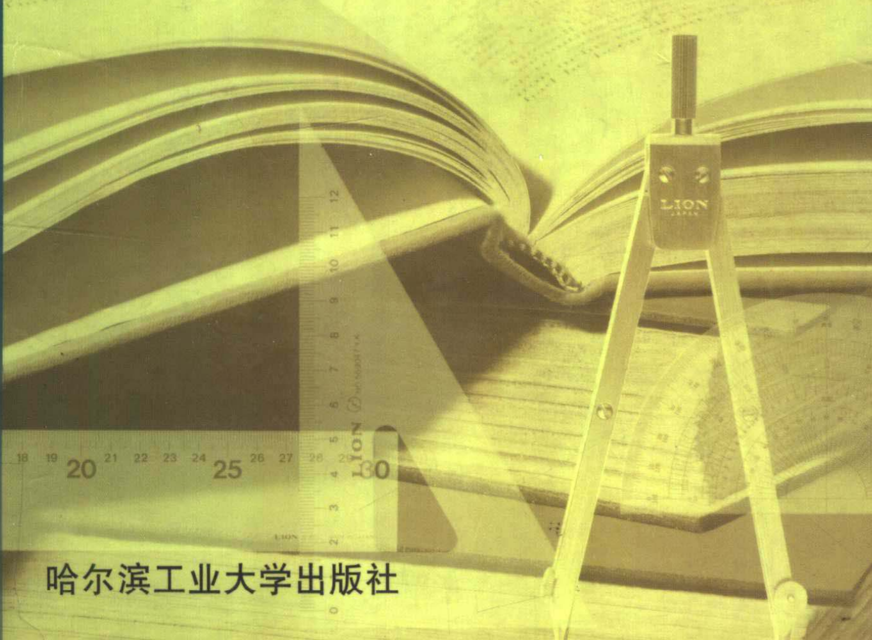
高等师范院校数学系列教材

# 中学数学解题方法

主　编　吕凤祥
副主编　鲍　曼　濮安山



哈尔滨工业大学出版社

高等师范院校数学系列教材

# 中学数学解题方法

主　编　吕凤祥
副主编　鲍　曼　濮安山

## 内 容 简 介

本书有两大部分，共十二章，其内容包括：第一部分解题方法和策略（波利亚的解题观点；常用的数学解题方法；解题策略）；第二部分中学数学专题研究（等式与方程；集合、函数、简易逻辑；三角函数；不等式；数列；向量与复数；排列组合、概率；直线、平面、简单几何体；解析几何）。

本书可作为大专院校（尤其是师范院校）数学类各专业及相近专业学生的教材，也可供广大中学教师和中专教师参考。


**图书在版编目（CIP）数据**

中学数学解题方法/吕凤祥主编．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2003.10

ISBN 7-5603-1889-4

Ⅰ．中…　Ⅱ．吕…　Ⅲ．数学课-中学-解题

Ⅳ．G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 088667 号

| | |
|---|---|
| 出版发行 | 哈尔滨工业大学出版社 |
| 社　址 | 哈尔滨市南岗区教化街 21 号　邮编 150006 |
| 传　真 | 0451-86414749 |
| 印　刷 | 肇东粮食印刷厂 |
| 开　本 | 850×1168　1/32　印张 19.125　字数 496 千字 |
| 版　次 | 2003 年 10 月第 1 版　2003 年 10 月第 1 次印刷 |
| 书　号 | ISBN 7-5603-1889-4/O·150 |
| 印　数 | 1～4 000 |
| 定　价 | 24.80 元 |

# 序

随着科学技术的发展，数学的应用范围日益广泛，不但在自然科学的各个分支中应用，而且在社会科学的很多分支中也有应用。毋庸置疑，数学自身的发展水平深刻地影响着人们的思维方式。

众所周知，数学创新、数学应用、数学传播是数学教学工作者的三大基本任务。为了适应现代教育发展的需要，我国高等师范院校的数学教育专业改为数学与应用数学专业(师范类)，由此导致课程设置必将发生根本的变化。如何开设应用数学课，如何应用计算机进行数学教学，如何改革数学教育的传统课程，都是有待进一步探讨的问题；相应的数学教材，更有待改革和完善。为此，黑龙江省高等师范院校数学教育研究会，组织哈尔滨师范大学、齐齐哈尔大学理学院、牡丹江师范学院、佳木斯大学理学院四所本科师范院校的数学教育工作者，在多年教学实践基础上，集中对应用数学、计算机数学及数学教育等课程进行研讨，编写了“高等师范院校数学系列教材”，以适应高等师范教育发展的需要。

这套教材主要包括:形成体系的教材,如《数学建模(上、下册)》、《数学实验(上、下册)》、《离散数学》;具有师范特色的教材,如《中学数学教学论》、《中学数学方法论》、《中学数学解题方法》;融入教师教学体会和教学成果的专著性的教材,如《教学过程动力学》。这套教材,力求在保持师范特色的同时,突出应用数学和计算机数学的特点,以期成为高等师范院校本科数学教育专业一套实用的教材,这是我们的主要目的。

我们清楚地知道,我们追求的目标不易达到,不过,通过我们的努力,引起共鸣,经过同仁的一起努力,目标总会到得早些。

黑龙江省高等师范院校
数学教育研究会理事长

王玉文
2002年3月

# 前　言

随着基础教育课程改革的深入实施，力求提高解题教学在数学教学中的作用已经成为现代数学教学理念的一个特点。

在中学数学解题研究这一实践性很强的领域，许多学者或是在解题方法、策略等方面做深入探索；或是对中学数学内容进行专题研究，用自己勤勉的劳动取得了令人仰目的开创性成就。在此基础上，编者做了些综合性的尝试，并融进了本人的研究思想，力求使本书具有以下特点：

(1)理论性与实践性相结合，系统性与科学性相结合，特殊性与一般性相结合。

(2)材料典型，内容新颖，方法灵活，注重培养创造性思维。

(3)一题多解，一题多变；研究解题规律和问题发展变化的规律。

本书编写顺序是：

(1)解题观点。

(2)常用的解题方法。

(3)常用的解题策略。

(4)中学数学专题研究。

编者希望本书能给广大师范院校在本领域教学的老师提供有力帮助，并能解决大学生学习和中学数学教师

教学中遇到的实际问题。

参加本书编写的有：吕凤祥（第一～四章、六～八章、十～十二章）；鲍曼（第五章）；濮安山（第九章）。全书由吕凤祥统编定稿。

本书在编写过程中，参阅了贾广聚、陈建业两位老师编写的《中学数学解题研究》讲义和其他专家学者的著作（均列于参考文献中），还得到哈尔滨师范大学数学与计算机科学学院领导的关心和哈尔滨工业大学出版社编辑同志的支持，在此一并表示诚致的谢意。

由于编者水平所限，加之时间仓促，书中难免有疏漏和不妥之处，诚望读者批评指正。

作　者

2003 年 4 月

# 目　　录

## 第一部分　解题方法和策略

## 第二部分 中学数学专题研究

# 第一部分　解题方法和策略

问题是数学的心脏，问题解决是数学教育的核心。无论是概念的引入与产生，公式与法则的发现和推导，还是定理的证明及应用，都要通过解题活动来实现。数学发展的历史，就是不断发现问题和解决问题的历史。

解题是数学教育工作者数学活动的基本形式和主要内容，是培养学生数学才能和思维品质的重要手段和途径，它对建立和发展数学知识结构，形成和增进数学思维能力，培养和造就创新意识等方面都起着不可替代的重要作用。因而，对于数学教师来说，应该研究和掌握一些解题理论。只有这样，才能有效地指导数学实践，培养学生形成良好的解决问题的能力。

多年来，国内外中学数学界在解题理论的研究方面取得了相当可观的成果，其中包括解题观点、解题过程、解题方法、解题策略，习题理论等一系列内容。本部分将就解题理论中的部分内容（如解题观点、常用的解题方法和解题策略）作一些初步的介绍和探讨。

# 第一章　波利亚的解题观点

- 四种具体的解题模式
- 波利亚的“怎样解题”表
- 解数学题的一般步骤

观点是指观察事物所处的位置或采取的态度。解题教学中的解题观点是指对“怎样解题”、“为什么这样解题”的整体认识和基本态度。

美籍匈牙利数学家乔治·波利亚(G. Polya)根据他本人数十年的教学与科研经验写出了《怎样解题》、《数学与猜想》和《数学的发现》三部数学教育名著。其中,《怎样解题》与《数学的发现》集中地论述“怎样解题”的问题。他特别重视发展学生的数学思维力,强调数学教学要加强思维训练,发展学生运用所学知识的能力,发展技能、技巧、有益的思考方式和科学的思维习惯。他反复指出,数学教育的目的不仅仅是传授知识,还要“发展学生本身的内蕴能力”。

## 1.1　四种具体的解题模式

在《数学的发现》中,波利亚给出了四个具体的解题模式。它们是:双轨迹模式、笛卡儿模式、递归模式和叠加模式。波利亚借助于一些典型的例子对这些模式进行了论述。波利亚指出:“对于一个特例所以要进行这样周密的描述,其目的就是为了从中提出一般的方法和模式。”

## 一、双轨迹模式

**【例 1.1】** 给定三边求作一个三角形。

对于这个问题的解法，读者无疑是十分熟悉的：设三边的长度分别为 $a$、$b$ 和 $c$，画上线段 $a$，它的端点分别是 $B$ 和 $C$(图 1.1)，再画两个圆，一个圆心在 $C$，半径为 $b$，另一个圆心在 $B$，半径为 $c$，设 $A$ 是它们的两个交点中的一个，则 $\triangle ABC$ 就是所求作的三角形。

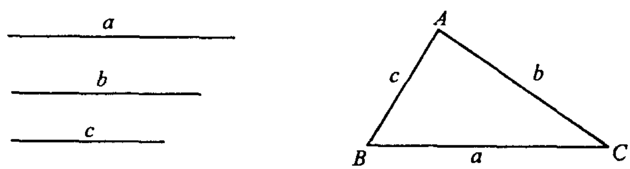



图 1.1

正是通过这样一个简单的例子，波利亚引出了所谓的"双轨迹模式"。他接着写道：

"让我们回顾上述解法，找出求解类似问题时可能有用的特征。"

"作线段 $a$，我们就把所求三角形的两个顶点 $B$ 和 $C$ 定了位；只剩下另一个顶点要'求'了。事实上，作了那条线段 $a$ 之后，我们就把所提出的问题转化成另一个与之等价的问题。在这个新问题中：

未知量是一个点(所求三角形的第三个顶点)；

已知量是两个点($B$ 和 $C$) 与两个长度($b$ 和 $c$)；

条件是所求点与已知点 $C$ 的距离为 $b$，与已知点 $B$ 的距离为 $c$。"

"这一条件包括两部分：一部分涉及 $b$ 和 $C$；另一部分涉及 $c$ 和 $B$。首先，若只考虑条件之一，而不考虑另一部分，那么未知量究竟被确定了没有？它能怎样变化？在平面上，与给定点 $C$ 的距离是定

值 $b$ 的点，既不能被完全确定也不是完全自由的，它被限制在一个'轨迹'上，它必在以点 $C$ 为圆心、以 $b$ 为半径的圆周上。这样，所求的点必须同时在两条这样的轨迹上，它们的交点即为所求。"

"这样，我们便发现了一个解题模式（双轨迹模式），仿照它我们便可以成功地解决几何作图问题。现叙述如下：

首先，把问题归结为要确定一个点。然后，把条件分为两部分，使每一部分未知点都形成一个轨迹，而每一轨迹必须是一条直线或者一个圆。"

通过引进更多的例子，特别是由平面几何向立体几何的过渡，波利亚又逐步对所说的双轨迹模式进行了推广：

"问题的未知量是 $x$，问题的条件分成 $l$ 个分款，我们用有 $l$ 个符号方程的方程组来表示

$$r_1(x) = 0, r_2(x) = 0, \cdots, r_l(x) = 0$$

满足第一个条件分款（由第一个符号方程表示）的对象组成一个确定的集合，我们称之为第一条轨迹；满足第二个分款的对象组成第二条轨迹；……；满足最后一个分款的对象组成第 $l$ 条轨迹。所提问题的解——对象 $x$ 必须满足全部条件，即所有 $l$ 个条件分款，因此，它必须同属于所有这 $l$ 条轨迹。另一方面，任何一个对象 $x$ 如果同时属于 $l$ 条轨迹，即同时满足 $l$ 个条件分款，它就是所提问题的一个解。简而言之，这 $l$ 条轨迹的交点组成的集合，即满足所提条件的所有对象的集合。"

## 二、笛卡儿模式

笛卡儿在他的哲学著作《指导思维的法则》中提出了一种大胆的计划，即：

任何问题 → 数学问题 → 代数问题 → 方程求解。这就是笛卡儿曾经设想过所谓的"万能方法"，他认为按这种模式就可以有效地解决一切问题。

波利亚指出，笛卡儿的模式在某些情况下是不适用的，说是

“万能方法”，当然有些夸张。但是，它仍然不失为一个伟大的思想。事实上，在波利亚看来，笛卡儿所给出的是一个十分有用的思维模式，而通常所谓的“代数方法”，则可视为笛卡儿模式的典例。

为了清楚地说明代数方法的优越性，波利亚在此采取了结合实例进行对照的方法。

**【例 1.2】** 一个农民养了若干只鸡和兔子，它们共有 50 个头和 140 条腿，问这个农民有鸡和兔子各是多少？

波利亚先用“试探法” 进行研究：

“一共有 50 支家畜，它们不可能全是鸡，因为那么将只有 100 条腿了。它们也不可能全是兔子，因为这样便应有 200 条腿。但是，它们实际恰好有 140 条腿，如果正好一半家畜是鸡，另一半是兔子，那么它们就将有 …… 让我们把这些情况列表(表 1.1) 如下。

**表 1.1**

| 鸡 | 兔 | 腿 |
|---|---|---|
| 50 | 0 | 100 |
| 0 | 50 | 200 |
| 25 | 25 | 150 |

如果把鸡的数取小些，那么我们就必须把兔子的数目取大些，而这样就会使腿数增加。如果我们把鸡的数目增加一些 …… 对了，鸡必须多于 25 只，让我们试一试 30。

| 鸡 | 兔 | 腿 |
|---|---|---|
| 30 | 20 | 140 |

我们得到了答案！这就是解！”

接着，波利亚指出这种解题方法的缺点：

“…… 如果提出同样的问题，但数字较大或较为复杂，应用这种方式，仅仅靠瞎猫逮耗子的办法来求解，我们就需要测验更多次，并且要碰运气了。”

接着,波利亚给出了一个十分巧妙的解法。其核心就是如下的假设:"假如这个农民意外地看见他的家畜正在作如下一种古怪的姿势:每只鸡都用一条腿站着,而每只兔子用其两条后腿站着。在这个不寻常的情况下,只用了半数的腿,即 70 条腿。在 70 这个数里,鸡的腿数与鸡的头数是相等的,而兔子的腿数却是其头数的 2 倍,从而,从 70 里减去总头数 50,就是兔子的头数 $70-50=20$。20 只兔子,当然鸡就是 30 只。"

这一解法是十分巧妙的,真可谓是"奇思妙想";但奇思妙想不是总能产生的,要有相当的造化才行!

作为一种对照,波利亚又给出了代数解法。他说:"如果懂一点代数知识的话,我们可以不凭偶然的试算,不凭运气,而用方程去解决这个小问题。"

先将日常语言翻译成代数语言

| 日常语言 | 代数语言 |
|---|---|
| 农民有若干只鸡 | $x$ |
| 若干只兔子 | $y$ |
| 它们共有 50 个头 | $x+y=50$ |
| 140 只腿 | $2x+4y=140$ |

这样,我们就把问题归结为如何解以下的二元一次方程组

$$\begin{cases} x+y=50 \\ 2x+4y=140 \end{cases}$$

最后,波利亚指出,通过字母取代问题里的数字,我们便可发现上述巧妙解法的"奥秘"所在。

具体地说,如果以 $h$ 替代 50,$f$ 替代 140,即用 $h$ 表示头数,$f$ 表示腿数,就得到如下的方程组

$$\begin{cases} x+y=h & (1.1) \\ 2x+4y=f & (1.2) \end{cases}$$