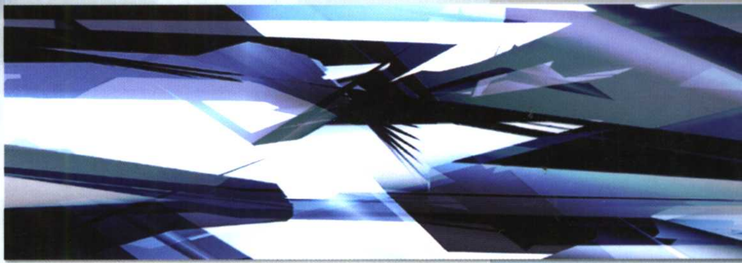
普通高等教育“十五”国家级规划教材配套参考书



微积分
习题课教程

吉林大学数学学院
主　编　张朝凤　赵建华
副主编　王　颖　白　岩

高等教育出版社

普通高等教育"十五"国家级规划教材配套参考书

微积分习题课教程

吉林大学数学学院

主　编　张朝凤　赵建华

副主编　王　颖　吕　岩

高等教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分习题课教程/张朝凤，赵建华主编．—北京：高等教育出版社，2006.5
ISBN 7-04-019368-X

Ⅰ．微…　Ⅱ．①张…②赵…　Ⅲ．微积分—高等学校—习题　Ⅳ．O172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 060782 号

策划编辑　李艳馥　　**责任编辑**　李　陶　　**封面设计**　于　涛
责任绘图　黄建英　　**责任印制**　朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	中青印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2006 年 5 月第 1 版
印　　张	35	**印　　次**	2006 年 5 月第 1 次印刷
字　　数	640 000	**定　　价**	36.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　19368-00

内容提要

本书是与普通高等教育“十五”国家级规划教材《大学数学》配套的教材.本书借鉴了国内外同类教材的精华,汲取了当前教学改革和教学研究的最新成果;是针对非数学类专业理工科大学生对基础数学的要求编写而成的.本书密切配合《大学数学》系列教材,按教学要求精选精讲大量例题,解答疑难问题,分析常见错误类型,并配有综合练习与答案.

本书分为上下两篇,上篇的主要内容为:极限与连续函数、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、空间解析几何.下篇的主要内容为:多元函数微分学、重积分、曲线积分、曲面积分、无穷级数、微分方程.

本书可供高等学校非数学类理工科各专业学生使用,也可供工程技术人员参考.

前　言

大学数学习题课教程系列教材是普通高等教育“十五”国家级规划教材《大学数学》的配套教材．本套教材分两册：《微积分习题课教程》和《线性代数与随机数学习题课教程》．每册分上、下两篇．《微积分习题课教程》的上篇为一元微积分，下篇为多元微积分．《线性代数与随机数学习题课教程》的上篇为线性代数，下篇为随机数学．

大学数学习题课教程系列教材借鉴了国内外同类教材的精华，汲取了当前教学改革和教学研究的最新成果；是针对非数学类专业理工科大学生对基础数学的要求而编写的．本教材密切配合大学数学系列教材，注意到了时代的特征和学生的特点，本着“加强基础、强化应用、整体优化、注重后效”的原则，力争做到科学性、系统性与可行性的统一．其特点是：体现了现代数学思想与方法，解决疑难问题，总结学习规律，提示注意事项，特别注重培养学生分析问题、解决问题的能力．本教材可作为高等学校非数学类理工科各专业学生学习数学的辅助教材或参考书．本教材内容充实，每章配有综合练习及参考答案与提示．参考答案与提示只是作为一种参考提供给读者．

《微积分习题课教程》上篇共五章，第一章由张朝凤编写，第二章由王瑞廷编写，第三章由王颖编写，第四章由王颖和李岩波编写，第五章由李岩波编写；上篇由张朝凤统审、定稿．下篇共七章，第六、七章由马瑞杰编写，第八、九章由刘静编写，第十章由白岩编写，第十一章由赵建华编写，第十二章由韩燕编写；下篇由赵建华统审、定稿．

在《大学数学习题课教程》的编写过程中，得到了吉林大学教务处和数学学院的大力支持．青年教师孙鹏、任长宇及研究生王军林、姜政毅、徐忠海、高懿、陈明杰、杨旭辉、朱复康完成了本套教材的排版制图工作．在此一并致谢．编者要特别感谢高等教育出版社数学分社的领导和编辑们，他们对本系列教材的编辑出版工作给予了精心指导和大力支持．

由于我们水平有限，书中的错误和不妥之处，恳请广大读者批评指正．

编者

2006 年 5 月

目 录

上篇 一元微积分

下篇 多元微积分

上篇 一元微积分

一元微积分是以一元函数为研究对象，以极限方法作为研究手段，研究函数的变化率以及无穷累积的问题，是学习后续课程的基础. 本篇的主要内容包括：极限与连续函数、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、空间解析几何.

第一章　极限与连续函数

本章重点研究求极限的方法，研究与极限概念密切相关且在微积分运算中起重要作用的无穷小量；再应用极限来研究函数的连续性. 学好这些内容，准确理解极限概念，熟练掌握极限运算方法，是学好微积分的基础.

§1　极限

主要内容

数列极限与函数极限的概念，极限的性质，极限的运算法则，数列收敛的判别法及函数极限存在的判别法，两个重要极限，无穷小的比较.

教学要求

1. 理解极限的概念;
2. 理解函数左、右极限的概念;
3. 熟练掌握极限的性质及四则运算法则;
4. 掌握数列收敛的判别法及函数极限存在的判别法，并会利用它们求极限;
5. 掌握利用两个重要极限求极限的方法;
6. 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，掌握等价无穷小代换求极限的方法.

例题选讲

例 1 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n+4}{3n^2+2n-3}=\dfrac{1}{3}$.

分析 由于

$$\left|\frac{n^2-n+4}{3n^2+2n-3}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{-5n+15}{3(3n^2+2n-3)}\right|=\left|\frac{5n-15}{3(3n^2+2n-3)}\right|,$$

不妨设 $n>3$, 则 $\left|\dfrac{5n-15}{3(3n^2+2n-3)}\right|<\dfrac{5n}{9n^2}<\dfrac{1}{n}$.

证 $\forall\varepsilon>0$, 不妨设 $n>3$, 要使

$$|x_n-a|=\left|\frac{n^2-n+4}{3n^2+2n-3}-\frac{1}{3}\right|<\frac{5n}{9n^2}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

只要 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$, 因此可取 $N=\max\left\{3,\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$, 当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{n^2-n+4}{3n^2+2n-3}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+4}{3n^2+2n-3}=\frac{1}{3}.$$

□

注 用"ε-N"定义证明数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的关键是对 $\forall\varepsilon>0$, 寻找 N, 即找能使 $|x_n-a|<\varepsilon$ 恒成立的条件"$n>N$"中的 N. 一般来说，确定 N 值，只要通过适当放大 $|x_n-a|$, 再令 $|x_n-a|$ 放大后得到的一个与 n 有关的式子小于 ε, 使得很方便解出 n 大于关于 ε 的表达式 (记做$N(\varepsilon)$), 取正整数 $N>N(\varepsilon)$ 即可.

例 2 用函数极限的定义证明 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{2x}=0$.

分析 为了较方便的确定正数 δ, 可将 $|f(x)-A|$ 适当放大到 $|x-x_0|$ 的正整数倍, 为此常常先设定条件 $|x-x_0|<\delta_1$, 在这样的条件下, 保留 $|f(x)-A|$ 中含有 $|x-x_0|$ 的因式，把其余的与 x 有关的因式适当放大得 M, 再从 $|f(x)-A|<M|x-x_0|<\varepsilon$ 中求出 $|x-x_0|<\dfrac{\varepsilon}{M}=\delta_2$, 然后取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. 本题由于 $x\to1$, 因而先限制 $|x-1|<\dfrac{1}{2}$.

证 $\forall\varepsilon>0$, 设 $|x-1|<\dfrac{1}{2}$, 即当 $\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}$ 时，要使

$$|f(x)-A|=\left|\frac{x-1}{2x}-0\right|=\frac{|x-1|}{2|x|}<|x-1|<\varepsilon,$$

取 $\delta=\min\{\dfrac{1}{2},\varepsilon\}$, 则当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{x-1}{2x}-0\right|<\delta\leqslant\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{2x}=0.$$

□

注 (1) 此题不要设 $|x-1|<1$, 这时 $0<x<2$, 分母 x 无法取值.

(2) 研究函数的极限时，因为自变量的变化过程有 6 种，函数变化的趋势有 4 种，配合起来有 24 种形式，例 2 中只介绍了 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=A$ 的形式. 利用函数定义证明极限时，首先要分清类型，然后会举一反三，能把类似的意义翻译成数学语言，这样就能给出其它情形的极限定义.

例 3 设 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\sin\dfrac{\pi\sqrt{n}}{2}$, 证明数列 $\{x_n\}$ 没有极限.

分析 如果数列 $\{x_n\}$ 有极限，那么它的任何子数列都有相同的极限. 因此，数列 $\{x_n\}$ 若存在发散的子数列，或者存在两个收敛于不同极限的子数列，即可证得 $\{x_n\}$ 没有极限.

证 在数列 $\{x_n\}$ 中取子数列 $x_{4k^2}=\left(1+\dfrac{1}{2k}\right)\sin(\pi k)=0$, 则子数列 $\{x_{4k^2}\}$ 收敛于 0.

再取子数列

$$x_{(4k+1)^2}=\left(1+\frac{1}{4k+1}\right)\sin\frac{(4k+1)\pi}{2}=1+\frac{1}{4k+1},$$

显然 $\{x_{(4k+1)^2}\}$ 收敛于 1, 因此 $\{x_n\}$ 没有极限. □

例 4 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, 证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=b$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-bg(x)}{g(x)}=0$.

证 必要性 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=b$,

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-bg(x)}{g(x)}=b-b=0.$$

充分性 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-bg(x)}{g(x)}=0$,

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(b+\frac{f(x)}{g(x)}-b\right),$$

知

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=b.$$

□

注 此题充分性的证明中，要注意:

由 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-bg(x)}{g(x)}=0$ 知 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}-\lim\limits_{x\to x_0}b=0$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=b$ 的证法错误，这里用到了差的极限等于极限的差的运算法则. 而 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 未必存在，需要我们证明，因而不能直接用极限的运算法则.

例 5 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq 0,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在，试证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 不存在.

分析 若假设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 存在，由 $g(x)=\dfrac{g(x)f(x)}{f(x)}$ 及 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq 0$, 知 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 存在，这与已知 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在矛盾. 所以用反证法.

证 假设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 存在. 由已知 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq 0$, 根据保号性知存在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$, 当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时有 $f(x)\neq 0$. 因而，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\cdot\dfrac{f(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)g(x)}{f(x)}$ 存在，与已知 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在矛盾，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 不存在. □

例 6 求 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

分析 当 $x\to a^+$ 时，分子、分母的极限都为零 (这样的极限形式称为 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式), 故不能用商的极限法则，由于分子、分母有根式，所以采取有理化或分解的方法，消去零因式，再用极限运算法则.

解

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}&=\lim_{x\to a^+}\left[\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})\sqrt{x^2-a^2}}+\frac{1}{\sqrt{x+a}}\right]\\
&=\lim_{x\to a^+}\left[\frac{\sqrt{x-a}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})\sqrt{x+a}}+\frac{1}{\sqrt{x+a}}\right]\\
&=\frac{1}{\sqrt{2a}}.
\end{aligned}
$$

例 7 求 $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

分析 此题为 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，为了消去零因式，可先用变量替换，以简便计算.

解 令 $\sqrt[3]{x}=t,x=t^3$, 且 $x\to -8$ 时，$t\to -2$.

$$
\lim_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=\lim_{t\to -2}\frac{\sqrt{1-t^3}-3}{2+t}
$$

$$= \lim_{t\to -2} \frac{-(t^3+8)}{(2+t)(\sqrt{1-t^3}+3)}$$
$$= \lim_{t\to -2} \frac{-(t^2-2t+4)}{\sqrt{1-t^3}+3} = -2.$$

例 8 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

分析 此题为 $\infty-\infty$ 型未定式，根式有理化，化成 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}$.

例 9 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1\cdot 3}\right)\left(1+\dfrac{1}{2\cdot 4}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{n(n+2)}\right)$.

分析 此题为当 $n\to\infty$ 时， n 项乘积的极限，方法之一就是经过恒等变形，将表达式“缩短”，而掌握这种方法一是靠经验的积累，二是对一些求和公式熟悉. 该题利用和差化积 $1+\dfrac{1}{k(k+2)}=\dfrac{(k+1)^2}{k(k+2)}$，使各项相乘过程中中间项相消.

解

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1\cdot 3}\right)\left(1+\frac{1}{2\cdot 4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdots\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{n+2}=2.$$

注 (1) 计算极限时要注意:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ 0, & n<m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

在求此形式的极限时，抓住关于 x 的最高次幂的项；而把其余的项略掉，例如

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\lim_{x\to 0}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

例 8, 例 9 是此方法的应用.

(2) 记住几个常用的极限 (不用证明)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad(a>0);\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2};\quad \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x\to-\infty}e^x=0;\quad \lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty;$$

$$\lim_{x\to0^+}x^x=1.$$

例 10 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\arctan nx}{\sqrt{n^2+n}}$.

解

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{n\arctan nx}{\sqrt{n^2+n}}\\ =&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\arctan nx=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x<0.\end{cases}\end{aligned}$$

例 11 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

分析 式中有 $e^{\frac{1}{x}}$ 与 $|x|$, 所以要考虑左右极限.

解

$$\begin{aligned}f(0^+)&=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)\\&=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1,\\ f(0^-)&=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)\\&=\frac{2+0}{1+0}-1=1,\end{aligned}$$

由于 $f(0^+)=1=f(0^-)$, 故原式 $=1$.

注 当 $x\to\infty$ 时, e^x 没有极限, 也不是无穷大; 当 $x\to0$ 时, $e^{\frac{1}{x}}$ 同理.

例 12 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}\quad(x\geqslant0)$.

分析 本题就是利用当 $a>b>c>0$ 时, 有 $a<(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}<3^{\frac{1}{n}}a$, 因 $\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}a=a$, 由夹挤定理知

$$\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}=a.$$

解 (1) 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时, $x^n \leqslant 1$, $\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n < 1$, 于是

$$1 \leqslant \sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \leqslant \sqrt[n]{3}.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$, 由夹挤定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}=1$.

(2) 当 $1 < x \leqslant 2$ 时, $x \geqslant \dfrac{x^2}{2}$, 于是

$$x < \sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \leqslant \sqrt[n]{3}x.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}x=x$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}=x$.

(3) 当 $x > 2$ 时, $x < \dfrac{x^2}{2}$, 于是

$$\frac{x^2}{2} < \sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n} < \sqrt[n]{3}\cdot\frac{x^2}{2}.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}\cdot\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=\frac{x^2}{2}.$$

综上所述

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x, & 1<x\leqslant 2,\\ \dfrac{x^2}{2}, & x>2.\end{cases}$$

注 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{\frac{1}{n}}=a$, 其中 $a_i>0\ (i=1,2,\cdots,m)$, $a=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$.

例 13 求 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

解 用夹逼准则

记 $f(x)=x\left[\dfrac{1}{x}\right]$, 因为 $x\to 0$, 不妨设 $|x|<1$.

当 $0<x<1$ 时

$$x\left(\frac{1}{x}-1\right)<f(x)<x\cdot\frac{1}{x}=1,$$

而 $\lim\limits_{x\to0^+}x\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=1$, 由夹逼准则得 $f\left(0^+\right)=1$.

当 $-1<x<0$ 时,

$$x\left(\frac{1}{x}-1\right)>f(x)>1,$$

由 $\lim\limits_{x\to0^-}x\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=1$, 所以 $f\left(0^-\right)=1$.

因为 $f\left(0^-\right)=f\left(0^+\right)=1$, 所以有 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$.

例 14 设 $0<x_1<3, x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ $(n=1,2,\cdots)$, 证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 并求极限.

证 先用数学归纳法证明数列单调有界. 因为 $0<x_1<3$, 所以 $3-x_1>0$, 从而

$$0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\leqslant\frac{x_1+(3-x_1)}{2}=\frac{3}{2}.$$

设 $0<x_k\leqslant\dfrac{3}{2}$ $(k>1)$ 成立, 则

$$0<x_{k+1}=\sqrt{x_k(3-x_k)}\leqslant\frac{x_k+(3-x_k)}{2}=\frac{3}{2}$$

成立. 由数学归纳法知 $0<x_n\leqslant\dfrac{3}{2}$ $(n=2,3,\cdots)$ 成立, 因而数列 $\{x_n\}$ 有界.

当 $n>1$ 时, $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{\sqrt{x_n(3-x_n)}}{x_n}=\sqrt{\dfrac{3}{x_n}-1}\geqslant1$, 所以 $x_{n+1}\geqslant x_n$, 数列 $\{x_n\}$ 是单调增加, 根据单调有界原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 有

$$a^2=a(3-a),$$

解之得

$$a=\frac{3}{2}, a=0(\text{舍}).$$

即数列 $\{x_n\}$ 的极限为 $\dfrac{3}{2}$. □

注 证明数列的有界性可直接对通项进行分析, 或用数学归纳法; 证明数列的单调性, 可用数学归纳法证明, 或者用 $x_n-x_{n-1}\geqslant0$ $(x_n-x_{n-1}\leqslant0)$, 不许直接就设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 代入通项求 a.