高考数学试题的知识结构及知识体系，及对掌握复习的重点和难点，为2006年的高考作知识准备及预测。

上册共有十五章复习内容，每章以“节”为单元对知识点分类梳理，使各个知识点在衔接上更具合理性和系统性，更利于读者对数学知识的认知及掌握规律。

每章之首设有【考试要术】，每章之末设有【知识点自测】及【综合训练】等栏目，具体说明如下：

【考试要术】本栏目摘录了《考试大纲》对本章的具体要求。

【知识点自测】本栏目是对该章的基本知识和基本内容进行梳理而编制的自我测试题。

【综合训练】本栏目是将本章各节的知识点串联起来，根据本章及本章以前各章的基础知识和基本要求，而编制出来的综合练习题，根据题目的难易度，知识点的分布分为A、B两套。综合练习A注重基础知识的训练，综合练习B注重基本知识及基本技能的训练，难度较A组练习略有增加，以方便读者对求

章内容掌握情况的自我检查。

本次改版对综合训练 A 与 B 中的题目数量和难易度也作了相应的调整。

每节分别设有以下栏目：

【复习重点】根据考试大纲的要求，将本节知识点的复习要求划分为了解、理解、掌握、运用等几个层次。

【知识点导读】对本节的重要知识点，概念、公式、性质、法则等内容作提纲挈领的诠释，以达到温故之目的。

【范例及解题通法】精选了适量典型类型、具有代表性、适合于“三校生”的实际情况的范例，对每一例题，视其难易度均设有“分析”、“解”，题后设有“名师点提”。对例题进行分析，帮助读者弄清题意，寻求解决问题的方法。解答过程力求做到精炼、规范、步骤清晰，重点突出，参考性强，对某些题目，还采取了一题多解的方法，以帮助读者掌握知识，掌握分析问题和解决问题的不同方法和进径，开阔思路，使读者由“学会”升华至“会学”，为读者今后的进一步学习与发展，打下一个良好的基础。最后对例题中的重点、难点及例题所涉及的相关内容、知识点、其它的解法等作了必要的归纳点拨。这次改版对上一版中较难的例题作了删除和修订。

【课堂练习】此次改版每节新增加了课堂练习题三道。其中第 1、2 两题较为简便，第 3 题略有梯度，便于教师上课时引导学生练习。

【基础训练】根据每节知识内容，编制了与之匹配的练习题。

下册内容分三大部分。第一部分是在教与学的过程中应用广泛的四个数学专题，并配以相应的练习题；第二部分是以章为单位的强化练习题，以帮助读者系统地掌握数学基础知识，进一步提高学生分析问题解决问题的能力。书的最后是上下册所配基础训练及综合训练题目的详细解答。

另外，结合上、下册的有关章节，我们还配有相应的同步测试卷，以备学生平时练习之用，也可用作学生的随堂作业。

此次改版，第一、二、三章由刘广渝、肖丽萍编写，第四、五章由冯杰编写，第六、七章由臧林法编写，第八、九、十、十一章由张义军编写，第十二、十三章由徐仁安编写，第十四、十五章由将荣华编写，会书由根义军统稿。

由于时间紧迫，编者的认识所限，书中难免还存在着诸多不足之处，敬请读者批评指正，以利进一步修订及完善。

丛书编委会

E-mail: 021dongfang@sina.com

2005 年 6 月

目 录

2005年“三校生”高考数学命题特点分析	1
2005年上海市高等学校招收“三校生”统一考试数学试卷及评分标准	3
第一章 数、式、方程和方程组	7
第二章 集 合	22
第三章 不等式	32
第四章 函 数	48
第五章 指数函数与对数函数	76
第六章 三角比	96
第七章 三角函数	119
第八章 数 列	132
第九章 平面向量初步	156
第十章 复 数	167
第十一章 排列、组合与概率	187
第十二章 空间直线、平面	204
第十三章 多面体与旋转体	230
第十四章 坐标平面上的直线	243
第十五章 圆锥曲线	261
打击盗版 举报有奖	302

2005年“三校生”高考数学命题特点分析

2005年数学科考试大纲规定:数学科考试注重考查基础知识、基本技能和思维能力、运算能力、空间想像力以及分析问题和解决问题的能力,做到既要有利于高校选拔合格的新生,又要有利于中等职业学校数学科的教学改革,提高教学质量。

综观2005年的数学高考试卷,基本反映了大纲的要求,难度比较适中,贴近中等职业学校的实际情况,试题有一定的坡度,区分度也较好,试题的形式也有新意,深入分析2005年的试卷,有以下几个显著的特点。

1. 试卷结构稳定

从2001年以来这五年的试卷情况来看,全卷满分分值100分,三类题型(填空、选择、解答题)结构保持不变,试题总量(20题)以及各类题型的题量及分值保持不变,考试时间100分钟,应用题与中等职业学校的学生的实际水平相吻合,考查学生读图及建模的能力,淡化了“压轴题”,变以往考试中的一题把关为多题把关,降低难度。

2. 注重基础知识、基本技能的考核,不考偏题、怪题

从2005年高考试卷来看,容易题及中等题所占的比率为大多数,如试题中,第1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、13、15、18等题仅考查学生一个或两个知识点,运算过程也比较简便。

3. 考查全面、覆盖面广

2005年《数学考试大纲》中所规定的十四方面的教学内容,在2005年的高考试题中都有反映。

4. 突出数学教学的重点内容

函数、不等式、数列、复数、向量、直线与平面、圆锥曲线等是中等职业学校数学教学的重点内容,这些内容与大学教材接轨,也是学生升入大学继续学习数学的基础,在2005年高考试卷中,这些内容也作为考查的重点。

5. 代数、立体几何、解析几何三者比例恰当

2005年数学考试大纲规定:数学各部分内容在试卷中所占的比例为,代数70%左右,立体几何10%左右,平面解析几何20%左右,2005年的数学试卷各部分内容的比例基本符合考试大纲的要求,下表给出了2001~2005年试题中代数、立体几何、解析几何三者所占比例的对照表,供读者参考。

	代数(含三角)		立体几何		解析几何	
	考分	占满分比例	考分	占满分比例	考分	占满分比例
2001年	62	62%	12	12%	26	26%
2002年	59	59%	10	10%	21	21%
2003年	69	69%	10	10%	21	21%
2004年	69	69%	10	10%	21	21%
2005年	65	65%	13	13%	22	22%

6. 逐步加强对学生能力和数学思想方法的考查

在加强对考生基础知识和基本技能考查的同时,更注重了对学生思维能力、运算能力、空间想像能力以及分析问题和解决问题的能力及数学思想方法的考查,数学基本思想主要指函数和方程的思想、数形结合的思想、分类讨论的思想和等价转换的思想,在2005年的高考试题中第3题、第11题考查学生理解抽象函数性质的能力,第19题考查学生数学建模能力,即如何将实际生活问题转换成一个数学问题,第20题为考查学生数形结合能力的试题,分值为12分,占整个试卷比例高达12%,这一点充分说明对学生能力和数学思想方法的考查,已经越来越受到重视。

附表:2001年~2005年主要知识点考查及分值情况表

知识点	集合	解不等式	函数	指数对数	开放题	三角变换	立体几何	向量	直线、圆	圆锥曲线	复数	数列	排列、组合、概率	实际应用题	充要条件
填空题	01			1 (3)	1 (3)	2 (6)		1 (3)		1 (3)	1 (3)		1 (3)		
	02	1 (3)	1 (3)	1 (3)	1 (3)	1 (3)				1 (3)			1 (3)		
	03	1 (3)	1 (3)	2 (6)	1 (3)		1 (3)		1 (3)				1 (3)		
	04	1 (3)	1 (3)	2 (6)					1 (3)	1 (3)	1 (3)		1 (3)		
	05	1 (3)		1 (3)	1 (3)			1 (3)	1 (3)	1 (3)	1 (3)		1 (3)		
选择题	01		1 (3)		1 (3)	1 (3)	1 (3)		1 (3)		1 (3)				
	02			1 (3)		3 (9)			1 (3)	1 (3)					
	03			2 (6)		1 (3)			1 (3)	1 (3)					1 (3)
	04			3 (9)		1 (3)				1 (3)					1 (3)
	05			3 (9)					2 (6)						1 (3)
解答题	01	1 (8)					1 (9)		1 (8)	1 (12)		1 (12)		1 (9)	
	02						1 (10)	1 (7)		1 (12)	1 (10)	1 (12)		1 (7)	
	03						1 (10)	1 (10)		1 (12)	1 (8)	1 (8)		1 (10)	
	04					1 (8)	1 (10)	1 (10)		1 (12)		1 (8)		1 (10)	
	05		1 (8)			1 (8)				1 (10)	1 (8)	1 (12)		1 (10)	

说明:①表中所示的数字为试卷中的试题数,括号内为分值.

②试卷中的每道题并非仅考查一个知识点,仅以考查的主要知识点为依据.

③有些知识点未列入上述表格中.

2005年上海市高等学校招收“三校生”统一考试

数学试卷

一、填空题(本大题满分24分)本大题共8题,只要求直接填写结果,每个空格填对得3分,否则一律得零分

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 2\}$, $B = \{x \mid |x| < 1\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
2. 方程 $5^{\cos x} = 1 (0 \leq x \leq \pi)$ 的解为 _____.
3. 设 $f(x)$ 是以2为周期的周期函数, 当 $x \in (-1, 1]$, $f(x) = x^2$, 则 $f(2) =$ _____.
4. 已知向量 $\vec{a} = (1, 3)$, $\vec{b} = (3, 4)$, 记 \vec{a}, \vec{b} 的夹角为 θ , 则 $\cos\theta =$ _____.
5. 以点 $(-1, 3)$ 为圆心, 过点 $(1, 2)$ 的圆的方程为 _____.
6. 已知抛物线 $y^2 = ax$ 的焦点坐标为 $(-4, 0)$, 则常数 $a =$ _____.
7. 若将边长为1的正方形绕其一边旋转一周, 则所得空间图形的体积为 _____.
8. 有4名计算机专业和5名数学专业的学生报名参加数学建模比赛, 需要其中3名学生组成一个参赛队, 要求该队中计算机专业和数学专业的学生至少各有1名, 则共有 _____ 种不同的组队方式(结果用数值表示).

二、选择题(本大题满分18分)本大题共6题, 每题都给出代号为A、B、C、D的四个结论, 其中有且只有一个结论是正确的, 必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内, 选对得3分; 不选、错选或者多选(不论是否写在圆括号内), 一律得零分

9. 设 l_1, l_2 为空间两条直线, 命题 I: l_1 与 l_2 不平行; 命题 II: l_1 与 l_2 异面, 则命题 I 为命题 II 的 ()
A. 充分非必要条件
B. 必要非充分条件
C. 充要条件
D. 既非充分又非必要条件
10. 直线 $\frac{x}{3} + \frac{y}{\sqrt{3}} = 1$ 的倾斜角为 ()
A. $\frac{\pi}{6}$
B. $\frac{2\pi}{3}$
C. $\frac{5\pi}{6}$
D. $\frac{7\pi}{6}$
11. 设 $f(x)$ 为偶函数, 则函数 $xf(x)$ 的图象关于 ()
A. 原点对称
B. x 轴对称
C. y 轴对称
D. 直线 $y = x$ 对称
12. 已知 $x^2 + y^2 = a^2 (a > 0)$, 则 $|xy|$ 的最大值为 ()
A. a^2
B. $\frac{a^2}{2}$
C. $\frac{a^2}{4}$
D. $\frac{\sqrt{2}a^2}{2}$
13. 已知函数 $f(x) = x^2 + bx (b \in \mathbf{R})$ 在 $[-1, +\infty)$ 上单调增加, 则 b 的值可以为 ()
A. -2
B. -1
C. 1
D. 2
14. 直线 $ax - y + 5 = 0$ 过点 $P(a, b) (a, b \in \mathbf{R})$, 且与直线 $2x - y - 3 = 0$ 平行, 则点 P 的坐标为 ()
A. $(2, 9)$
B. $(2, 7)$
C. $(2, -7)$
D. $(2, -9)$

三、解答题(本大题满分58分)本大题共6题, 解答下列各题必须写出必要的步骤

15. (本题满分8分)

求不等式 $\lg(x-2) + \lg(4-x) < 0$ 的解集.

16. (本题满分8分) 其中每小题满分各为4分

在锐角 $\triangle ABC$ 中, $\frac{AC}{BC} = \frac{3}{2}$, $\angle B = \frac{\pi}{3}$, 求

- (1) $\angle A$ 的大小(结果用反三角函数表示);
- (2) $\sin(A + \frac{\pi}{4})$ 的值.

17. (本题满分为10分) 其中每小题满分各为5分

已知 $x, y \in \mathbf{R}$, i 为虚数单位, 复数 $z = x + yi$, $z_1 = 4x + (10 - 2y)i$, $z_2 = 2y - 6xi$, 且 $z_1 = \bar{z_2}$.

(1) 求复数 z ; (2) 写出复数 $z_1 - 2z$ 的三角形式.

18: (本题满分10分) 其中每小题满分各为5分

已知椭圆 C_1 的中心在原点, 焦点在 y 轴上, 若椭圆 C_1 上的点到原点的最长距离为5, 最短距离为4.

(1) 求椭圆 C_1 的标准方程;

(2) 若一个顶点为 $M(0, 2)$ 的双曲线 C_2 与椭圆 C_1 有公共的焦点, 求双曲线 C_2 的标准方程及它的渐近线方程.

19. (本题满分10分) 其中每小题满分各为5分

某公司要安置一根垂直于墙面的杆子 AB 悬挂广告牌, 端点 B 固定在墙面上, C, D 为墙面上位于同一水平线的两个固定点, 用绳子紧紧连接 AC, AD ($AC = AD$) (如图1), 若杆子 AB 的长度为1米, 点 C, D 间的距离为2米, 端点 B 到直线 CD 的距离为 $\sqrt{2}$ 米, 求

(1) 绳子 AC 的长度;

(2) 绳子 AC 与墙面所成角的大小.

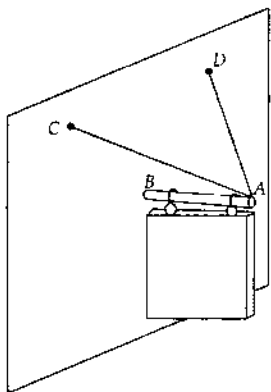


图1

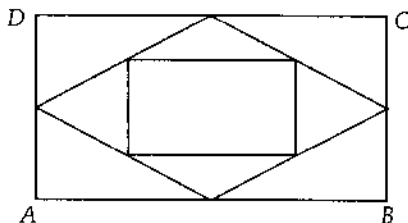


图2

20. (本题满分12分) 其中第(1)小题满分为4分, 第(2)小题满分为3分, 第(3)小题满分为5分

已知矩形 $ABCD$, $AB = 2AD = 2a$ ($a > 0$), 连接四条边的中点成一个新的四边形, 记其面积为 b_1 , 然后在得到的四边形中, 再连接四条边的中点又成一个新的四边形, 如图2, 记其面积为 b_2 ; 按此方法依次做下去, \dots .

(1) 求 b_1 和 b_2 ;

(2) 记 b_n 为第 n 次 ($n \in \mathbf{N}^*$) 得到的四边形的面积, 写出 b_n 关于 n 的表达式 (不必证明);

(3) 求经过 n 次 ($n \in \mathbf{N}^*$) 后所得 n 个四边形的面积之和.

2005 年上海市高等学校招收“三校生”统一考试

数学试卷答案要点及评分标准

一、填空题(本大题满分 18 分) 本大题共 8 题,每一题填对得 3 分,否则一律得零分

1. $\{0\}$; 2. $x = \frac{\pi}{2}$; 3. 0; 4. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$; 5. $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$; 6. -16; 7. π ; 8. 70

二、选择题(本大题满分 18 分) 本大题共 6 题,每一题选对得 3 分,否则一律得零分

9. B 10. C 11. A 12. B 13. D 14. A

三、解答题(本大题满分 58 分) 本大题共 6 题

15. (本题满分 8 分)

【解】 由 $\begin{cases} x-2 > 0 \\ 4-x > 0 \end{cases}$ 得 $2 < x < 4$, 3 分

又 $\lg(x-2)(4-x) < 0$, 得 $(x-2)(4-x) < 1$ 5 分

即 $x^2 - 6x + 9 > 0$, 亦即 $(x-3)^2 > 0$, 得 $x \neq 3$ 7 分

\therefore 所求解集为 $\{x \mid 2 < x < 4 \text{ 且 } x \neq 3\}$ 8 分

16. (本题满分 8 分)

【解】 (1) $\sin A = \frac{BC}{AC} \sin B$ 2 分

$= \frac{2}{3} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 3 分

$\because \angle A \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\therefore \angle A = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$; 4 分

(2) $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 5 分

$\sin(A + \frac{\pi}{4}) = \sin A \cos \frac{\pi}{4} + \cos A \sin \frac{\pi}{4}$

$= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ 7 分

$= \frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{3}}{6}$ 8 分

17. (本题满分 10 分)

【解】 由 $z_1 = \bar{z}_2$, 得 $\begin{cases} 4x = 2y \\ 10 - 2y = 6x \end{cases}$, 3 分

解得 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$, 4 分

$\therefore z = 1 + 2i$; 5 分

(2) $z_1 - 2z = 4 + 6i - 2 - 4i$ 6 分

$= 2 + 2i$ 7 分

$= 2\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$ 10 分

18. (本题满分 10 分)

【解】 (1) 由题意, $a = 5, b = 4$, 2 分

则所求椭圆 C_1 的标准方程为: $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1$; 5 分

(2) 由题意得, 双曲线 C_2 的半实轴 $a = 2$; 6 分

由于双曲线 C_2 与椭圆 C_1 有公共的焦点, 则 $c = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$; 7 分

从而双曲线 C_2 的半虚轴 $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$; 8 分

则双曲线 C_2 的标准方程为 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$; 9 分

相应的渐近线方程为 $y = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}x$ 10 分

19. (本题满分 10 分)

【解】 (1) 取线段 CD 的中点 E , 连接 AE, BE .

$\because AD = AC, \therefore AE \perp CD$,

$\because AB$ 垂直于墙面, $\therefore BE \perp CD$ 3 分

由题意得, $BE = \sqrt{2}$ 米,

在 $Rt\triangle ABE$ 中, $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}$ 米, 4 分

在 $Rt\triangle ACE$ 中, $AC = \sqrt{AE^2 + \frac{CD^2}{4}} = \sqrt{3 + 1} = 2$ 米, 5 分

即绳子 AC 的长度为 2 米.

(2) 连接 BC , $\because AB$ 垂直于墙面, $\therefore \angle BCA$ 为绳于 AC 与墙面所成的角. 6 分

在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\sin \angle BCA = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$, 8 分

得 $\angle BCA = \frac{\pi}{6}$ 10 分

20. (本题满分 12 分)

【解】 (1) 第一次所得四边形的面积 $b_1 = a^2$, 2 分

第二次所得四边形的面积 $b_2 = \frac{a^2}{2}$; 4 分

(2) 第 n 次所得四边形的面积 $b_n = \frac{a^2}{2^{n-1}}, n \in \mathbf{N}^*$; 7 分

(3) 由(2) 得, $q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{2}, n \in \mathbf{N}^*$, 8 分

则数列 $\{b_n\}$ 是以 $b_1 = a^2$ 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列, 10 分

所以经过 n 次 ($n \in \mathbf{N}^*$) 后所得 n 个四边形的面积之和

$$S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = a^2 \left(\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2a^2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right). \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

第一章 数、式、方程和方程组

本章的内容是初中数学的部分基础知识,虽在《考纲》中未作具体要求,但在学习过程中经常要遇到这些相关的知识,鉴于“三校生”的数学基础的实际情况,故补充本章内容.

§ 1.1 数与式

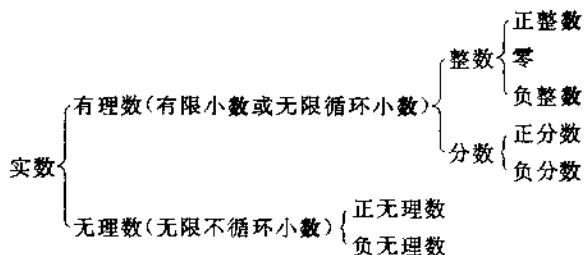
【复习重点】

- 一、理解有理数、实数及数轴、相反数、绝对值、倒数、算术平方根的概念,会进行有关计算.
- 二、理解正整数中质数、合数等有关概念.
- 三、理解有关整式、分式、二次根式的概念,掌握它们的性质和运算法则.
- 四、掌握常用的多项式因式分解的方法,会对二次根式进行分母有理化.

【知识点导读】

一、实数

1. 实数系表



2. 数轴 规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴。(图 1-1)

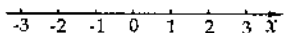


图 1-1

实数与数轴上的点是一一对应的,即数轴上每一个点表示唯一的一个实数;反过来,每一个实数可用数轴上唯一的一个点来表示,原点对应实数“0”.因此,我们有时也把“实数”与“数轴上的点”不加区别.数轴上的任一点所对应的数总大于该点左边任一点所对应的数.

3. 相反数 符号不同的两个数 a 与 $-a$ 中的一个数称为另一个数的相反数,即 $-a$ 是 a 的相反数, a 是 $-a$ 的相反数,零的相反数是零.

4. 绝对值 一个正数的绝对值是它本身;一个负数的绝对值是它的相反数;零的绝对值是零.即

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

在数轴上,一个实数的绝对值表示这一实数的点到原点的距离.显然任何一个实数的绝对值都是一个非负数.(大于零或等于零).

由绝对值的概念可得

$$|a| \geq a \Rightarrow \begin{cases} |a| = a & (a \geq 0) \\ |a| > a & (a < 0) \end{cases}$$
$$|ab| = |a| |b|, \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$$

5. 倒数 1 除以某数的商称为这个数的倒数, 零没有倒数.

6. 平方根 如果一个数 x 的平方等于 a , 即 $x^2 = a$
则称 x 为 a 的平方根或二次方根.

正数 a 的平方根有两个, 它们互为相反数, 即 $\pm\sqrt{a}$, 其中 \sqrt{a} 又称为算术平方根.

7. 质数与合数 质数: 除 1 以外只能被 1 和它本身整除的正整数叫做质数. 质数的个数是无限的; 最小的质数是 2.

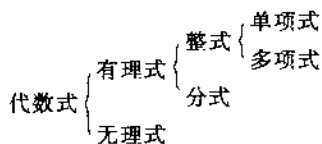
合数: 不仅能被 1 和它本身整除, 而且还能被其它正整数整除的正整数叫做合数. 最小的合数是 4.

注意: 1 既不是质数, 也不是合数.

二、式

1. 代数式 由运算符号(加、减、乘、除、乘方、开方)把数或表示数的字母连结而成的式子叫做代数式. 单独的一个数或一个字母也是代数式. 用数值代替代数式中的字母, 计算后所得的结果叫做代数式的值.

2. 代数式的分类



3. 整式

(1) 概念: 由字母与数字相乘而成的代数式叫做单项式; 几个单项式的和, 叫做多项式; 单项式和多项式统称整式.

(2) 整式的运算:

整式的加、减法主要是去括号, 合并同类项, 其结果仍是整式; 整式的乘除法运算的基础是幂的运算法则及乘方公式.

(3) 幂的运算法则:

设 m, n 都是正整数.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (ab)^n = a^n b^n$$

(4) 常用的乘法公式:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3 \quad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

4. 多项式的因式分解 把一个多项式化成几个整式的积的形式叫做多项式的因式分解. 因式分解与多项式乘法是互逆的一种恒等变形. 因式分解的常用方法: 提取公因式法; 公式法; 分组分解法; 十字相乘法; 求根公式法等.

5. 分式

(1) 分式的概念:

形如 $\frac{A}{B}$ (其中 B 是含有字母) 的式子叫做分式. 这里 A, B 为整式, 且 $B \neq 0$.

(2) 基本性质:

$$\frac{A}{B} = \frac{A \times M}{B \times M}, \quad \frac{A}{B} = \frac{A \div M}{B \div M} \quad (M \text{ 为不等于零的整式})$$

(3) 符号法则:

$$\frac{-A}{B} = \frac{A}{-B} = -\frac{A}{B} = -\frac{-A}{-B}$$

(4) 分式的运算:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{db} = \frac{ad \pm bc}{bd} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

6. 二次根式

(1) 概念:

式子 \sqrt{a} ($a \geq 0$) 叫做二次根式.

二次根式 \sqrt{a} ($a \geq 0$) 就是 a 的算术根的表达式.

最简二次根式: ① 被开方数的每一个因式的指数都小于根指数 2; ② 被开方数不含分母的二次根式, 叫做最简二次根式.

同类二次根式: 几个二次根式化成最简二次根式后, 如果被开方数相同, 这几个二次根式叫做同类二次根式.

(2) 二次根式的运算:

二次根式的加减: 先把各根式化为最简二次根式, 然后分别合并同类根式.

二次根式的乘除法: 按下列性质进行

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}, (a \geq 0, b \geq 0) \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, (a \geq 0, b > 0)$$

说明: 二次根式运算的最后结果都要化为最简二次根式.

(3) 有理化因式:

两个含有二次根式的代数式相乘, 若它们的积不含二次根式, 则称这两个代数式互为有理化因式.

(4) 分母有理化:

如果代数式的分母含有二次根式, 用分母的有理化因式同乘分子与分母, 将分母化为有理式的变形过程, 叫做分母有理化.

7. 常用的非负数的关系式

设 a 是实数, 则

$$(1) |a| \geq 0, \quad a^2 \geq 0, \quad a^{2n} \geq 0 (n \in \mathbf{N}^+)$$

$$(2) a \geq 0, \quad \text{则} \sqrt{a} \geq 0, \quad \sqrt[n]{a} \geq 0 (n \in \mathbf{N}^+)$$

$$(3) \sqrt{a^2} = |a| \quad \sqrt[n]{a^{2n}} = |a|$$

(4) n 个非负数之和仍是非负数.

(5) n 个非负数的和为零, 则各个非负数为零.

【范例及解题通法】

【例 1】下列数中哪些是无理数、有理数、整数、正整数?

$$-\frac{1}{5}, 0, \frac{9}{11}, -\sqrt{5}, -\sqrt{9}, \sqrt[3]{-27}, \pi, \sqrt{(-3)^2}, \sqrt{|-3|}$$

分析 可以按实数分成“无限不循环小数”与“有限小数或无限循环小数”这两类来判断. 如果所给的数是前者, 则它为无理数, 如果所给的数是后者, 则它为有理数. 若所给的数是形如 $\dots -2, -1, 0, 1, 2 \dots$ 的数, 则可判断是整数, 所给的数是形如 $1, 2, 3, \dots$ 的数, 则是正整数. 此外, 还要注意, 正整数、整数和有理数的关系.

【解】

无理数(无限不循环小数)

$$-\sqrt{5} = -2.236067977\dots, \pi = 3.1415926535\dots, \sqrt{|-3|} = 1.732050\dots$$