高中数学

数列

龙门专题

主　　编　傅荣强
本册主编　王文彦

十省状元联名推荐
百位名师
共同打造

最新修订

龍門書局
www.Longmenbooks.com

龙门专题

数列

最新修订

主编 傅荣强

本册主编 王文彦

编者 高[illegible] 于长军 朱岩 张书祥

常青 刘殿云 牛鑫哲

龍門書局

北京

图书在版编目(CIP)数据

数列/傅荣强主编;王文彦本册主编.—修订版.—北京:龙门书局,2006

(龙门专题)

ISBN 7-80160-135-1

Ⅰ.数…　Ⅱ.①傅…②王…　Ⅲ.高等数学课-中学-教学参考资料　Ⅳ.G634.663

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第081159号

组稿编辑:田　旭/责任编辑:马建丽　李妙茶/封面设计:耕　者

龍門書局出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

www.longmenbooks.com

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社总发行　各地书店经销

*

2001年2月第　一　版　开本:A5(890×1240)

2006年7月第五次修订版　印张:7 1/2

2006年7月第十六次印刷　字数:268 000

印数:350 001—380 000

定　价:11.50元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

策划者语

生命如歌

——来自北大清华优秀学子的报告

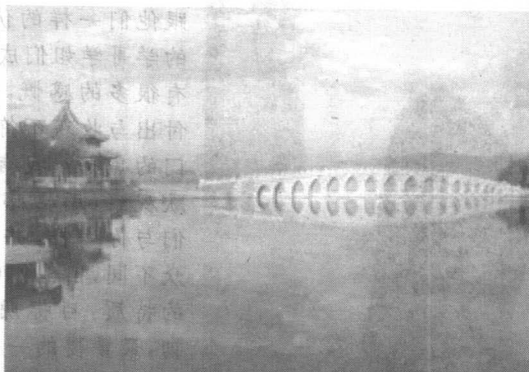
未名湖畔，博雅塔旁。

六月的晨光穿透枝叶，懒散地泻落在林间小道上，水银泻地。微风拂起，垂柳摇曳，湖面荡起阵阵涟漪，黑魆魆的博雅塔倒映在湖面，随着柔波翩翩起舞。林间传来朗朗的读书声，那是晨读的学子；湖畔小径上不断有人跑过，那是晨练的学子；椅子上，台阶上，有人静静坐着，那是在求索知识的宝库……

在北大，每个早晨都是这样的；在清华，每个早晨也都是这样；其实在每一所高校，早晨都是一幅青春洋溢、积极进取的景象！

在长达两年的时间里，我一直在组织北大、清华的高考状元、奥赛金牌得主还有其他优秀学子到全国各地去巡回讲演。揭开他们光彩夺目的荣誉的面纱，他们是那样的平凡、普通，跟我们是那么的相像接近；但在来来往往出差的路上，深入了解他们的过去、成长历程，我才发现，在平凡、普通的背后，他们每个人的成长都勾勒出一道独特的风景，都是一段奋斗不息、积极进取的历程，他们的生命都是一首隽永悠长的歌曲，成功更是偶然中的必然。

小朱，一个很认真、很可爱的女孩子，高中之前家庭条件十分优越，所以一直学习平平，不思进取；在她上高中前，家庭突遭变故，负债累累，用她妈妈的话说，“家里什么都没有了，一切只能靠你自己了。”她说自己只有高考一条路，只有考好了，才能为家里排忧解难。我曾经在台下听她讲自己刻苦学习的经历：“你们有谁在大年三十的晚上还学习到深夜三点？你们又



有谁发烧烧到 39 度以上还在病床上看书？……”那一年，她以总分 684 分成为了浙江省文科高考状元。

小弟姓谭，因为年龄最小，所以大家都叫他小弟，2003 年广东省理科状元，佛山人。我们到广东巡讲结束后，车到了佛山，他却不下车，他说从这里找不到回家的路，因为在佛山上了三年学，除了回家的路知道，从来没有走出过学校的大门。我们只好把他送到广州汽车站，只有在那里他才知道怎么回家。我们大家都哈哈大笑，觉得有些不可思议，只有司机师傅道出天机：“小谭要是能找到回家的路，就不会是高考状元了！”

陆文，一个出自父母离异的单亲家庭的女孩，她说，她努力学习的动力就是想让妈妈高兴，因为从小她就发现，每次她成绩考得很好，妈妈就会很高兴。为了给妈妈买一套宽敞明亮的房子，她选择了出国这条路，考托福，考 GRE，最后如愿以偿，被芝加哥大学以每年 6.4 万美金的全额奖学金录取为生物方向的研究生。6.4 万美金，相当于人民币 52 万。

齐伟，湖南省高考第七名，清华大学计算机学院的研究生，最近被全球最大的软件公司 MICROSOFT 聘为项目经理；霖秋，北京大学数学学院的小妹，在坚持不懈的努力中完成了自身最重要的一次涅磐，昨天的她在未名湖上游弋，今天的她已在千里之外的西雅图……

还有很多很多优秀学子，他们都有自己的故事，酸甜苦辣，但都很真实，很精彩。亲爱的同学们，你们是否也已有了自己的理想，有了自己憧憬的高等学府，是否也渴望着跟他们一样的优秀？在分享这些优秀的学哥学姐们成功的喜悦时，你是否会有很多的感慨，曾经虚度光阴的遗憾，付出与收获不符的苦恼，求知而不入其门的焦虑？我有幸与他们朝夕相处，默默观察，用心感受，感受颇深。其实他们与你一样，并不见得更聪明，或者与众不同，但他们的成功却源于某些共同的特质：目标明确，刻苦勤奋，执着坚韧，最重要的一条是：他们都“学而得其法”，——这，就是为什么我们在本书的前言要讲述他们故事的原因；这，也是

我们策划出版《龙门专题》这套丛书的原因了。

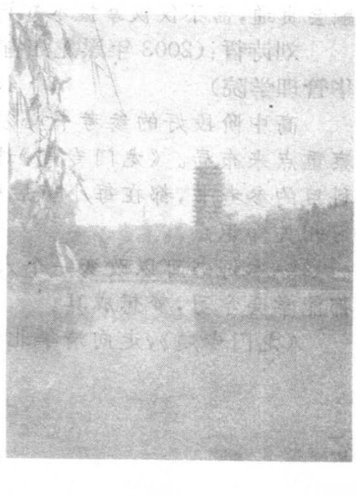
在跟这些清华、北大优秀学子的交往过程中，曾多次探讨过具体学习方法的问题，而学习辅导资料则是他们反复谈到的话题。我们惊喜地发现：他们及他们的同学中，大部分人都使用过《龙门专题》这套书，有很多同学对《龙门专题》推崇备至，有人甚至还记得本套丛书中的一些经典例题和讲解。有时，看着他们互相交流使用《龙门专题》心得时的投入，像小孩子一样争辩着其中哪个知识版块，哪道题目最经典实用时的忘我，我们的激动溢于言表，于是，我让他们把自己使用这套书的心得体会写下来，跟更多的学子们来分享。说句实话，对本套丛书的内容和体例特点，他们的理解很全面也很深刻。受篇幅所限，在此只能简要地摘录一部分，与同学们共勉：

朱师达：（男，2005 年湖北省理科第一名，现就读于北京大学元培试验班）

对于数学、物理、化学等科目来讲，一定要有高质量的练习，《龙门专题》这套书习题讲解详细而具体，不仅例题，而且每章后的练习题都有详细地解答过程，只要认真阅读和揣摩，就一定能起到举一反三的效果，这是非常难能可贵的。

王佳杰：（2004 年高考上海市第一名，毕业于上海控江中学，高考总分 600（满分 610 分），现就读于北京大学，获 2004 年上海优秀毕业生，2004 年北大新生奖学金等荣誉）

《龙门专题》所选的题目固然多，但决无换个数字就算新题的滥竽充数之招；题目虽然要求较高，但坡度合理，决非书后题和奥赛题的简单结合；《龙门专题》虽然针对的是全国卷的考生，但却也覆盖了所有上海卷的基本考点，又略微拔高一些，基于课本又高于课本——这正是上海高考卷的一向风格。总而言之，这套书给你的是脚踏实地备战高考的正道，如果，还有老师在旁指导挑选出最重要的例题和习题，有和你同样选择《龙门专题》的同学相互切磋的话，那就几乎是完美了。



孙田宇：（2005 年吉林省文科第一名，高考总分 682）

参考书是每一位学生在学习过程中必不可少的，我在自己备考时用的是

《龙门专题》。很推崇其中的“知识点精析与应用”、“综合应用篇”。“知识点精析与应用”将基础知识脉络理清，可检验我们对基础知识点的掌握是否牢固扎实。“综合应用篇”则可以帮助我们打开综合题和应用题的解答思路，面对纷繁多样的试题，发掘一些固定的方法，以不变应万变，我从中受益匪浅。

李原草：（男，2003年安徽省高考文科第一名，现就读于北京大学光华管理学院，曾获得北京大学明德奖学金和社会工作优秀奖）

我认为，一本好的参考书首先要条理清晰，重点突出，讲述透彻明了，参考书是对教材的补充而不是简单的重复。《龙门专题》这套书，依据教材而不是简单地重复教材，将数学、物理、化学等学科的知识分成很多知识点、知识块，分为很多册，分别加以总结和归纳，非常适用于平时有针对性地查漏补缺和系统强化复习。

徐惊蛰：（2003年河南省高考理科第一名，高考总分697，北京大学光华管理学院金融系）

我觉得《龙门专题》这套书非常人性化，适合不同的学生根据自身情况有针对性地进行辅导学习。题目设计难度适宜，由浅入深。我当时在排列组合、电磁学等章节上学得不是很好，做题也不得心应手，而这几本龙门的参考书，讲解非常细致，不论是前面对于章节要点的总结归纳，还是后面习题的解析都比较到位，尤其是练习题的答案，像这样详尽明晰的解析是很少见的。所以这样的书比较适合在某些知识版块上学习有困难的同学，以及自学者使用。建议专题细化的同时，也可以将某知识版块的内容与相关知识点结合、联系，使学生加强综合能力，融会贯通，而不仅仅掌握本知识版块。

刘诗哲：（2003年黑龙江省高考理科第一名，现就读于北京大学光华管理学院）

高中阶段好的参考书必须要根据高考的方向走，围绕高考的考察重点来布局。《龙门专题》这套书正是紧跟着高考走，例如数学等科目的参考书，都在每小节后列出了相关的高考题，以进一步强化复习相关知识点。

一本好书可以改变一个人的命运！我们真诚的希望每一个学生都能学会学习，梦想成真。

《龙门专题》，走向清华北大的阶梯！

《龙门专题》编委会

2006年7月

目 录

基 础 篇

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科，简说研究“数”和“形”的学科. 代数是它的侧重研究运算方法的分支. 数列、数列的极限、数学归纳法是代数的三个节点.

数列是按一定次序排列的一列数.

从映射、函数的观点看，数列是一个序号集合到另一个数的集合的映射 $f:A\to B$. 其中，$A=\mathbf{N}^*$，或 $A=\{1,2,\cdots,n\}$，$B\subsetneqq\mathbf{R}$. 因此，数列 $\{a_n\}$ 可以看成是定义域为 A、值域为 B、对应法则为 f 的函数 $a_n=f(n)$ 的一列函数值 $a_1=f(1)$，$a_2=f(2)$，$\cdots$.

数列研究的主要问题是

(1)根据已知条件，求出通项公式 $a_n=f(n)$；

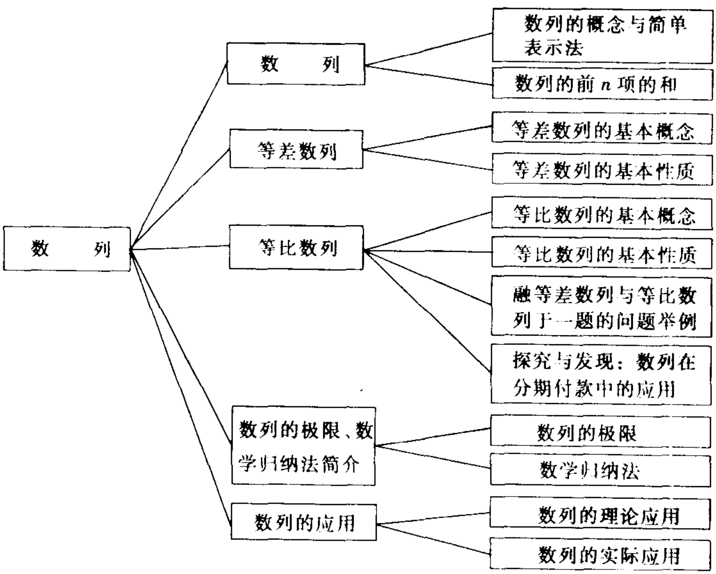
(2)通过通项公式 $a_n=f(n)$ 研究数列的性质.

数列课题的知识载体是通项 a_n、前 n 项的和 S_n；模型函数是等差数列、等比数列.

数列的极限，其本质是研究无穷数列的变化趋势.

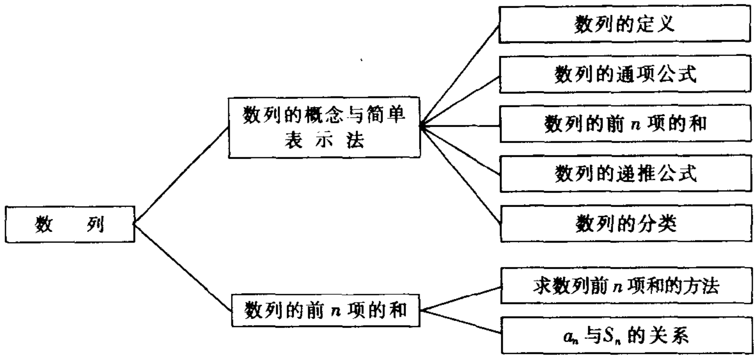
数学归纳法，其本质是研究与正整数有关的命题的推理论证方法.

本书知识框图



第一讲　数　　列

本讲知识框图



学习指导

[考纲要求]

理解数列的概念；了解数列的通项公式的意义；了解递推公式是给出数列的一种方法，并能根据递推公式写出数列的前几项.

1.1　数列的概念与简单表示法

重点难点归纳

重点　①数列的定义.②数列的通项公式的定义.

难点　正确运用数列的递推公式求数列的通项公式.

本节需掌握的知识点　①数列的定义.②数列的通项公式的定义.

知识点精析与应用

知识点精析

1. 数列的定义

数列是按一定次序排列的一列数.

在函数意义下，数列是定义域为正整数集 $\mathbf{N}^*$（或它的有限子集$\{1,2,\cdots,n\}$）的函数 $f(n)$当自变量 n 从 1 开始依次取正整数时所对应的一列函数值

$$f(1),f(2),\cdots,f(n),\cdots.$$

通常用 a_n 代替$f(n)$，于是数列的一般形式为 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，简记为$\{a_n\}$. 其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 依次叫做数列$\{a_n\}$的第 1 项，第 2 项，…，第 n 项，a_1 也叫首项，a_n 也叫通项. 对项数有限的数列而言，最后一项一般称为末项.

2. 数列的通项公式

一个数列$\{a_n\}$的第 n 项 a_n 与项数 n 之间的函数关系，如果可以用一个公式

$$a_n=f(n)$$

来表示，我们就把这个公式叫做这个数列的通项公式.

如，数列 1，4，9，16，…的通项公式为 $a_n=n^2$.

正像不是所有的函数关系都能用解析式表示出来一样，也不是每个数列都能写出它的通项公式. 如，数列 1，2，3，-1，4，-2 就没有通项公式.

有的数列，虽然有通项公式，但在形式上却不一定是唯一的. 如，数列 -1，1，-1，1，…的通项公式可写成 $a_n=(-1)^n$，也可写成 $a_n=\cos n\pi$.

3. 数列的前 n 项的和

$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 叫做数列$\{a_n\}$的前 n 项的和.

4. 数列的递推公式

如果已知数列$\{a_n\}$的第 1 项（或前几项），且任一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1}（或前几项）间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫做这个数列的递推公式.

5. 数列的分类

（1）有穷数列、无穷数列

按照数列的项数是有限项还是无限项来分，数列可划分为有穷数列、无穷数列. 如：数列 1，2，…，2 008 和数列 1，3，5，…，$2n-1$，…分别是有穷数列和无穷数列.

（2）递增数列、递减数列

按照数列的项与项之间的大小关系“$a_{n+1}>a_n$，或 $a_{n+1}<a_n$”来分，数列可划分为递增数列、递减数列. 如：数列 1，2，4，…，2^{n-1}，…和数列 2 008，2 007，…，1 949 分别是递增数列和递减数列.

递增数列与递减数列统称为单调数列.

（3）有界数列、无界数列

按照数列的任何一项的绝对值是否都小于某一正数来分，数列可划分为有界数列、无界数列. 如：数列$\{\sin 1\,921n\}$和数列$\{n^{1\,927}\}$分别是有界数列和无界数列.

(4) 摆动数列

$a_{n+1}>a_n$ 或 $a_{n+1}<a_n$ 不确定.如:数列 $-2,2,-2,2,\cdots$ 是摆动数列.

(5) 常数数列

$a_{n+1}=a_n$.如:数列 2 010,2 010,…,2 010,…是常数数列.

解题方法指导

1. 用观察法求数列的通项公式

用观察法求数列的通项公式应从三个方面考虑:

(1) 掌握一些简单数列的通项公式,见下表.

简单数列	通项公式
$1,1,1,1,\cdots$	$a_n=1$
$1,2,3,4,\cdots$	$a_n=n$
$2,4,6,8,\cdots$	$a_n=2n$
$1,3,5,7,\cdots$	$a_n=2n-1$
$1,2,4,8,\cdots$	$a_n=2^{n-1}$
$2,6,12,20,\cdots$	$a_n=n(n+1)$
$1,4,9,16,\cdots$	$a_n=n^2$
$1,8,27,64,\cdots$	$a_n=n^3$
$1,-1,1,-1,\cdots$	$a_n=(-1)^{n-1}=\cos(n-1)\pi$
$-1,1,-1,1,\cdots$	$a_n=(-1)^n=\cos n\pi$
$1,-2,3,-4,\cdots$	$a_n=(-1)^{n+1}n$
$0,1,0,1,\cdots$	$a_n=\frac{1+(-1)^n}{2}=\left\|\sin\frac{(n-1)\pi}{2}\right\|$
$1,0,1,0,\cdots$	$a_n=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}=\left\|\sin\frac{n\pi}{2}\right\|$
$1,11,111,1\ 111,\cdots$	$a_n=\frac{10^n-1}{9}$

(2) 正、负号的交错"+,-,+,-,…"和"-,+,-,+,…",分别用 $(-1)^{n+1}$ 和 $(-1)^n$ 来调解.

(3) 求形如 $\{a_nb_n\}$、$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 等形式的数列的通项公式,先分别求出 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的

通项公式，再组合为一体.

[例 1] 求下列数列的一个通项公式：

(1)$1,-1,1,-1,\cdots$； (2)$3,5,9,17,33,\cdots$；

(3)$\frac{1}{2},2,\frac{9}{2},8,\frac{25}{2},\cdots$； (4)$1,0,-\frac{1}{3},0,\frac{1}{5},0,-\frac{1}{7},0,\cdots$.

分析 用观察法考察数列中的每一项与它的序号之间的对应关系，归纳各项数值的变化规律.

解 (1)$a_n=(-1)^{n+1}$.

(2)$a_n=1+2^n$.

(3)数列的项，有的是分数，有的是整数，可将数列的各项都统一成分数再观察.

在数列$\frac{1}{2},\frac{4}{2},\frac{9}{2},\frac{16}{2},\frac{25}{2},\cdots$中，分母为2，分子为$n^2$，

所以
$$a_n=\frac{n^2}{2}.$$

(4)把数列改写成 $\frac{1}{1},\frac{0}{2},\frac{-1}{3},\frac{0}{4},\frac{1}{5},\frac{0}{6},\frac{-1}{7},\frac{0}{8},\cdots$.

分母依次为$1,2,\cdots$，而分子$1,0,-1,0,\cdots$周期性地出现，

因此，我们可以用$\sin\frac{n\pi}{2}$来表示分子，

所以
$$a_n=\frac{\sin\frac{n}{2}\pi}{n}.$$

2. 根据数列的递推公式求数列的通项公式

[例 2] 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=3,a_{n+1}=2a_n+1$，写出数列的前6项及$\{a_n\}$的通项公式.

分析 已知$a_{n+1}=2a_n+1$中，一般称为数列的递推公式. 由数列的首项和递推公式可直接写出数列中的各项，通项公式可用累乘法来求.

解 ∵ $a_1=3,a_{n+1}=2a_n+1$，

∴
$$a_2=7,a_3=15,a_4=31,a_5=63,a_6=127.$$

$a_{n+1}=2a_n+1$变形为$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，由此得下面$n-1$个式子

$$a_n+1=2(a_{n-1}+1),$$
$$a_{n-1}+1=2(a_{n-2}+1),$$

$$a_{n-2}+1=2(a_{n-3}+1),$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_2+1=2(a_1+1).$$

将这 $n-1$ 个等式相乘，得

$$a_n+1=2^{n-1}(a_1+1).$$

又∵ $a_1=3$，

∴ $$a_n=2^{n+1}-1.$$

点评　已知递推公式求通项，可把每相邻两项的关系列出来，抓住它们的特点进行适当的处理. 本题的处理办法是相乘（称为累乘法）. 有时也可相加或相减（称为叠加法）. 比如，本例调整一下系数就可用叠加法，即对递推公式 $a_{n+1}=2a_n+1$ 可做如下调整：$a_n=2a_{n-1}+1$，$2a_{n-1}=2^2a_{n-2}+2$，$2^2a_{n-2}=2^3a_{n-3}+2^2$，…，$2^{n-2}a_2=2^{n-1}a_1+2^{n-2}$. 将这 $n-1$ 个等式相加，得 $a_n=2^{n-1}\cdot 3+(1+2+\cdots+2^{n-2})$. 本题还可用递归法，即将递推关系层层代入，比如，$a_{n+1}=2a_n+1\Rightarrow a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，所以 $a_n=2a_{n-1}+1$，所以 $a_n+1=2(a_{n-1}+1)=2[2(a_{n-2}+1)]=\cdots=2^{n-1}(a_1+1)=2^{n+1}$，所以 $a_n=2^{n+1}-1$.

[例 3]　**已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 中，$a_1=1$，$b_1=-1$，又 $a_{n+1}=8a_n-6b_n$，$b_{n+1}=6a_n-4b_n$. 求 a_n 和 b_n.**

分析　本题没有直接给出两个数列的递推关系，但两个等式只要相减就可得到差数列的递推关系，即 $a_{n+1}-b_{n+1}=2(a_n-b_n)$，因此用累乘法或递归法可求得差数列的通项 $a_n-b_n=2^n$，代入第 1 个等式消去 b_n 得 $\{a_n\}$ 的递推公式，再用叠加法可求得 $\{a_n\}$ 的通项公式，然后代入差数列的通项公式即可得 $\{b_n\}$ 的通项公式.

解　由 $\begin{cases}a_{n+1}=8a_n-6b_n,\\ b_{n+1}=6a_n-4b_n,\end{cases}$ 得

$$a_{n+1}-b_{n+1}=2(a_n-b_n),$$

∴ $a_n-b_n=2(a_{n-1}-b_{n-1})=2^2(a_{n-2}-b_{n-2})=\cdots=2^{n-1}(a_1-b_1)=2^n$，

即 $$a_n-b_n=2^n. \qquad ①$$

把①代入 $a_{n+1}=8a_n-6b_n$，得

$$a_{n+1}=2a_n+6(a_n-b_n)=2a_n+6\cdot 2^n.$$

∴ $a_{n+1}=2a_n+6\cdot 2^n$，

$2a_n=2^2a_{n-1}+6\cdot 2^n$，

$2^2a_{n-1}=2^3a_{n-2}+6\cdot 2^n$，

……

$2^{n-1}a_2=2^n\cdot a_1+6\cdot 2^n$.

把 $a_{n+1}=2a_n+6\cdot 2^n$ 中的 n 每次减少 1，再把所得式子两边同时乘以 2，就得到了这 $n-1$ 个式子

以上各式相加并把 $a_1=1$ 代入，得

$$a_{n+1}=2^n+6\cdot 2^n\cdot n=2^n(6n+1).$$

∴ $$a_n=2^{n-1}[6(n-1)+1]=2^{n-1}(6n-5),$$

即 $$a_n=2^{n-1}(6n-5).$$

把上式代入①，得

$$b_n=2^{n-1}(6n-7).$$

[例 4] 已知数列 $\{a_n\}$：3，5，7，…，$2n+1$，…，作另一数列 $\{b_n\}$，使 $b_1=a_1$，当 $n\geqslant 2$ 时，$b_n=a_{b_{n-1}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的第 4 项、第 5 项和通项.

分析 数列 $\{a_n\}$ 是已知数列，通项公式为 $a_n=2n+1$，$\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 的关系是 $b_n=\begin{cases}a_1 & (n=1),\\ a_{b_{n-1}} & (n\geqslant 2).\end{cases}$ 结合在一起，得 $b_1=a_1$，$b_{n+1}=2b_n+1$，即 $b_{n+1}+1=2(b_n+1)$，所以数列 $\{b_n+1\}$ 的通项可求.

解 $b_2=a_3=7$，

$b_3=a_{b_2}=a_7=2\cdot 7+1=15$，

$b_4=a_{b_3}=a_{15}=31$，

$b_5=a_{b_4}=a_{31}=63$，

①$a_n=2n+1\Rightarrow a_1=b_1=3$.
②依 $b_{n+1}+1=2(b_n+1)$，将 $n=1$，2，…，$n-1$ 逐个代入

∵ $b_n=a_{b_{n-1}}=2b_{n-1}+1$，

∴ $n\geqslant 2$ 时，$b_n+1=2(b_{n-1}+1)=2^2(b_{n-2}+1)=\cdots=2^{n-1}(b_1+1)=2^{n+1}$，

∴ $b_n=2^{n+1}-1$（经检验，$n=1$ 也适合）.

3. 根据数列前 n 项和公式求数列的通项公式

[例 5] 数列 $\{a_n\}$ 中，$S_n=n^2+n-2$，求 a_n.

分析 已知数列的前 n 项和的公式，求通项 a_n，可直接利用通项与和的关系 $a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1),\\ S_n-S_{n-1} & (n\geqslant 2).\end{cases}$

解 当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1+1-2=0$.

当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+n-2)-[(n-1)^2+(n-1)-2]=2n.$$

∴ $a_n=\begin{cases}0 & (n=1),\\ 2n & (n\geqslant 2).\end{cases}$

a_1 符合 $a_n=2n$ 的表达式，通项公式可以统一写，如果 a_1 不符合表达式，通项公式必须分段表示

4. 根据数列的通项公式求数列的某些项

[例6]　已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\begin{cases} n & (n=2k-1,k\in \mathbf{N}^*), \\ n+1 & (n=2k,k\in \mathbf{N}^*). \end{cases}$

(1)写出这个数列的奇数项的前3项；

(2)写出这个数列的前3项.

分析　可以直接按项数的奇偶性求所求的项，另一种方法是将通项公式整理成$a_n=n+\dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

解　(1)$a_1=1,a_3=3,a_5=5$.

(2)$a_1=1,a_2=3,a_3=3$.

点评　通项公式可以分段表达也可统一表达，如：$a_n=\begin{cases} f(n) & (n\text{为奇数}), \\ g(n) & (n\text{为偶数}) \end{cases}$

也可合并写成$a_n=\dfrac{1}{2}[f(n)+g(n)]+\dfrac{(-1)^{n+1}}{2}\times[f(n)-g(n)](n\in \mathbf{N}^*)$.

5. 数列中的探索性问题

[例7]　数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=(n+1)\times 0.9^n$，问是否存在这样的正整数N，使得对于任意的正整数n，都有$a_n\leqslant a_N$成立，证明你的结论.

分析　本题属于探索性问题中的存在性问题，这类问题的解题思路是：先假定所需探索的对象存在或结论成立，以此为前提进行推理和运算. 若推出矛盾，则否定结论，否则要给出肯定的证明. 本题提出的问题是判断数列$\{a_n\}$中是否存在最大的项，所以需要研究数列中各项间的大小关系及其变化情况. 因此，只要判断$\{a_n\}$的增减性即可.

解　由$a_n=(n+1)\times 0.9^n$，得

$$a_{n+1}-a_n=\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}(n+2)-\left(\frac{9}{10}\right)^n(n+1)=\frac{9^n}{10^{n+1}}(8-n).$$

∴　$n<8$时，$a_{n+1}>a_n$；$n>8$时，$a_{n+1}<a_n$；且$a_8=a_9$.

∴　$a_1<a_2<a_3<\cdots<a_8=a_9>a_{10}>a_{11}>\cdots$.

判断数列的增减性与判断函数的增减性方法相同，即考查$a_{n+1}-a_n$的符号，正号具有递增性，负号具有递减性

∴ 存在正整数$N=8$或9，使$a_n\leqslant a_N$成立.