# 平面直角坐标直接改算法

H.B.阿瓦耶夫著

測繪出版社

# 平面直角坐标直接改算法

H. B. 阿瓦耶夫著
胡国理譯
魯福校

测绘出版社

1958·北京

Н. В. АВАЕВ

# МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОЕКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ В СИСТЕМУ КООРДИНАТ 1942г

РЕДАТЦИОННЫЙ ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ОТДЕЛ ВТС

МОСКВА 1955

本書叙述了將不同系統的平面直角坐标直接改算到 42 年系統的方法，本法同样适用于將不同系統的平面直角坐标直接改算为任何一种不同投影的坐标系統。

本法优点：在改算坐标时，只要在改算区域內有一些同时具有兩种系統坐标的点，即可进行改算，而不管这兩种系統所采用的投影，橢圓体及其定向如何。应用本法改算坐标的精度可达 0.1 公尺以內，对于补充網点来說，完全滿足現行細則的要求。

本書可作为我国大地計算工作的參考書。

## 平面直角坐标直接改算法

著者 Н. В. 阿瓦耶夫

譯者 胡國理

出版者 測繪出版社

北京宣武門外永光寺西街 3 号

北京市書刊出版業營業許可証出字第 0[illegible]号

發行者 新华書店

印刷者 天津人民印刷厂

印数(京)1—3,000冊　1958年5月北京第1版

开本31″×43″1/27　1958年5月第1次印刷

字数79,576　印張3 17/27　插頁2

定价(10)0.75元

# 目　录

## 附 录

# 引　　言

在大地計算的实际工作中，最值得注意的是，將平面直角坐标从一个系統改算到另一个系統，特別是改算到1942年坐标系統的問題。

大家知道，当假定的坐标原点改变，而投影仍旧不变的时候，要改算平面直角坐标，并非难事。坐标換算由一个六度帶到另一（相鄰的）六度帶，由一个三度帶到相鄰三度帶，以及由三度帶到六度帶，就屬于这种改算。

至于把在大小和定向与克拉索夫斯基橢圓体相异的橢圓体上，并按与高斯投影相异的投影法算出来的平面直角坐标直接改算到1942年坐标系，計算則非常复杂和繁重。

*B*·*П*· 莫洛卓夫和 *E*·*E*· 畢留可夫所創的方法（由一种投影改算到另一种投影）是比較簡單的坐标改算法。然而，这些方法由于下列原因，仍不能滿足实际工作的要求：

1. 坐标改算时，需要进行很多次的演算：*B*·*П*· 莫洛卓夫所拟的計算格式需要演算 18 次， *E*·*E*· 畢留可夫所拟的也要演算16次之多；
2. 坐标改算公式中的常数，計算起来非常繁杂；
3. 因为他們所得出的公式，沒有顧及到橢圓体大小和定向的改变，故不能直接改算到1942年坐标系。

本書所介紹的，是將不同系統的平面直角坐标直接改算到1942年坐标系統的方法。此法的基础就是：当函数的某些值为已知时，用內插法將兩引数的函数表扩大。

# 第一章　將不同系統的平面直角坐标直接改算到1942年坐标系統的原理

## 改　算　公　式

在本書以后的叙述中，屬于1942年坐标系統的坐标，称为42年系統中的坐标，而屬于其他系統的平面直角坐标，称为地方系統中的坐标。

为确定各种系統坐标之間的数学关系起見，假定有一些点，它們在42年系統和地方系統中的坐标均为已知。为了便于推导，

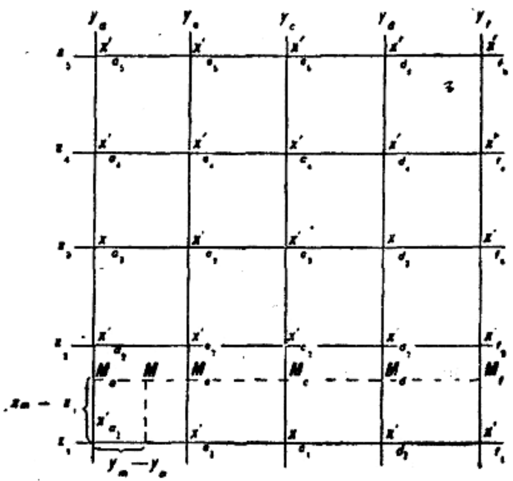

圖　1

我們再假定这些点在地方系統中的横坐标軸和縦坐标軸上是等間隔的。点的这种排列，就相当于地方系統中的坐标網。

設这些点在地方系統中的縦坐标和横坐标分别以 $x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$，…，$x_n$ 和 $y_a$，$y_b$，$y_c$，$y_d$，…，$y_q$ 表示，而在 42 年系統中的縦坐标，則以 $x'_{a_1}$，$x'_{a_2}$，$x'_{a_3}$，$x'_{a_4}$，…$x'_{a_n}$；$x'_{b_1}$，$x'_{b_2}$，$x'_{b_3}$，$x'_{b_4}$，…，$x'_{b_n}$；$x'_{c_1}$，$x'_{c_2}$，$x'_{c_3}$，$x'_{c_4}$，…，$x'_{c_n}$。…表示（如圖 1）。

將这些点在 42 年系統中的縦坐标值列成表格的形式，而以各点在地方系統中的坐标为引数。

| $x \backslash y$ | $y_a$ | $y_b$ | $y_c$ | $y_d$ | $y_f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $x'_{a_1}$ | $x'_{b_1}$ | $x'_{c_1}$ | $x_{d_1}$ | $x'_{f_1}$ |
| $x_2$ | $x_{a_2}$ | $x'_{b_2}$ | $x'_{c_2}$ | $x_{d_2}$ | $x_{f_2}$ |
| $x_3$ | $x'_{a_2}$ | $x'_{b_3}$ | $x'_{c_3}$ | $x'_{d_3}$ | $x'_{f_3}$ |
| $x_4$ | $x'_{a_4}$ | $x'_{b_4}$ | $x'_{c_4}$ | $x'_{d_4}$ | $x'_{f_4}$ |
| $x_5$ | $x'_{a_5}$ | $x'_{b_5}$ | $x'_{c_5}$ | $x'_{d_5}$ | $x'_{f_5}$ |

將上述各点在42年系統中的縦坐标視为双引数（卽以点在地方系統中的縦、横坐标为引数）函数的特定值，那么，从地方系統到 42 年系統的坐标改算，就变为用內插法决定中間函数值了。

如果 42 年系統中的縦坐标只是地方系統中縦坐标的函数，則它們的数学关系可用已知的牛頓內插公式来表示。但 42 年系

統中的縱坐标不仅是地方系統中縱坐标的函数，而且还是地方系統中横坐标的函数，所以它們的数学关系，須用双引数函数的內插公式来表示。

为了推导公式，采用兩次連續內插的方法，即先沿縱坐标軸內插，求出一系列的中間函数值，然后再根据它們，沿横坐标軸进行內插。由兩次內插的結果，即得出与所給的引数相应的函数值。

如圖 1，設 $M$ 点在地方系統中的坐标 $x_m$ 和 $y_m$ 为已知。利用牛頓內插公式和表內各已知点在 42 年系統中的縱坐标值，可以得出輔助点 $M_a$，$M_b$，$M_c$， $M_d$， $M_f$， …（这些点在地方系統中的縱坐标为 $x_m$，而横坐标分別为 $y_a$， $y_b$， $y_c$， $y_d$， $y_f$…）在 42 年系統中的縱坐标。

9 頁是 42 年系統中各縱坐标的起算較差表。

| 与起算較差相关联的各已知点在地方系統中的坐标 | 一 次 較 差 | 二 次 較 差 | 三 次 較 差 | 四 次 較 差 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$, $y_a$ | $\Delta' x_{a_1}=x'_{a_2}-x'_{a_1}$ | $\Delta'' x_{a_1}=\Delta' x_{a_2}-\Delta' x_{a_1}$ | $\Delta''' x_{a_1}=\Delta'' x_{a_2}-\Delta'' x_{a_1}$ | $\Delta^{IV} x_{a_1}=\Delta''' x_{a_2}-\Delta''' x_{a_1}$ | … |
| $x_1$, $y_b$ | $\Delta' x_{b_1}=x'_{b_2}-x'_{b_1}$ | $\Delta'' x_{b_1}=\Delta' x_{b_2}-\Delta' x_{b_1}$ | $\Delta''' x_{b_1}=\Delta'' x_{b_2}-\Delta'' x_{b_1}$ | $\Delta^{IV} x_{b_1}=\Delta''' x_{b_2}-\Delta''' x_{b_1}$ | … |
| $x_1$, $y_c$ | $\Delta' x_{c_1}=x'_{c_2}-x'_{c_1}$ | $\Delta'' x_{c_1}=\Delta' x_{c_2}-\Delta' x_{c_1}$ | $\Delta''' x_{c_1}=\Delta'' x_{c_2}-\Delta'' x_{c_1}$ | $\Delta^{IV} x_{c_1}=\Delta''' x_{c_2}-\Delta''' x_{c_1}$ | … |
| $x_1$, $y_d$ | $\Delta' x_{d_1}=x'_{d_2}-x'_{d_1}$ | $\Delta'' x_{d_1}=\Delta' x_{d_2}-\Delta' x_{d_1}$ | $\Delta''' x_{d_1}=\Delta'' x_{d_2}-\Delta'' x_{d_1}$ | $\Delta^{IV} x_{d_1}=\Delta''' x_{d_2}-\Delta''' x_{d_1}$ | … |
| $x_1$, $y_f$ | $\Delta' x_{f_1}=x'_{f_2}-x'_{f_1}$ | $\Delta'' x_{f_1}=\Delta' x_{f_2}-\Delta' x_{f_1}$ | $\Delta''' x_{f_1}=\Delta'' x_{f_2}-\Delta'' x_{f_1}$ | $\Delta^{IV} x_{f_1}=\Delta''' x_{f_2}-\Delta''' x_{f_1}$ | … |
| ……… | ……………………… | ……………………… | ……………………… | ……………………… | … |

以 $m$ 表示比例式 $\frac{x_m - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_m - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{x_m - x_1}{x_4 - x_3} = \cdots$，并利用所組成的起算較差，即可求得各輔助点 $M_a$，$M_b$，$M_c$，$M_d$，$M_f\cdots$在 42 年系統中的縱坐标：

$$x'_{m_a} = x'_{a_1} + \Delta' x_{a_1} \cdot m + \Delta'' x_{a_1} \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} +$$

$$+ \Delta''' x_{a_1} \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} +$$

$$+ \Delta^{\mathrm{IV}} x_{a_1} \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

$$x'_{m_b} = x'_{b_1} + \Delta' x_{b_1} \cdot m + \Delta'' x_{b_1} \frac{m(m-1)}{1.2} +$$

$$+ \Delta''' x_{b_1} \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} +$$

$$+ \Delta^{\mathrm{IV}} x_{b_1} \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

$$x'_{m_c} = x'_{c_1} + \Delta' x_{c_1} \cdot m + \Delta'' x_{c_1} \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} +$$

$$+ \Delta''' x_{c_1} \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} +$$

$$+ \Delta^{\mathrm{IV}} x_{c_1} \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

$$x'_{m_d} = x'_{d_1} + \Delta' x_{d_1} \cdot m + \Delta'' x_{d_1} \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} +$$

$$+ \Delta''' x_{d_1} \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} +$$

$$+ \Delta^{\mathrm{IV}} x_{d_1} \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

$$x'_{m_f} = x'_{f_1} + \Delta' x_{f_1} \cdot m + \Delta'' x_{f_1} \frac{m(m-1)}{1.2} +$$

$$+\Delta'''x_{f_1}\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}+$$

$$+\Delta^{\mathrm{IV}}x_{f_1}\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\cdots$$

..................................................................

根据所得出的縦坐标，組成供沿横坐标軸內插之用的起算較差：

一次較差

$$\delta'_m=x'_{m_b}-x'_{m_a}=(x'_{b_1}-x'_{a_1})+(\Delta'x_{b_1}-\Delta'x_{a_1})m+$$

$$+(\Delta''x_{b_1}-\Delta''x_{a_1})\frac{m(m-1)}{1\cdot2}+$$

$$+(\Delta'''x_{b_1}-\Delta'''x_{a_1})\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}+$$

$$+(\Delta^{\mathrm{IV}}x_{b_1}-\Delta^{\mathrm{IV}}x_{a_1})\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\cdots;$$

二次較差

$$\delta''_m=(x'_{m_c}-x'_{m_b})-(x'_{m_b}-x'_{m_a})=$$

$$=[(x'_{c_1}-x'_{b_1})-(x'_{b_1}-x'_{a_1})]+$$

$$+[(\Delta'x_{c_1}-\Delta'x_{b_1})-(\Delta'x_{b_1}-\Delta'x_{a_1})]m+$$

$$+[(\Delta x''_{c_1}-\Delta''x_{b_1})-(\Delta''x_{b_1}-\Delta''x_{a_1})]\frac{m(m-1)}{1\cdot2}+$$

$$+[(\Delta'''x_{c_1}-\Delta'''x_{b_1})-(\Delta'''x_{b_1}-\Delta'''x_{a_1})]\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}+$$

$$+[(\Delta^{\mathrm{IV}}x_{c_1}-\Delta^{\mathrm{IV}}x_{b_1})-(\Delta^{\mathrm{IV}}x_{b_1}-\Delta^{\mathrm{IV}}x_{a_1})]$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\cdots;$$

三次較差

$$\delta'''_m=[(x'_{m_d}-x'_{m_c})-(x'_{m_c}-x'_{m_b})]-$$

$$-[(x'_{m_c}-x'_{m_b})-(x'_{m_b}-x'_{m_a})]=$$

$$=\{[(x'_{d_1}-x'_{c_1})-(x'_{c_1}-x'_{b_1})]-$$

$$-[(x'_{c_1}-x'_{b_1})-(x'_{b_1}-x'_{a_1})]\}+$$

$$+\{[(\Delta' x_{d_1}-\Delta' x_{c_1})-(\Delta' x_{c_1}-\Delta' x_{b_1})]-$$

$$-[(\Delta' x_{c_1}-\Delta' x_{b_1})-(\Delta' x_{b_1}-\Delta' x_{a_1})]\}m+$$

$$+\{[(\Delta'' x_{d_1}-\Delta'' x_{c_1})-(\Delta'' x_{c_1}-\Delta'' x_{b_1})]-$$

$$-[(\Delta'' x_{c_1}-\Delta'' x_{b_1})-(\Delta'' x_{b_1}-\Delta'' x_{a_1})]\}\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}+$$

$$+\{[(\Delta''' x_{d_1}-\Delta''' x_{c_1})-(\Delta''' x_{c_1}-\Delta''' x_{b_1})]-$$

$$-[(\Delta''' x_{c_1}-\Delta''' x_{b_1})-(\Delta''' x_{b_1}-\Delta''' x_{a_1})]\}\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+$$

$$+\{[(\Delta^{IV} x_{d_1}-\Delta^{IV} x_{c_1})-(\Delta^{IV} x_{c_1}-\Delta^{IV} x_{b_1})]-$$

$$-[(\Delta^{IV} x_{c_1}-\Delta^{IV} x_{b_1})-(\Delta^{IV} x_{b_1}-\Delta^{IV} x_{a_1})]\}$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots;$$

四次較差

$$\delta^{IV}_m=\{[(x'_{m_f}-x'_{m_d})-(x'_{m_d}-x'_{m_c})]-$$

$$-[(x'_{m_d}-x'_{m_c})-(x'_{m_c}-x'_{m_b})]\}-$$

$$-\{[(x'_{m_d}-x'_{m_c})-(x'_{m_c}-x'_{m_b})]-$$

$$-[(x'_{m_c}-x'_{m_b})-(x'_{m_b}-x'_{m_a})]\}=$$

$$=(\{[(x'_{f_1}-x'_{d_1})-(x'_{d_1}-x'_{c_1})]-$$

$$-[(x'_{d_1}-x'_{c_1})-(x'_{c_1}-x'_{b_1})]\}-$$

$$\{[(x'_{d_1}-x'_{c_1})-(x'_{c_1}-x'_{b_1})]-$$

$$-[(x'_{c_1}-x'_{b_1})-(x'_{b_1}-x'_{a_1})]\})+$$

$$(\{[(\Delta' x_{f_1}-\Delta' x_{d_1})-(\Delta' x_{d_1}-\Delta' x_{c_1})]-$$

$$[(\Delta' x_{d_1}-\Delta' x_{c_1})-(\Delta' x_{c_1}-\Delta' x_{b_1})]\}-$$

$$\{[(\Delta' x_{d_1}-\Delta' x_{c_1})-(\Delta' x_{c_1}-\Delta' x_{b_1})]-$$

$$[(\Delta' x_{c_1}-\Delta' x_{b_1})-(\Delta' x_{b_1}-\Delta' x_{a_1})]\})m+$$

$$+(\{[(\Delta'' x_{f_1}-\Delta'' x_{d_1})-(\Delta'' x_{d_1}-\Delta'' x_{c_1})]-$$

$$[(\Delta'' x_{d_1}-\Delta'' x_{c_1})-(\Delta'' x_{c_1}-\Delta'' x_{b_1})]\}-$$

$$-\{[(\Delta'' x_{d_1}-\Delta'' x_{c_1})-(\Delta''_{c_1}-\Delta'' x_{b_1})]-$$

$$-[(\Delta'' x_{c_1}-\Delta'' x_{b_1})-(\Delta'' x_{b_1}-\Delta'' x_{a_1})]\})\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}+$$

$$+(\{[(\Delta''' x_{f_1}-\Delta''' x_{d_1})-(\Delta''' x_{d_1}-\Delta''' x_{c_1})]-$$

$$-[(\Delta''' x_{d_1}-\Delta''' x_{c_1})-(\Delta''' x_{c_1}-\Delta''' x_{b_1})]\}-$$

$$-\{[(\Delta''' x_{d_1}-\Delta''' x_{c_1})-(\Delta''' x_{c_1}-\Delta''' x_{b_1})]-$$

$$-[(\Delta''' x_{c_1}-\Delta''' x_{b_1})-(\Delta''' x_{b_1}-\Delta''' x_{a_1})]\})$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+(\{[(\Delta^{IV} x_{f_1}-\Delta^{IV} x_{d_1})-$$

$$-({}^{IV} x_{d_1}-\Delta^{IV} x_{c_1})]-[(\Delta^{IV} x_{d_1}-\Delta^{IV} x_{c_1})-$$

$$-(\Delta^{IV} x_{c_1}-\Delta^{IV} x_{b_1})]\}-\{[(\Delta^{IV} x_{d_1}-\Delta^{IV} x_{c_1})-$$

$$-(\Delta^{IV} x_{c_1}-\Delta^{IV} x_{b_1})]-[(\Delta^{IV} x_{c_1}-\Delta^{IV} x_{b_1})-$$

$$-(\Delta^{IV} x_{b_1}-\Delta^{IV} x_{a_1})]\})\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

細察所組成的各次較差 $\delta'_m$，$\delta''_m$，$\delta'''_m$，$\delta^{IV}_m$ 等等的第一項，可以看出，它們就是沿橫坐标軸內插时的起算較差，即：

$$(x'_{b_1}-x'_{a_1})\text{——一次的；}$$

$$[(x'_{c_1}-x'_{b_1})-(x'_{b_1}-x'_{a_1})]\text{——二次的；}$$

$$\{[(x'_{d_1}-x'_{c_1})-(x'_{c_1}-x'_{b_1})]-[(x'_{c_1}-x'_{b_1})-$$
$$-(x'_{b_1}-x'_{a_1})]\}\text{——三次的；}$$

$$(\{[(x'_{f_1}-x'_{d_1})-(x'_{d_1}-x'_{c_1})]-[(x'_{d_1}-x'_{c_1})-$$
$$-(x'_{c_1}-x'_{b_1})]\}-\{[(x'_{d_1}-x'_{c_1})-(x'_{c_1}-x'_{b_1})]-$$
$$-[(x'_{c_1}-x'_{b_1})-(x'_{b_1}-x'_{a_1})]\})\text{——四次的；}$$

………………………………………………………………

这些起算較差是相应于地方系統中坐标为 $x_1$ 和 $y_a$ 的已知点的。較差 $\delta'_m$，$\delta''_m$，$\delta'''_m$，$\delta^{IV}_m$ 的其余各項（和第一項的形式相同，所不同者仅在于用相应的較差以代替縱坐标的值）表示起算較差

| 第　一　次　較　差 | 第　二　次　較　差 |
|---|---|
| $(x'_{b_1}-x'_{a_1})=\delta' x_{a_1}$ | $[({}'_{c_1}-x'_{b_1})-(x'_{b_1}-x'_{a_1})]=$ $=\delta'' x_{a_1}$ |
| $(\Delta' x_{b_1}-\Delta' x_{a_1})=$ $=d'\Delta' x_{a_1}$ | $[(\Delta' x_{c_1}-\Delta' x_{b_1})-$ $-(\Delta' x_{b_1}-\Delta' x_{a_1})]=$ $=d''\Delta' x_{a_1}$ |
| $(\Delta'' x_{b_1}-\Delta'' x_{a_1})=$ $=d'\Delta'' x_{a_1}$ | $[(\Delta'' x_{c_1}-\Delta'' x_{b_1})-$ $-(\Delta'' x_{b_1}-\Delta'' x_{a_1})]=$ $=d''\Delta'' x_{a_1}$ |
| $(\Delta''' x_{b_1}-\Delta''' x_{a_1})=$ $=d'\Delta''' x_{a_1}$ | $[(\Delta''' x_{c_1}-\Delta''' x_{b_1})-$ $-(\Delta''' x_{b_1}-\Delta''' x_{a_1})]=$ $=d''\Delta''' x_{a_1}$ |
| $(\Delta^{IV} x_{b_1}-\Delta^{IV} x_{a_1})=$ $=d'\Delta^{IV} x_{a_1}$ | $[(\Delta^{IV} x_{c_1}-\Delta^{IV} x_{b_1})-$ $-(\Delta^{IV} x_{b_1}-\Delta^{IV} x_{a_1})]=$ $=d''\Delta^{IV} x_{a_1}$ |

$\Delta' x_a$，$\Delta'' x_a$，$\Delta''' x_a$，$\Delta^{IV} x_a$ 的变化，这种变化取决于点 $M$ 在地方系統中沿横坐标軸到假定原点（$x_1$，$y_a$）的距离。

引入下列符号：

| 第　三　次　較　差 | |
|---|---|
| $\{[(x'_{d_1}-x'_{c_1})-(x'_{c_1}-x'_{b_1})]-$ $-[(x'_{c_1}-x'_{b_1})-$ $-(x'_{b_1}-x'_{a_1})]\}=\delta''' x_{a_1}$ | ………………………… |
| $\{[(\Delta' x_{d_1}-\Delta' x_{c_1})-$ $-(\Delta' x_{c_1}-\Delta' x_{b_1})]-$ $-[(\Delta' x_{c_1}-\Delta' x_{b_1})-$ $-(\Delta' x_{b_1}-\Delta' x_{a_1})]\}=$ $=d'''\Delta' x_{a_1}$ | ………………………… |
| $\{[(\Delta'' x_{d_1}-\Delta'' x_{c_1})-$ $-(\Delta'' x_{c_1}-\Delta'' x_{b_1})]-$ $-[(\Delta'' x_{c_1}-\Delta'' x_{b_1})-$ $-(\Delta'' x_{b_1}-\Delta'' x_{a_1})]\}=$ $=d'''\Delta'' x_{a_1}$ | ………………………… |
| $\{[(\Delta''' x_{d_1}-\Delta''' x_{c_1})-$ $-(\Delta''' x_{c_1}-\Delta''' x_{b_1})]-$ $-[(\Delta''' x_{c_1}-\Delta''' x_{b_1})-$ $-(\Delta''' x_{b_1}-\Delta''' x_{a_1})]\}=$ $=d'''\Delta''' x_{a_1}$ | ………………………… |
| $\{[(\Delta^{IV} x_{d_1}-\Delta^{IV} x_{c_1})-$ $-(\Delta^{IV} x_{c_1}-\Delta^{IV} x_{b_1})]-$ $-[(\Delta^{IV} x_{c_1}-\Delta^{IV} x_{b_1})-$ $-(\Delta^{IV} x_{b_1}-\Delta^{IV} x_{a_1})]\}=$ $=d'''\Delta^{IV} x_{a_1}$ | ………………………… |

將它們代入起算較差式中，即得出沿横坐标軸內插的起算較差的下列形式：

一次較差

$$\delta'_m=\delta' x_{a_1}+(d'\Delta' x_{a_1})m+(d'\Delta'' x_{a_1})\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}+$$

$$+(d'\Delta''' x_{a_1})\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+$$

$$+(d'\Delta^{\mathrm{IV}} x_{a_1})\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots,$$

二次較差

$$\delta''_m=\delta'' x_{a_1}+(d''\Delta' x_{a_1})m+(d''\Delta'' x_{a_1})\frac{m(m-1)}{1.2}+$$

$$+(d''\Delta''' x_{a_1})\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+$$

$$+(d''\Delta^{\mathrm{IV}} x_{a_1})\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots,$$

三次較差

$$\delta'''_m=\delta''' x_{a_1}+(d'''\Delta' x_{a_1})m+(d'''\Delta'' x_{a_1})\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}+$$

$$+(d'''\Delta''' x_{a_1})\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+$$

$$+(d'''\Delta^{\mathrm{IV}} x_{a_1})\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots,$$

四次較差

$$\delta^{\mathrm{IV}}_m=\delta^{\mathrm{IV}} x_{a_1}+(d^{\mathrm{IV}}\Delta' x_{a_1})m+(d^{\mathrm{IV}}\Delta'' x_{a_1})\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}+$$

$$+(d^{\mathrm{IV}}\Delta''' x_{a_1})\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+$$

$$+(d^{\mathrm{IV}}\Delta^{\mathrm{IV}} x_{a_1})\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots,\text{ 等等。}$$

利用輔助点 $M_a$ 在42年系統中的縱坐标和沿横坐标軸內插的