灰数学引论

★灰色朦胧集

邓聚龙著

华中理工大学出版社

灰数学引论

——灰色朦胧集

邓聚龙 著

华中理工大学出版社

内 容 提 要

随着人类社会的发展，数从整数、分数、负数、无理数发展到虚数和复数，数学也从常量数学、变量数学发展到随机数学和模糊数学。

数与数学是否还会发展？在离散与连续的对立之中，在具体信息与抽象数字的对立之中，邓聚龙教授在1982年提出了带信息的数——灰数，首创灰色系统理论。经10年开拓和深化，他撰写了本学术专著，进一步明确提出了一种概念全新的集合——灰色朦胧集(灰集)，并在此基础上，以认知模式为前提，以认知信息基为依据，建立了表现、灰和、灰差、灰覆盖、构造、白化、灰因、白果等灰色数学的新概念、新理论、新方法，首次量化研究了主体对客体的认知过程。

本书适合于灰色系统理论与数学研究者阅读。

灰 数 学 引 论
——灰 色 朦 胧 集
邓聚龙 著
责任编辑 殷伯明
*
华中理工大学出版社出版发行
(武昌喻家山)
新华书店湖北发行所经销
华中理工大学出版社印刷厂印刷
*
开本：850×1168 1/32 印张：13 字数：326 000
1992年9月第1版 1992年9月第1次印刷
印数：1—1 500
ISBN 7-5609-0704-0/O·95
定价：7.80元

(鄂)新登字第10号

前　言

我们有理由认为：

*离散与连续的对立，

*信息与数字的对立，

*灰因与白果或白因与灰果的对立，

*严密运算与思维演化(逻辑推理)的对立，是现代量化科学遇到的几大难题，也是提到灰数学面前的几大难题。

本书在解决离散与连续对立的问题时，提出了灰色朦胧集，简称灰朦胧集或朦胧集，即灰集；在解决信息与数字的对立时，提出了信息表现元；在解决灰因与白果或白因与灰果的对立时，提出了信息覆盖；在解决严密运算与思维演化的对立时，提出了“构造关系®”．这一切以本书提出的认知模式为前提，以认知的信息基为依据．

通过这些研究

一、明确了灰数学(灰理论)的基础是灰朦胧集．

二、获得了灰朦胧集的四种形态，即胚胎态(透明态)、发育态(朦胧态)、成熟态(白化态)、寿终态(实证态)．

三、基于灰朦胧集的四种状态，明确了灰朦胧集的五种性质，即兼容性、实证性、时效性、信息性、可构造性．

四、基于二与三，表明灰朦胧集是一种“有生命”、“可发展”、“可实证”的集．因而它是完全不同于康妥(Cantor)集与模糊(Fuzzy)集的新型集．

五、基于灰朦胧集，灰数学具有兼容性、信息性、动态性．若认为离散数学以康托集为基础，则由于康妥集是朦胧集的含核透明态，因此灰数学有对离散数学的兼容性．若认为一般数学以实数集为基础，则由于实集是灰朦胧集的白化态，因此灰数学有

对一般数学的兼容性。

六、明确了灰元是灰数学的基元，灰数是灰元的特殊形式。并且定义了

*朦胧型灰元；

*核型灰元；

*亏型灰元；

*派生型灰元

等几种不同灰元类型，从而为灰数学构造了一个基本框架，也为灰系统理论奠定了基础。

本书的问世，如果数学家认为不是“纯数学”，技术科学学者认为太抽象、太玄……，那么本书的基本目的就算达到了。

邓聚龙

1991年10月10日

目　录

第一章　灰色信息空间

1.1　认知模式

认知模式是灰数学的基本模式，它容信息、数字、表现、认知、关系、构造、转化、映射……为一体。

公理1.1

1° 认知的根据是信息。

2° 根据非唯一，认知非唯一。

3° 真认知是唯一的。

公理1.2　信息至少有下述性质：

1° 根据性。

2° 差异性。

3° 时效性。

4° 实证性(需要实证性)。

附注1.1　公理1.1的1°"认知的根据是信息"至少可作下述解释：

1° 人们只能通过信息去认知。

2° 凡是对认知提供条件、基础、角度、根据、前提……的一切(材料、事物、资料……)都是信息。"一切"包括具体的和抽象的。

3° 公理1.1揭示了认识与信息的关系。

4° 评价人们对事物认识的程度，也是一种认识。评价的数字或非数字结论，可以作为再认识，反复认识的根据。所以这种评价也是信息。换句话说，人们根据信息去认识客体，认识的结果(结论)也可以是信息，通过信息可以认识信息。

5° 公理1.1表明信息可以独立于人们的认识，也可以升华而

成为认识的“结果”，甚至最后转化为认识的一部分，但必须注意时序性、依存在、主从性、因果性。

定义1.1 对客体认识和辨别的水平、对事物(客体)认知的程度，称为**认知程度或白化度**，记为 $w°$，其反意即为**未知程度**或**灰度**，记为$g°$。比如

*“略知一二”表示了解某事物的灰度还很大，或者说了解某事物的信息很少，非确定性大，从而白化程度小。

*“了解充分”表示白化程度大，为了解某事物掌握的信息多，确定性大，从而有较好的、程度较大的了解。

定义1.2 令 x为被认识的**对象**(包括具体的或抽象的；物质的或非物质的；显示的或潜在的；可量化的或不可量化的；观念的或非观念的；可以描述的或难以描述的……)，W为$w°$的集.又记IFM 为x到W的**映射**，即

$$\text{IFM}: x \longrightarrow W, \quad W=\{w_j^\circ \mid j\in J\},$$

w_j° 为白化度,J 为白化度指标集，J 为离散的或连续的，或二者兼有，则称上述过程为认识过程、**认知模式**或认知程度模式；称IFM为**认知(认识)映射**或简称认知、认识。

附注1.2 上述定义中的x一般不是泛指一般的认知对象，而是仅指与W有关的认知对象。并且，IFM不是一般意义下的“映射”，因为我们缺乏充分的信息去定义“映射”的定义“域”与“值域”，因此IFM是灰映射。

附注1.3 作为认知(认识)IFM，它能认知x，它能使x转化为W是需要根据的。若我们没有必要指明根据是什么，或者我们不完全了解甚至完全不了解根据是什么；或者根据是不言而喻的、人所共知的……，则在认知模式

$$\text{IFM}: x \longrightarrow W$$

中，无需注明“根据”。参见公理 1.1 与附注1.1。当认知模式的对象x有必要指明时，则称为x的信息认知模式。

定义1.3 令W为白化程度$w°$的集合，如果

1° W是实轴R上的子区间

$$W \subseteq (a,1] \subset R,$$

2° 又满足

$$(a,1] \subseteq (0,1], \quad a \geqslant 0,$$

则称W为标定**认知程度集**，记为Θ。一般情况下，Θ的"标定"二字可以省略。

定义1.4 令IFM为认识，有

$$\text{IFM}: x \longrightarrow \Theta, \quad \Theta = W \subseteq (a,1] \subseteq (0,1], \quad a \geqslant 0,$$

$$\text{IFM}: x \longrightarrow \tilde{\Theta}, \quad \tilde{\Theta} \in \Theta, \quad 0 \leqslant \tilde{\Theta} \leqslant 1, \quad \tilde{\Theta} = w^{\circ},$$

则称x为**信息载体**，称$(0,1]$为**信息数字域**，称IFM：$x \longrightarrow \Theta$为一般认知模式，称IFM：$x \longrightarrow \tilde{\Theta}$为认知白化模式，称$\tilde{\Theta}$为认知程度信息，或认知程度数字表现，或白化程度，或白化度，或认知程度。

命题1.1 令W为白化度w°的集，有对应的认识IFM。G为灰度集，则

$$\forall w^{\circ} \in W \Longrightarrow \exists g^{\circ} \in G,$$

$$g^{\circ} = \frac{1}{w^{\circ}},$$

若W与G是取数一致的，则

$$\forall w^{\circ} \in W, \quad \forall g^{\circ} \in G \Longrightarrow g^{\circ} = \frac{1}{w^{\circ}}.$$

证 见定义1.1.

定义1.5 令Θ为x的认知程度集，Θ_j为Θ的子集，即$\Theta_j \subseteq \Theta$，则称$\Theta_j$为信息载体$x$的$j$认知（程度）集。若$\tilde{\Theta}_j \in \Theta_j$，则称$\tilde{\Theta}_j$为$x$在$j$方面的认知度。

附注1.4 相对于

$$w^{\circ} = \tilde{\Theta},$$

我们有白化认知模式

$$\text{IFM}: x \longrightarrow \tilde{\Theta} \in (a,1] \subseteq (0,1],$$

$$\tilde{a} \geqslant 0,$$

$\tilde{a}=0$ 表示对 x 的认知程度为0，即对 x 一无所知。$\tilde{a}=1$，表示对 x 已完全认识(完全白化)。从灰色系统理论的观点看，$a=1$是相对的，是在某一信息层次下成立的。而$a<1$是绝对的、普遍的。

命题1.2 令$\boldsymbol{\Theta}$为信息载体x的认知程度集，$\tilde{\Theta}_j$为x在j方面的认知程度，

$$\tilde{\Theta}_j \in \boldsymbol{\Theta}_j \subseteq \boldsymbol{\Theta},$$

$$\boldsymbol{\Theta}=\{\tilde{\Theta}_j \mid j \in J\},$$

J——为指标集，

记$\mathcal{U}_j$为$\tilde{\Theta}_j$的邻域族，

$$\mathcal{U}_j=\{\tilde{\Theta}_j \mid \tilde{\Theta}_j \in \boldsymbol{\Theta}_j,\ j \in J\},$$

记$\tilde{\Theta}_j$的拓扑为$\mathscr{T}$，即

$$\mathscr{T}=\{\mathcal{U}_j\},$$

记$(\boldsymbol{\Theta}, \mathscr{T})$为信息载体$x$的**认知程度拓扑空间**，则$\mathcal{U}_j$满足下述条件(常称邻域族条件)

1° $\forall \boldsymbol{\Theta}_j \in \mathcal{U}_j \Longrightarrow \tilde{\Theta}_j \in \boldsymbol{\Theta}_j$；

2° 若$\boldsymbol{\Theta}_j \supseteq \boldsymbol{\Theta}_i$，则$\boldsymbol{\Theta}_j \in \mathcal{U}_i$，$\forall \boldsymbol{\Theta}_i$；

3° 若$\boldsymbol{\Theta}_i$，$\boldsymbol{\Theta}_j \in \mathcal{U}_i$，则$\boldsymbol{\Theta}_j \cap \boldsymbol{\Theta}_i \in \mathcal{U}_i$；

4° 若$\boldsymbol{\Theta}_i \in \mathcal{U}_i$，则有$\boldsymbol{\Theta}_j \in \mathcal{U}_i$，进而，若 $\tilde{\Theta}_j \in \boldsymbol{\Theta}_j$则$\boldsymbol{\Theta}_i \in \mathcal{U}_j$.

证 由于上述条件是拓扑空间$(\boldsymbol{\Theta}, \mathscr{T})$成立的条件，因此只要证明在$\boldsymbol{\Theta}$上可建立拓扑空间，则命题得证.

1° 按定义1.2可认为$\boldsymbol{\Theta}$是连续集，则有

$$\boldsymbol{\Theta} \subseteq (a, 1] \subseteq (0, 1],$$

从而$\boldsymbol{\Theta}$是实轴R上的区间. 在实轴及其子空间上可建立各种拓扑空间。

2° 按定义 1.5，认为$\boldsymbol{\Theta}$是离散集，这时只要证明条件3°,4°，或者只要证明邻域族中子集的交与并是封闭的，则命题得证。

按定义1.2知，认知模式是指信息载体到集W的认知映射.在此集$W(\boldsymbol{\Theta})$中可按定义1.5分出子集与元素。按公理1.1，认知非

唯一，可包括认知方面非唯一。因此若Θ_i与Θ_j为Θ的子集，则Θ_i与Θ_j中的方面可以组合成一个新的方面进行认知，为此有

$$\Theta_i\cup\Theta_j\subseteq\Theta,\ \Theta_i\cup\Theta_j\in\mathscr{U}\in\mathscr{T},$$

也可以将Θ_i与Θ_j中的公共方面组合成一个新的方面进行认知，为此有

$$\Theta_i\cap\Theta_j\subseteq\Theta,\ \Theta_i\cap\Theta_j\in\mathscr{U}\in\mathscr{T},$$

因此命题得证。

附注1.5 当信息载体x为泛指的对象时，则x的认知程度拓扑空间$(\Theta,\mathscr{T})$意味着

*认知是无穷尽的。

*科学的发展是无止境的。

*认知受囿于时间、地点、环境、判断……。

*认知的方式是多种多样的。

附注1.6 信息载体x的认知程度拓扑空间$(\Theta,\mathscr{T})$，亦称为x的认知拓扑空间。一般的认知模式，是指认知拓扑空间上的认知模式。Θ可直呼为认知拓扑空间。认知模式的数字域可以扩大到负区，比如将虚的、假的认知程度作为负数，而且负值越大，虚假程度越大。现在为了简化定义，我们没有这样作，而是以$\theta=0$表示认知为零、为假、为虚，无认知与假认知未加区别。

例1.1 令x为教员，

$$\text{IFM}:\ x\longrightarrow W$$

为对x的认知模式。按公理1.1知，认知非唯一，认知方面非唯一。比如，

*教学，记为Θ_j(包括教学水平、教学效果、教学态度、教学方式……)。

*工作，记为Θ_k(包括工作情况、工作能力、工作责任心、工作强度、工作效果……)。

*人文，记为Θ_l(包括合作精神、价值观念、毅力……)。

*学科知识，记为Θ_m(包括数学、物理、化学……)。

*专长，记为Θ_n(包括学科专长、理论专长、操作专长……)。

*爱好兴趣，记为Θ_0(包括文娱、体育、社会……)。

*性格，记为Θ_p(包括内心的、外露的、现在的、过去的、少年期的、成年期的……)。

*社会关系，记为Θ_q(包括直系的、旁系的、血缘的、非血缘的……)。

*未来发展，记为Θ_r(包括近期、中期、远期……)。

*潜在能力，记为Θ_s(包括潜在的研究能力、潜在的工作能力、潜在的组织能力……)。

*经历，记为Θ_t(包括童年、少年、中年、老年……)。

……

为此，教员x的认知拓扑空间

$$\Theta = \bigcup_{h \in H} \Theta_h,$$

$$H = \{j, l, m, n, o, p, q, r, s, t, \cdots\}.$$

作为教员x的认知拓扑空间Θ中，教学认知程度$\tilde{\Theta}_j$是重要的，关键的。因此有

$$\text{for} \quad \forall \Theta_j \in \mathcal{U}_j \Longrightarrow \tilde{\Theta}_j \in \Theta_j,$$

倘使将Θ_h，$h \in H$，

$$H = \{j, l, m, n, o, p, q, r, s, t, \cdots\}$$

的某些子集的公共方面抽出进行认知，比如记时间内涵的认知程度为$\tilde{\Theta}_t$，则有

$$\tilde{\Theta}_t \in (\Theta_p \cap \Theta_t),$$

$$\tilde{\Theta}_t \in (\Theta_p \cap \Theta_r),$$

$$\cdots$$

显然，有

$$\tilde{\Theta}_t \in \Theta \quad 或 \quad \tilde{\Theta}_t \in \Theta_h \subseteq \Theta.$$

也可将Θ_h，$h \in H$的许多方面作组合认知，比如

$$\Theta_t \cup \Theta_o,$$

表示对x童年的各种爱好，少年的各种爱好，中年的各种爱好等

的认知，所以有

$$(\Theta_t \cup \Theta_o) \subseteq \Theta,$$

$$\Theta_t \cup \Theta_o \in \mathcal{U} \in \mathscr{T}.$$

总之，作为教员 x的认知拓扑$(\Theta, \mathscr{T})$，事实上是对x的一种多方面、多角度、多层次的了解。由于人、社会、环境、信息等的复杂性和多维性，一般来说对x的认知(其实可以说对任何人的认知)都是无穷尽的。

1.2 信息传递模式

定义1.6 令x为信息载体，X为信息载体集，$\{X\}$为X的集合。令τ为泛关系，它可以是影响、信息传递、认识、动作、作用……。若有$x, y \in X$，则称$x\tau y$为x到y的**泛关系**。关系 $x\tau y$可以表示：

*x的信息传递到y的关系；

*x的影响传递到y的关系；

*x的认识传递到y的关系；

*x对y的认知关系；

*x对y的作用关系；

*x对y的动作；

……

其中，以信息传递为主要关系，在不加说明的情况下，$x\tau y$ 表示 x 的信息传递到y的关系。

定义1.7 令x, y 为信息载体，X为信息载体集，τ为信息传递关系，IFM为认知，Θ_{xy}为实数集，$\tilde{\Theta}_{xy}$为 Θ_{xy}中数字，则称

$$\mathrm{IFM}:\ x\tau y \longrightarrow \Theta_{xy} \subseteq (a, 1] \subseteq (0, 1]$$

为x到y标定的信息传递模式，或简称**信息传递模式**。称

$$\mathrm{IFM}:\ x\tau y \longrightarrow \tilde{\Theta}_{xy} \in (a, 1]$$

为(标定)信息传递白化模式，或(标定)白化程度信息传递模式。

称Θ_{xy}为x到y**传递信息程度集**，或传递信息集；称$\tilde{\Theta}_{xy}$为x到y**传递信息认知(程)度**，或x到y信息传递程度。

定义1.8 令X为信息载体集，若在X上每个x可建立有意义、有定义的认知拓扑空间，则称X为信息载体的**认知开集族**，记为$\mathcal{O}$。当只涉及到信息载体时，称$\mathcal{O}$为**信息载体开集(族)**。

附注1.7 信息载体的认知开集族$\mathcal{O}$(或X)的内涵是$\mathcal{O}$中每个元素代表一个信息载体，每个信息载体有足够丰富的认知信息，这些认知信息的具体内涵并不清楚，然而每个载体在某个方面，或某些方面的认知程度是明了的。这样的信息载体集，为信息传递提供了基础，从而为定义完全信息传递提供了背景。

定义1.9 令$\mathcal{O}$为信息载体$x,y,\cdots\cdots$的认知开集族，令

$$\text{IFM}:\ x\tau y \longrightarrow \Theta_{xy} \subseteq (a,1],$$
$$\text{IFM}:\ y\tau x \longrightarrow \Theta_{yx} \subseteq (b,1]$$

为信息传递模式，

1° 若$x\tau y$是$y\tau x$的逆向传递关系，反之亦然，则当二者同时存在时，称xy间的**信息传递可逆**。

2° 若$a=b$，$a\gg 0$，则称x到y(或y到x)的信息传递完全可逆。

3° 若$a\gg 0$，$b\gg 0$，则称x到y与y到x的信息传递可逆。

4° 若$a\gg 0$(或$b\gg 0$)与$b\to 0$(或$a\to 0$)则称x与y的信息传递是不可逆的。

5° 若 $\text{IFM}:\ x\tau y \longrightarrow \tilde{\Theta}_{xy}=1,$

则称x到y的**信息传递是完全的**，信息传递程度为百分之百，毫无遗漏。

6° 若 $\text{IFM}:\ x\tau y \longrightarrow \tilde{\Theta}_{xy}=0,$

则称x到y的**信息传递通道堵塞**，x到y是不能传递信息的。

7° x到y的一般信息传递为

$$\text{IFM}:\ x\tau y \longrightarrow \tilde{\Theta}_{xy},\quad 0<\tilde{\Theta}_{xy}<1.$$

定义1.10 令$\mathcal{O}$为信息载体$x,y,z,\cdots$的认知开集族，当下

述条件满足时：

1° IFM：$x\tau x \longrightarrow \Theta_{xx} \subseteq (a_{xx}, 1]$，

2° 若IFM：$x\tau y \longrightarrow \Theta_{xy} \subseteq (a_{xy}, 1]$，

则有

$$\text{IFM}：y\tau x \longrightarrow \Theta_{yx} \subseteq (a_{yx}, 1]，$$

3° 若 $\text{IFM}：x\tau y \longrightarrow \Theta_{xy} \subseteq (a_{xy}, 1]$，

$$\text{IFM}：y\tau z \longrightarrow \Theta_{yx} \subseteq (a_{yz}, 1]，$$

那么 $\text{IFM}：x\tau z \longrightarrow \Theta_{xz} \subseteq (a_{xz}, 1]$

成立，

4° $a_{ij} = a_{ji}$， $a_{ij} \gg 0$， $i, j \in \{x, y, z\}$，

则称

$$(\mathscr{O}, \tau)$$

为简单的**信息传递空间**。

定义1.11 若

1° 定义1.10的条件全部满足，

2° 有 $\text{IFM}：x\tau x \longrightarrow \tilde{\Theta}_{xx} = 1$，

3° $\tilde{\Theta}_{ij} = \tilde{\Theta}_{ji}$ $\forall i$， $\forall j$， $i, j \in \{x, y, z\}$，

则称

$$(\mathscr{O}, \tau)$$

为简单的**完全信息传递空间**。

附注1.8 定义1.10与1.11的意义

1° $\text{IFM}：x\tau x \longrightarrow \Theta_{xx} \subseteq (a_{xx}, 1]$，

表示信息自己到自己的传递。这种传递既表示某种逻辑推理的必需性；又表示信息的记忆，信息的使用和加工，……。

2° 若存在

$$\text{IFM}：x\tau y \longrightarrow \Theta_{xy} \subseteq (a_{xy}, 1]，$$

则必有

$$\text{IFM}：y\tau x \longrightarrow \Theta_{yx} \subseteq (a_{yx}, 1]，$$

表示信息可以从x传递到 y，也可以从y传递到x，是双向传递的特征。

3° 若存在

$$\text{IFM:}\ x\tau y \longrightarrow \Theta_{xy} \subseteq (a_{xy}, 1],$$

$$\text{IFM:}\ y\tau z \longrightarrow \Theta_{yz} \subseteq (a_{yz}, 1],$$

则必有

$$\text{IFM:}\ x\tau z \longrightarrow \Theta_{xz} \subseteq (a_{xz}, 1],$$

表示信息传递的延续性、中续性、媒介性。

命题1.3 简单信息传递空间，具有等价关系。

证 见附注1.8。

附注1.9 根据公理1.1与附注1.1知，无论是认知模式

$$\text{IFM:}\ x \longrightarrow \tilde{\Theta}$$

的$\tilde{\Theta}$(或Θ)，或者是信息传递模式

$$\text{IFM:}\ x\tau y \longrightarrow \tilde{\Theta}_{xy}$$

的 $\tilde{\Theta}_{xy}$ 都是信息。因此，信息作为一个整体或者作为“认识事物的根据”，都是灰的。换句话说，信息是灰概念。由于信息是灰概念，所以具有可延伸、可构造、可升华……的特点。认知拓扑的存在，从认知模式到传递模式的延伸，都体现这一特点，都体现了公理1.1的意义。

命题1.4 基于信息为灰概念，所以有下述等价关系

1° $\Theta_{xy} = \{\tilde{\Theta}_{xy}\} = \{w^{\circ}_{xy}\}$;

2° $\tilde{\Theta}_{xy} = w^{\circ}_{xy} = \dfrac{1}{g^{\circ}}$;

3° $\tilde{\Theta}_{xy} = \tilde{\otimes}_{xy} \in \otimes_{xy}$;

4° $\tilde{\Theta} = \tilde{\otimes} \in \otimes$.

附注1.10 x到y的信息传递程度 $\tilde{\Theta}_{xy}$ 是x到y信息传递的白化度w°_{xy}，也是信息从x到y灰度 g°_{xy}的倒数。

定理1.1 令 (X, ρ)为量度空间，$x \in X$，$y \in X$，$\rho(x,y)$代表x与y之间的**距离**(信息)，$\tilde{\rho}(x,y)$代表$\rho(x,y)$的数字表现，当且仅当下述条件满足：

1° $\rho(x,y) \Longrightarrow x\tau y$ or $y\tau x$,

2° $\tilde{\Theta}_{xy} \Longrightarrow (g^{\circ}_{xy})^{-1}$, $\tilde{\Theta}_{xy} = w^{\circ}_{xy}$,

$g^{\circ}_{xy} = \tilde{\rho}(x,y) + 1$,