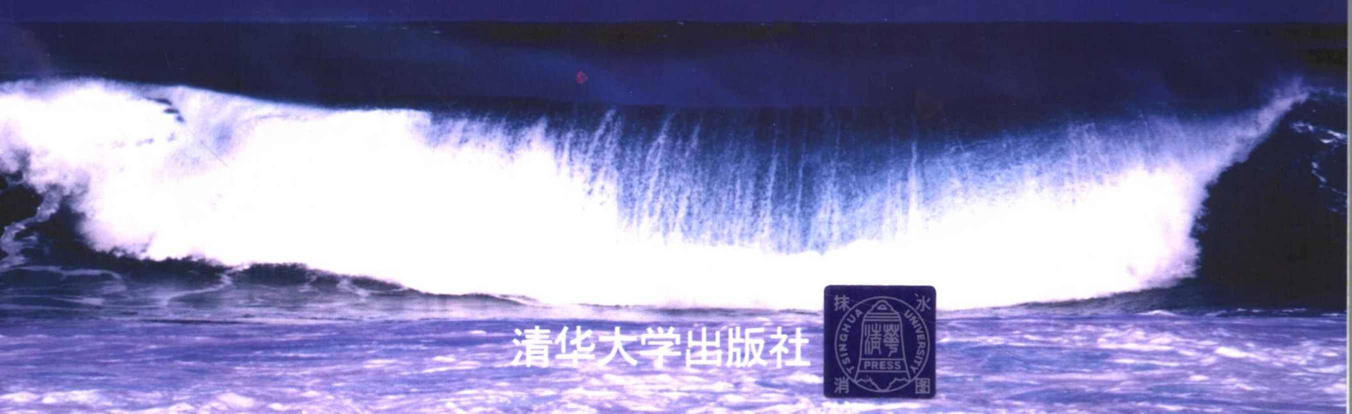
普通高校本科计算机专业特色教材精选

离散数学习题解答

邓辉文 编著

http://www.tup.com.cn



清华大学出版社

普通高校本科计算机专业**特色**教材精选

离散数学习题解答

邓辉文　编著

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

清华大学出版社 2006 年出版的《离散数学》是一本介绍离散数学经典内容的教材，每节后面都有精选习题，本书是其教学辅导用书，对教材中的每个题目都给出了详尽的解答.

本习题解答书适合于选用清华大学出版社 2006 年出版的《离散数学》教材的广大师生作为辅导用书，也可供计算机专业参加研究生入学考试的学生、程序员及相关专业技术人员参考.

我们正在完善网上辅导资料和考试题库系统.

图书在版编目(CIP)数据

离散数学习题解答/邓辉文编著. —北京：清华大学出版社，2006.10

(普通高校本科计算机专业特色教材精选)

ISBN 7-302-13712-9

Ⅰ. 离…　Ⅱ. 邓…　Ⅲ. 离散数学—高等学校—解题　Ⅳ. O158-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 104510 号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦

http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084

社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969

组稿编辑：汪汉友

文稿编辑：赵晓宁

印 刷 者：北京季蜂印刷有限公司

装 订 者：北京国马印刷厂

发 行 者：新华书店总店北京发行所

开　本：185×260　**印张**：12.5　**字数**：294 千字

版　次：2006 年 10 月第 1 版　2006 年 10 月第1次印刷

书　号：ISBN 7-302-13712-9/TP・8266

印　数：1～3000

定　价：18.00 元

出版说明

INTRODUCTION

在我国高等教育逐步实现大众化后，越来越多的高等学校将会面向国民经济发展的第一线，为行业、企业培养各级各类高级应用型专门人才.为此，教育部已经启动了“高等学校教学质量和教学改革工程”，强调要以信息技术为手段，深化教学改革和人才培养模式改革.如何根据社会的实际需要，根据各行各业的具体人才需求，培养具有特色显著的人才，是我们共同面临的重大问题.具体地说，培养具有一定专业特色的和特定能力强的计算机专业应用型人才则是计算机教育要解决的问题.

为了适应21世纪人才培养的需要，培养具有特色的计算机人才，急需一批适合各种人才培养特点的计算机专业教材.目前，一些高校在计算机专业教学和教材改革方面已经做了大量工作，许多教师在计算机专业教学和科研方面已经积累了许多宝贵经验.将他们的教研成果转化为教材的形式，向全国其他学校推广，对于深化我国高等学校的教学改革是一件十分有意义的事.

清华大学出版社在经过大量调查研究的基础上，决定组织编写一套《普通高校本科计算机专业特色教材精选》.本套教材是针对当前高等教育改革的新形势，以社会对人才的需求为导向，主要以培养应用型计算机人才为目标，立足课程改革和教材创新，广泛吸纳全国各地的高等院校计算机优秀教师参与编写，从中精选出版确实反映计算机专业教学方向的特色教材，供普通高等院校计算机专业学生使用.

本套教材具有以下特点：

1. 编写目的明确

本套教材是在深入研究各地各学校办学特色的基础上，面向普通高校的计算机专业学生编写的.学生通过本套教材，主要学习计算机科学与技术专业的基本理论和基本知识，接受利用计算机解决实际问题的基本训练，培养研究和开发计算机系统，特别是应用系统的基本能力.

2. 理论知识与实践训练相结合

根据计算学科的三个学科形态及其关系，本套教材力求突出学科的理论与实践紧密结合的特征，结合实例讲解理论，使理论来源于实践，又进一步指导实践.学生通过实践深化对理论的理解，更重要的是使学生学会理论方法的实际运用.在编写教材时突出实用性，并做到通俗易懂，易教易学，使学生不仅知其然，知其所以然，还要会其如何然.

3. 注意培养学生的动手能力

每种教材都增加了能力训练部分的内容，学生通过学习和练习，能比较熟练地应用计算机知识解决实际问题.既注重培养学生分析问题的能力，也注重培养学生解决问题的能力，以适应新经济时代对人才的需要，满足就业要求.

4. 注重教材的立体化配套

大多数教材都将陆续配套教师用课件、习题及其解答提示，学生上机实验指导等辅助教学资源，有些教材还提供能用于网上下载的文件，以方便教学.

由于各地区各学校的培养目标、教学要求和办学特色均有所不同，所以对特色教学的理解也不尽一致，我们恳切希望大家在使用教材的过程中，及时地给我们提出批评和改进意见，以便我们做好教材的修订改版工作，使其日趋完善.

我们相信经过大家的共同努力，这套教材一定能成为特色鲜明、质量上乘的优秀教材.同时，我们也希望通过本套教材的编写出版，为“高等学校教学质量和教学改革工程”作出贡献.

清华大学出版社

前言

PREFACE

离散数学是计算机及其相关专业的重要基础专业课，学好离散数学对于与计算机有关的其他专业课程的学习起着事半功倍的作用.

学好离散数学，一方面要深刻理解其有关概念、掌握重要结论，另一方面要多做练习以加深对离散数学内容的学习，这对于在计算机其他专业课程的学习中熟练应用有关离散数学内容是至关重要的.

虽然作者编写的《离散数学》教材附录中有习题参考答案，但答案过于简单，使用过程中多有不便.本书在教材的基础上，对其中的每个题目都进行了详尽的解答，希望能便于大家做完练习后参考，能起到举一反三、加深对课本内容的学习和理解的作用，也为自学者提供方便.书末附有两套自测题及其参考答案.

本书适合于选用上述教材的所有师生，由于教材内容均是经典内容，也可供所有学习离散数学的学生、计算机程序员和计算机等级考试应试者作为参考用书.有些题目选自历年的硕士研究生入学考题，因此本书也可作为计算机专业考研学生和计算机工作者的参考书.

希望本书能成为广大读者的知心朋友.作者虽尽心努力，由于编者水平有限，书中的疏漏和不足之处，欢迎大家批评指正，特此致谢.

编　者

2006 年 6 月

目录

CONTENTS

第 1 章 集合、映射与运算

CHAPTER

1.1 集合的有关概念

【习题 1.1】

1. 用列举法表示下列集合：

(1) $\{x \mid x \in \mathbf{R}, x^2-5x+6=0\}$

(2) $\{2x \mid x \in \mathbf{N}\}$

解 (1) $\{x \mid x \in \mathbf{R}, x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$

(2) $\{2x \mid x \in \mathbf{N}\}=\{0,2,4,6,\cdots,2x,\cdots\}$

2. 比较集合$\varnothing$，$\{\varnothing\}$和$\{\{\varnothing\}\}$的不同之处.

解 $\varnothing$是空集，它里面没有元素；$\{\varnothing\}$是由空集$\varnothing$组成的集合，它里面有一个元素$\varnothing$；$\{\{\varnothing\}\}$里面有一个元素为$\{\varnothing\}$，但$\{\varnothing\}$与$\varnothing$是不同的.

3. 判定下列断言是否成立，说明理由：

(1) $\varnothing \subseteq \varnothing$

(2) $\varnothing \in \varnothing$

(3) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$

(4) $\varnothing \in \{\varnothing\}$

解 (1) 成立，因为空集是任意集合的子集.

(2) 不成立，因为空集中不含任意元素.

(3) 成立，因为空集是任意集合的子集.

(4) 成立，因为$\{\varnothing\}$含有元素$\varnothing$.

4. 设 A 和 B 是集合，试举出使 $A \in B$ 且 $A \subseteq B$ 同时成立的例子.

解 例如 $A=\{a,b\}$，$B=\{a,b,\{a,b\},c\}$，这时 $A \in B$ 且 $A \subseteq B$ 同时成立.

5. 对于任意集合 A,B,C，判定下列断言是否成立，说明理由：

(1) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \in C$，则 $A \notin C$

(2) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \in C$，则 $A \subseteq C$

(3) 若 $A \in B$ 且 $B \in C$，则 $A \in C$

(4) 若 $A\in B$ 且 $B\in C$,则 $A\subseteq C$

解 (1) 不成立. 例如,$A=\{a,b\}$,$B=\{a,b,c\}$,$C=\{a,b,\{a,b\},\{a,b,c\}\}$,这时有 $A\subseteq B$ 且 $B\in C$,而 $A\in C$.

(2) 不成立. 例如,$A=\{a,b\}$,$B=\{a,b,c\}$,$C=\{b,\{a,b\},\{a,b,c\}\}$,这时有 $A\subseteq B$ 且 $B\in C$,而 $A\subseteq C$ 不成立.

(3) 不成立. 例如,$A=\{a,b\}$,$B=\{\{a,b\},c\}$,$C=\{b,\{\{a,b\},c\},\{a,b,c\}\}$,这时有 $A\subseteq B$ 且 $B\in C$,而 $A\notin C$.

(4) 不成立. 例如,$A=\{a,b\}$,$B=\{\{a,b\},c\}$,$C=\{b,\{\{a,b\},c\},\{a,b,c\}\}$,这时有 $A\subseteq B$ 且 $B\in C$,而 $A\subseteq C$ 不成立.

6. 分别计算:

(1) $P(P(\varnothing))$

(2) $P(\{a,\ b,\ c\})$

(3) $P(\{\{a,b,c\}\})$

解 (1) 因为 $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$,所以 $P(P(\varnothing))=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

(2) $P(\{a,\ b,\ c\})=\{\varnothing,\ \{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

(3) $P(\{\{a,b,c\}\})=\{\varnothing,\ \{\{a,b,c\}\}\}$

7. 试用乘法原理证明定理 1-4.

证 设 $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,对于 S 的任意子集 A,S 中的元素 x_1 可以属于 A,也可以不属于 A,有 2 种选取方式;同样,在元素 x_1 定下来以后,再考虑 S 中的元素 x_2,它可以属于 A,也可以不属于 A,有 2 种选取方式;…一直下去,对于 S 中的最后一个元素 x_n,它可以属于 A,也可以不属于 A,有 2 种选取方式. 于是,根据乘法原理知,S 的子集共有

$\overbrace{2\cdot 2\cdot \cdots \cdot 2}^{n个}=2^n$ 个.

8. 证明定理 1-5.

证 根据笛卡儿积的定义知,$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$. 由于这样的有序对 (x,y) 的第一位置元素 $x\in A$ 有 m 种选取方式,第二位置元素 $y\in B$ 有 n 种选取方式,因此根据乘法原理,$A\times B$ 中的有序对共有 mn 个,所以 $|A\times B|=mn$.

9. 设 $A=\{a,b\}$,$B=\{1,2,3\}$,试计算:

$$A\times A,A\times B,B\times A,A\times B\times A,(A\times B)\times A$$

解 计算结果分别为

$A\times A=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$

$A\times B=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$

$B\times A=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$

$A\times B\times A=\{(a,1,a),(a,1,b),(a,2,a),(a,2,b),(a,3,a),(a,3,b),$
$(b,1,a),(b,1,b),(b,2,a),(b,2,b),(b,3,a),(b,3,b)\}$

$(A\times B)\times A=\{((a,1),a),((a,1),b),((a,2),a),((a,2),b),((a,3),a),((a,3),b),$
$((b,1),a),((b,1),b),((b,2),a),((b,2),b),((b,3),a),((b,3),b)\}$.

10. 对于任意集合 A,B,C，由 $A\times B=A\times C$ 能否得出 $B=C$，为什么？若 $A\neq\varnothing$ 呢？

解 若 $A=\varnothing$，取 $B=\{a,b\}$，$C=\{c,d\}$，根据笛卡儿积的定义知 $A\times B=\varnothing$ 且 $A\times C=\varnothing$，这时 $A\times B=A\times C$，但 $B\neq C$.

若 $A\neq\varnothing$，则存在元素 $a\in A$，这时由 $A\times B=A\times C$ 可以得出 $B=C$；对于任意 $x\in B$，因为 $(a,x)\in A\times B$，所以 $(a,x)\in A\times C$，根据笛卡儿积的定义知 $x\in C$，即有 $B\subseteq C$. 同理可得 $C\subseteq B$. 故 $B=C$.

11. 设 $|S|=n$，给出一种列出 S 的所有子集的方法.

解 设 $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，将 S 的所有子集 A 用长度为 n 的 0,1 字符串表示，其中字符串的第 i 位取 1 的充要条件是 $x_i\in A$.

于是，可以按从小到大的顺序列出所有长度为 n 的 0,1 字符串，再写出对应的子集，就可以将 S 的所有子集 A 列举出来.

注：此方法可用计算机实现.

1.2 映射的有关概念

【习题 1.2】

1. 下列映射中，哪些是双射？说明理由.

(1) $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$，$f(x)=3x$.

(2) $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{N}$，$f(x)=|x|+1$.

(3) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$f(x)=x^3+1$.

(4) $f:\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，$f(x_1,x_2)=x_1+x_2+1$.

(5) $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}\times\mathbf{N}$，$f(x)=(x,x+1)$.

解 (1) 对于任意对 $x_1,x_2\in\mathbf{Z}$，若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $3x_1=3x_2$，于是 $x_1=x_2$，所以 f 是单射. 由于对任意 $x\in\mathbf{Z}$，$f(x)\neq 2\in\mathbf{Z}$，因此 f 不是满射，进而 f 不是双射.

(2) 由于 $2,-2\in\mathbf{Z}$ 且 $f(2)=f(-2)=3$，因此 f 不是单射. 又由于 $0\in\mathbf{N}$，而任意 $x\in\mathbf{Z}$ 均有 $f(x)=|x|+1\neq 0$，于是 f 不是满射. 显然，f 不是双射.

(3) 对于任意对 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1^3+1=x_2^3+1$，于是 $x_1=x_2$，所以 f 是单射. 对于任意 $y\in\mathbf{R}$，取 $x=(y-1)^{1/3}$，这时

$$f(x)=x^3+1=[(y-1)^{1/3}]^3+1=(y-1)+1=y$$

所以 f 是满射. 进而 f 是双射.

(4) 由于 $(1,2),(2,1)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 且 $(1,2)\neq(2,1)$，而 $f(1,2)=f(2,1)=4$，因此 f 不是单射. 又由于 $0\in\mathbf{N}$，而任意 $(x_1,x_2)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 均有 $f(x_1,x_2)=x_1+x_2+1\neq 0$，于是 f 不是满射. 显然，f 就不是双射.

(5) 由于 $x_1,x_2\in\mathbf{N}$，若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $(x_1,x_1+1)=(x_2,x_2+1)$，于是 $x_1=x_2$，因此 f 是单射. 又由于 $(0,0)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$，而任意 $x\in\mathbf{N}$ 均有 $f(x)=(x,x+1)\neq(0,0)$，于是 f 不是满射. 因为 f 不是满射，所以 f 不是双射.

2. 对于有限集合 A 和 B，假定 $f:A\to B$ 且 $|A|=|B|$，证明：f 是单射的充要条件是 f 是满射. 对于无限集合，上述结论成立吗？举例说明.

证 (⇒)因为 f 是单射，所以 $|A|=|f(A)|$. 由于 $|A|=|B|$，所以 $|f(A)|=|B|$. 又因为 B 有限且 $f(A)\subseteq B$，故 $f(A)=B$，即 f 是满射.

(⇐)若 f 是满射，则 $f(A)=B$. 由于 $|A|=|B|$，于是 $|A|=|f(A)|$. 又因为 A 和 B 是有限集合，因此 f 是单射.

对于无限集合，上述结论不成立. 例如 $f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$，$f(x)=2x$，$f$ 是单射，但 f 不是满射.

3. 设 $f:A\to B$，试证明：

(1) $f\circ I_B=f$.

(2) $I_A\circ f=f$.

特别地，若 $f:A\to A$，则 $f\circ I_A=I_A\circ f=f$.

证 (1) 对于任意 $x\in A$，由于 $f(x)\in B$，所以 $(f\circ I_B)(x)=I_B(f(x))=f(x)$，因此 $f\circ I_B=f$.

(2) 对于任意 $x\in A$，由于 $I_A(x)=x$，所以 $(I_A\circ f)(x)=f(I_A(x))=f(x)$，于是有 $I_A\circ f=f$.

由(1)和(2)知，若 $f:A\to A$，则 $f\circ I_A=I_A\circ f=f$.

4. 试举出一个例子说明 $f\circ f=f$ 成立，其中 $f:A\to A$ 且 $f\neq I_A$. 若 f 的逆映射存在，满足条件的 f 还存在吗？

解 令 $A=\{a,b,c\}$，$f(a)=f(b)=f(c)=a$，即对于任意 $x\in A$，$f(x)=a$，显然 $f:A\to A$且 $f\neq I_A$. 而对于任意 $x\in A$，有 $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(a)=a$，因此 $f\circ f=f$.

若 $f\circ f=f$ 且 f 的逆映射 f^{-1} 存在，由第 3 题知 $f\circ f=f=f\circ I_A$，所以 $f^{-1}\circ(f\circ f)=f^{-1}\circ(f\circ I_A)$，于是利用定理 1-12 有 $(f^{-1}\circ f)\circ f=(f^{-1}\circ f)\circ I_A$，进而 $I_A\circ f=I_A\circ I_A$，因此 $f=I_A$. 所以若 f 的逆映射存在，满足条件的 f 不存在.

5. 设 $f:A\to B$，$g:B\to C$. 若 f 和 g 是满射，则 $f\circ g$ 是满射，试证明.

证 因为 f 是满射，所以 $f(A)=B$. 又因为 g 是满射，所以 $g(B)=C$. 于是 $(f\circ g)(A)=g(f(A))=g(B)=C$，因此 $f\circ g$ 是 A 到 C 的满射.

另证 对于任意 $z\in C$，因为 g 是满射，于是存在 $y\in B$ 使得 $g(y)=z$. 又因为 f 是满射，存在 $x\in A$ 使得 $f(x)=y$. 因此，$(f\circ g)(x)=g(f(x))=g(y)=z$，所以 $f\circ g$ 是 A 到 C 的满射.

6. 设 $f:A\to B$，$g:B\to C$. 试证明：若 $f\circ g$ 是单射，则 f 是单射. 试举例说明，这时 g 不一定是单射.

证 对于任意 $x_1,x_2\in A$，假定 $f(x_1)=f(x_2)$，则显然 $g(f(x_1))=g(f(x_2))$，即 $(f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2)$. 因为 $f\circ g$ 是单射，所以 $x_1=x_2$，于是 f 是单射.

例如 $A=\{a,b\}$，$B=\{1,2,3\}$，$C=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$，令 $f(a)=1$，$f(b)=2$，$g(1)=\alpha$，$g(2)=\beta$，$g(3)=\beta$，则显然有 $(f\circ g)(a)=g(f(a))=g(1)=\alpha$，$(f\circ g)(b)=g(f(b))=g(2)=\beta$，于是 $f\circ g$ 是 A 到 C 的单射，但 g 显然不是单射.

7. 设 $f:A\to B$，若存在 $g:B\to A$，使得 $f\circ g=I_A$ 且 $g\circ f=I_B$，试证明：f 是双射且 $f^{-1}=g$.

证 因为 $f\circ g=I_A$，而 I_A 是单射，所以 f 是单射. 又因为 $g\circ f=I_B$，而 I_B 是满射，所

以 f 是满射. 因此 f 是双射.

由于 f 是双射，所以 f^{-1} 存在. 因为 $f\circ g=I_A$，于是 $f^{-1}\circ(f\circ g)=f^{-1}\circ I_A$. 而 $(f^{-1}\circ f)\circ g=f^{-1}\circ I_A$ 且 $I_B\circ g=f^{-1}$，所以有 $f^{-1}=g$.

8. 设 $f:A\to B$，$g:B\to C$. 若 f 和 g 是双射，则 $f\circ g$ 是双射且 $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$.

证　根据定理 1-10(1)(2)知，$f\circ g$ 是双射. 下证 $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$. 因为

$$(f\circ g)\circ(g^{-1}\circ f^{-1})=f\circ(g\circ g^{-1})\circ f^{-1}=f\circ I_B\circ f^{-1}=f\circ f^{-1}=I_A,$$

$$(g^{-1}\circ f^{-1})\circ(f\circ g)=g^{-1}\circ(f^{-1}\circ f)\circ g=g^{-1}\circ I_B\circ g=g^{-1}\circ g=I_C,$$

在上面的推导中多次利用了定理 1-12. 由第 7 题知，$(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$.

9. 设 G 是集合 A 到 A 的所有双射组成的集合，证明：

(1) 任意 $f,g\in G$，有 $f\circ g\in G$.

(2) 对于任意 $f,g,h\in G$，有 $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$.

(3) $I_A\in G$ 且对于任意 $f\in G$，有 $I_A\circ f=f\circ I_A=f$.

(4) 对于任意 $f\in G$，有 $f^{-1}\in G$ 且 $f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=I_A$.

证　(1) 由定理 1-10.

(2) 由定理 1-12.

(3) 由第 3 题.

(4) 由定理 1-9.

10. 若 $A=\{a, b, c\}$，$B=\{1, 2\}$，问 A 到 B 的满射、单射、双射各有多少个？试推广你的结论.

解　将 A 中的 3 个元素对应到 B 中的 2 个元素，相当于将 3 个元素分成 2 部分，共有 3 种分法；在计算 A 到 B 的满射个数时还需要将 B 中元素进行排列，共有 2 种排列方式，于是 A 到 B 的满射共有 $3\times 2=6$ 个(请自己分别写出 A 到 B 的 6 个满射).

由于 $|A|=3$，$|B|=2$，所以 A 到 B 的单射没有，进而 A 到 B 的双射也没有.

假设 $|A|=m$，$|B|=n$.

(1) A 到 B 的满射　若 $m<n$，不存在满射；若 $m\geqslant n$，先将 m 个元素划分成 n 个块(参见 1.5 节)，共有 $S(m,n)$ 种方式；再将 B 中元素进行全排列，共有 $n!$ 种方式，于是 A 到 B 的满射共有 $S(m,n)\cdot n!$ 个.

(2) A 到 B 的单射　若 $m>n$，不存在单射；若 $m\leqslant n$，由于 B 中任意选取 m 个元素，再将其进行全排列都得到 A 到 B 的单射，故 A 到 B 的单射共有 $C_n^m\cdot m!$ 个.

(3) A 到 B 的双射　若 $m\neq n$，不存在双射；若 $m=n$，此时 B 中元素的任意一个排列均可得到一个 A 到 B 的双射，因此 A 到 B 的双射共有 $m!$ 个.

11. 设 A, B, C, D 是任意集合，f 是 A 到 B 的双射，g 是 C 到 D 的双射，令 $h:A\times C\to B\times D$，对任意 $(a,c)\in A\times C$，$h(a,c)=(f(a),g(c))$. 证明：h 是双射.

证　对于任意 $(a_1,c_1)\in A\times C$，$(a_2,c_2)\in A\times C$，假定 $h(a_1,c_1)=h(a_2,c_2)$，即 $(f(a_1),g(c_1))=(f(a_2),g(c_2))$，于是 $f(a_1)=f(a_2)$ 且 $g(c_1)=g(c_2)$，根据已知条件有 $a_1=a_2$ 且 $c_1=c_2$，进而 $(a_1,c_1)=(a_2,c_2)$，因此 h 是单射.

任意 $(b,d)\in B\times D$，则 $b\in B$，$d\in D$，由于 f 是 A 到 B 的双射且 g 是 C 到 D 的双射，于是存在 $a\in A$，$c\in C$ 使得 $f(a)=b$，$g(c)=d$，因此 $h(a,c)=(f(a),g(c))=(b,d)$，所以

h 是满射.

故 h 是双射.

12. 设 $f:A\to B,g:B\to C,h:C\to A$,若 $f\circ g\circ h=I_A,g\circ h\circ f=I_B,h\circ f\circ g=I_C$,则 f,g,h 均可逆,并求出 f^{-1},g^{-1},h^{-1}.

证 因为恒等映射是双射,多次使用定理 1-12 即可得结论.

由于 $f\circ g\circ h=I_A$,所以 f 是单射且 h 是满射.由于 $g\circ h\circ f=I_B$,所以 g 是单射且 f 是满射.由于 $h\circ f\circ g=I_C$,所以 h 是单射且 g 是满射.于是 f,g,h 是双射,因此 f,g,h 均可逆.

由于 $f\circ g\circ h=I_A$,所以 $f^{-1}=g\circ h$ 且 $h^{-1}=f\circ g$,进而 $g^{-1}=h\circ f$.

13. 已知阿克曼(Ackermann)函数 $A:\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 的定义为

(1) $A(0,n)=n+1,n\geqslant 0$;

(2) $A(m,0)=A(m-1,1),m>0$;

(3) $A(m,n)=A(m-1,A(m,n-1)),m>0,n>0$.

分别计算 $A(2,3)$ 和 $A(3,2)$.

解 由已知条件有 $A(0,1)=2,A(1,0)=A(0,1)=2$,于是

$$A(1,1)=A(0,A(1,0))=A(0,2)=2+1=3,$$
$$A(1,2)=A(0,A(1,1))=A(0,3)=3+1=4,$$

由此可进一步得出

$$A(1,n)=n+2,$$
$$A(2,0)=A(1,1)=3,$$
$$A(2,1)=A(1,A(2,0))=A(1,3)=3+2=5,$$
$$A(2,2)=A(1,A(2,1))=A(1,5)=5+2=7,$$
$$A(2,3)=A(1,A(2,2))=A(1,7)=7+2=9.$$

因此有

$$A(2,n)=2n+3,$$
$$A(3,0)=A(2,1)=2\cdot 1+3=5,$$
$$A(3,1)=A(2,A(3,0))=A(2,5)=2\cdot 5+3=13,$$
$$A(3,2)=A(2,A(2,2))=A(2,13)=2\cdot 13+3=29.$$

所以有 $A(2,3)=9,A(3,2)=29$.

1.3 运算的定义及性质

【习题 1.3】

1. 分别判定取绝对值运算| |、加法运算+、减法运算-、取大运算 max、取小运算 min 是否为自然数集合 $\mathbf{N}$ 上的代数运算.

解 因为对于任意 $x\in\mathbf{N}$,$|x|\in\mathbf{N}$,所以取绝对值运算| |是 $\mathbf{N}$ 上的 1 元代数运算.又因为对于任意 $x,y\in\mathbf{N}$,有 $x+y$,$\max(x,y)$,$\min(x,y)\in\mathbf{N}$,因此加法运算+、取大运算 max、取小运算 min 是自然数集合 $\mathbf{N}$ 上的 2 元代数运算.

而对于 $2,3\in\mathbf{N}$,由于 $2-3=-1\notin\mathbf{N}$,所以减法运算-不是自然数集合 $\mathbf{N}$ 上的 2 元代