湖南省普通高校成人教育系列教材

高等数学（上）

■ 湖 南 省 教 育 科 学 研 究 院
■ 湖南省成教学会成教研究专业委员会
组编 审定

◎ 朱惠延　谭琼华　主编
◎ 黄立宏　主审

GAODENGSHUXUE

【理工类】

湖南人民出版社

湖南省普通高校成人教育系列教材

高等数学（上）

■ 湖 南 省 教 育 科 学 研 究 院
■ 湖南省高教学会成教研究专业委员会 组编 审定

◎ 朱惠延　谭琼华　主编
◎ 黄立宏　　　　　主审

GAODENGSHUXUE

湖 南 人 民 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册:理工类/朱惠延,谭琼华主编.—长沙:湖南人民出版社,2005.12

ISBN 7-5438-4244-0

Ⅰ.高... Ⅱ.①朱...②谭... Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 155242 号

责任编辑:杜小念
装帧设计:卜艳冰

高等数学(理工类)上册

朱惠延 谭琼华 主编

*

湖南人民出版社出版、发行

网址:http://www.hnppp.com

(长沙市营盘东路 3 号 邮编:410005)

湖南省新华书店经销 国防科大印刷厂印刷

2005 年 12 月第 1 版第 1 次印刷

开本:787×1092 1/16 印张:9

字数:198,000 印数:1-10,000

ISBN7-5438-4244-0
G·1013 定价:12.00 元

湖南省普通高等学校
成人教育教材编写指导委员会

湖南省普通高等学校
成人教育教材编审委员会

前　言

根据教育部加强教材建设和管理的文件精神，在省教育厅的直接领导和支持下，湖南省教育科学研究院和湖南省普通高等成教研究专业委员会共同组织编写了湖南省普通高校成人教育系列教材，并于2004年成立了湖南省普通高校成人教育教材编写指导委员会和湖南省普通高校成人教育教材编审委员会。在对我省普通高等学校成人教育所用教材进行充分调查的基础上，研究制定了组织编写出版成人教育系列教材的实施计划。经全省普通高校学校申请推荐、专家评审、教材编写指导委员会审定，实行主编负责制。2005年3月首期编写出版了《计算机应用基础教程》《英语基础语法》《学士学位英语考试指南》等4本教材，本期编写出版《大学语文》《管理学》《高等数学》《线性代数》《概率论与数理统计》等6本教材。

湖南省普通高等学校成人教育系列教材充分考虑了成人教育的多学科多层次和学员在职学习的特点，本着为成人教育服务的目的，在保证教材科学性的前提下，力求教材适应成人学员自学，注重加强教材的应用性。该系列教材作为普通高等学校成人教育的本科和专科层次的教材，在教材内容上保持了一定广度，理论上保持了一定深度，各校在教学中，可根据教学计划和学员的情况进行教材内容的选用。

本书在编写出版过程中得到了各级领导、各高等学校的大力支持，整套教材凝聚了众多教授、科研人员和工作人员的集体智慧，谨在此对本书付出辛勤劳动的全体人员表示衷心感谢！

本册为理工类《高等数学》（上册），全书共6章，第1～2章由朱砾编写，第3～4章由谭琼华编写，第5～6章由朱惠延编写。

由于编写和出版时间仓促，书中难免存在错误，请各学校将使用过程中发现的问题及时反馈给我们，以便再版时修正、完善。

湖南省教育科学研究院
湖南省普通高校成教研究专业委员会
2005年10月15日

目　　录

第一章　函数与极限

函数是对现实世界中各种变量之间相互依存关系的一种抽象．所谓函数关系就是变量之间的依赖关系，在数学、自然科学、经济学和管理科学的研究中，经常会遇到函数关系；极限方法是研究变量的一种基本方法，本章将介绍函数、极限和函数连续性等基本概念．

第一节　函　　数

一、函数的概念

自然科学、经济学和管理科学的研究中各种关系是相互联系和不断发展的，当我们运用抽象的方法研究它们的数量关系时，就必须从实际出发，依据正确的理论，撇开某些次要因素或假定某些因素为常量，建立有关变量之间的函数关系，去进行相应的理论分析．

1．函数的定义

如果当变量 x 在其变化范围内任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值与它对应，则称 y 是 x 的函数．变量 x 的变化范围叫做这个函数的定义域．通常 x 叫做自变量，y 叫做因变量．

注　为了表明 y 是 x 的函数，我们用记号 $y=f(x)$、$y=F(x)$等来表示．这里的字母“f”、“F”表示 y 与 x 之间的对应法则即函数关系，它们是可以任意采用不同的字母来表示的．

2．函数的表示

a)：解析法：用数学式子表示自变量和因变量之间的对应关系的方法即是解析法．

例 1　直角坐标系中，半径为 r、圆心在原点的上半圆的方程是：$y=\sqrt{r^2-x^2}$

b)：表格法：将一系列的自变量值与对应的函数值列成表来表示函数关系的方法即是表格法．

例 2　在实际应用中，我们经常会用到的平方表，三角函数表等都是用表格法表示的函数．

c)：图示法：用坐标平面上曲线来表示函数的方法即是图示法．一般用横坐标表示自变量，纵坐标表示因变量．

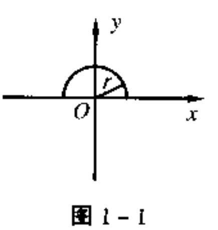


图 1－1

例 3　直角坐标系中，半径为 r、圆心在原点的上半圆用图示法

表示为如图 1-1 的形式。

3. 函数的几何性质

(1) 单调性

如果函数$f(x)$在区间 (a, b) 内随着 x 增大而增大，即：对于 (a, b) 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，有

$$f(x_1) < f(x_2)$$

则称函数在区间 (a, b) 内是单调增加的，如图 1-2.

如果函数$f(x)$在区间 (a, b) 内随着 x 增大而减少，即：对于 (a, b) 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

则称函数$f(x)$在区间 (a, b) 内是单调减少的. 如图 1-3. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

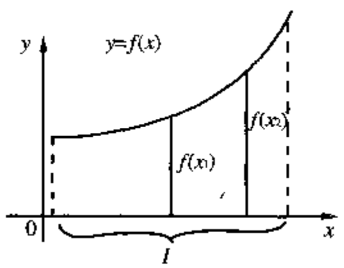


图 1-2

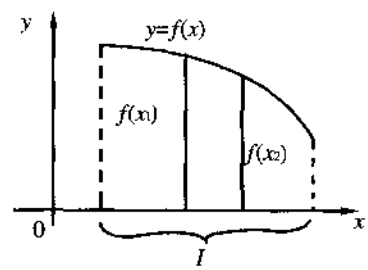


图 1-3

例 4　函数$f(x) = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上是单调减小的，在区间 $(0, +\infty)$ 上是单调增加的.

(2) 有界性

如果对属于某一区间 I 的所有 x 值总有 $|f(x)| \leqslant M$ 成立，其中 M 是一个与 x 无关的常数，那么我们就称$f(x)$在区间 I 有界，否则便称无界.

一个函数，如果在其整个定义域内有界，则称为有界函数.

例 5　函数 $\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的.

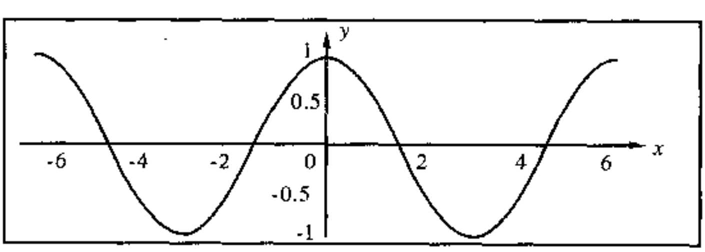


图 1-4

(3) 奇偶性

如果函数$f(x)$的定义域关于原点对称，且对于定义域内的任意 x 都满足

$$f(-x) = f(x),$$

则$f(x)$叫做偶函数．如图 1－5 所示．

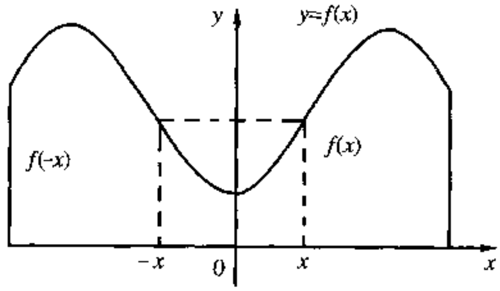


图 1－5

如果函数$f(x)$的定义域关于原点对称，且对于定义域内的任意 x 都满足

$$f(-x)=-f(x),$$

则$f(x)$叫做奇函数．如图 1－6 所示．

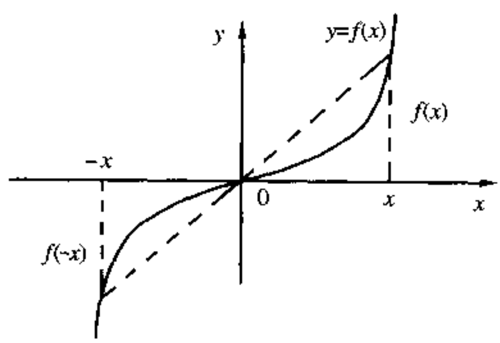


图 1－6

注　偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称．

(4) 周期性

对于函数$f(x)$，若存在一个不为零的数 l，使得关系式

$$f(x+l)=f(x)$$

对于定义域内任何 x 值都成立，则$f(x)$叫做周期函数，l 是$f(x)$的周期．如图 1－7 所示．

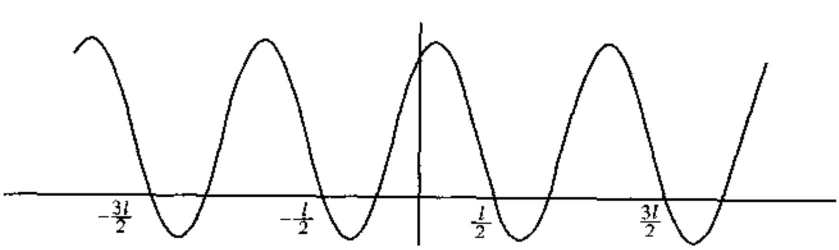


图 1－7

注　我们说的周期函数的周期是指最小正周期.

例 6　函数 $\sin x$，$\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\mathrm{tg}\,x$ 是以 π 为周期的周期函数.

三、复合函数

若 y 是 u 的函数：$y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数：$u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的函数值的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，那末，y 通过 u 的联系也是 x 的函数，我们称后一个函数是由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 叫做中间变量.

注　并不是任意两个函数都能复合.

例 7　函数 $y=\arcsin u$ 与函数 $u=2+x^2$ 是不能复合成一个函数的.

因为对于 $u=2+x^2$ 的定义域（$-\infty$，$+\infty$）中的任何 x 值所对应的 u 值（都大于或等于 2），使 $y=\arcsin u$ 都没有定义.

注　复合函数可以由两个以上的函数经过复合构成.

例 8　$y=\sqrt{\cot\left(\frac{x}{2}\right)}$，由 $y=\sqrt{u}$，$u=\cot v$，$v=\frac{x}{2}$ 构成.

四、反函数

1．反函数的定义

设有函数 $y=f(x)$，若变量 y 在函数的值域内任取一值 y_0 时，变量 x 在函数的定义域内必有唯一值 x_0 与之对应，即 $f(x_0)=y_0$，那么变量 x 是变量 y 的函数.

这个函数用 $x=\varphi(y)$ 来表示，也常记为 $x=f^{-1}(y)$，称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，习惯上我们仍记作 $y=f^{-1}(x)$.

由此定义可知，函数 $y=f(x)$ 也是函数 $x=\varphi(y)$ 的反函数.

2．反函数存在定理

定理　若 $y=f(x)$ 在（a，b）上单调增加（或减少），其值域为 R，则它的反函数必然在 R 上确定，且单调增加（或减少）.

利用反函数存在定理，我们只需判断函数在所讨论的范围（而不是函数的定义域）内是否单调，就可以确定其反函数是否存在.

例 9　$y=x^2$，其定义域为（$-\infty$，$+\infty$），值域为 $[0,+\infty)$. 对于 y 取定的非负值，可求得 $x=\pm\sqrt{y}$. 若我们不加条件，由 y 的值就不能唯一确定 x 的值，也就是在区间（$-\infty$，$+\infty$）上，函数不是单调增（减），故其没有反函数. 如果我们加上条件，要求 $x\geqslant 0$，此时 $y=x^2$ 单调增加，则对 $y\geqslant 0$，$x=\sqrt{y}$ 就是 $y=x^2$ 在要求 $x\geqslant 0$ 时的反函数. 即是：函数在此要求下单调增（减）.

3．反函数的性质

在同一坐标平面内，$y=f(x)$ 与 $x=\varphi(y)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的.

例 10　函数 $y=2^x$ 与函数 $y=\log_2 x$ 互为反函数，则它们的图形在同一直角坐标系中是关于直线 $y=x$ 对称的. 如图 1－8 所示：

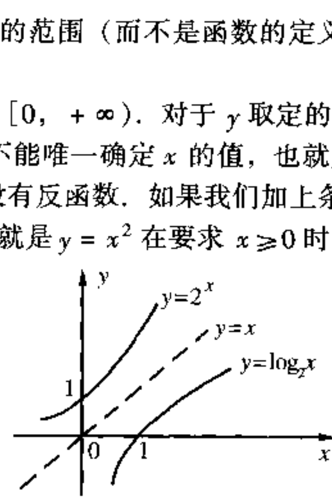


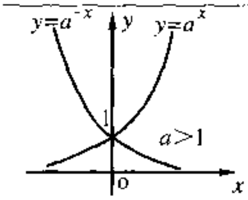
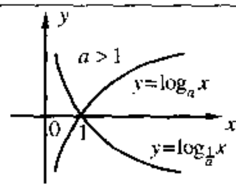
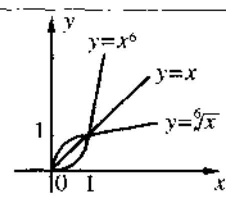
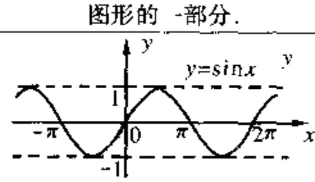
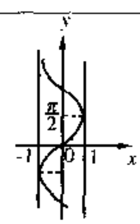
图 1－8

五、基本初等函数

我们最常用的有五种基本初等函数，分别是：指数函数、对数函数、幂函数、三角函数及反三角函数.

下面我们用表格（表 1 – 1）来把它们总结一下：

表 1 – 1

函数名称	函数的记号	函数的图形	函数的性质
指数函数	$y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$）		a) 不论 x 为何值，y 总为正数； b) 当 $x=0$ 时，$y=1$.
对数函数	$y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq1$）		a) 其图形总位于 y 轴右侧，并过（1，0）点 b) 当 $a>1$ 时，在区间（0，1）的值为负；在区间（–，+∞）的值为正；在定义域内单调增.
幂函数	$y=x^a$，a 为任意实数	 这里只画出部分函数图形的一部分.	令 $a=m/n$ a) 当 m 为偶数 n 为奇数时，y 是偶函数； b) 当 m，n 都是奇数时，y 是奇函数； c) 当 m 奇 n 偶时，y 在（$-\infty$，0）无意义.
三角函数	$y=\sin x$（正弦函数） 这里只写出了正弦函数		a) 正弦函数是以 2π 为周期的周期函数 b) 正弦函数是奇函数且 $\lvert\sin x\rvert\leqslant1$
反三角函数	$y=\arcsin x$（反正弦函数） 这里只写出了反正弦函数		a) 由于此函数为多值函数，因此我们将此函数值限制在 $[-\pi/2,\pi/2]$ 上，并称其为反正弦函数的主值.

六、初等函数

由基本初等函数与常数经过有限次四则运算和有限次复合运算而得到的并可用一个式子表示的函数称为初等函数.

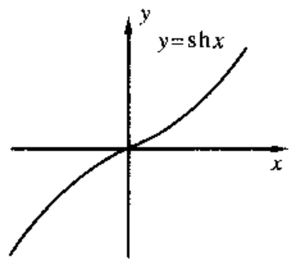
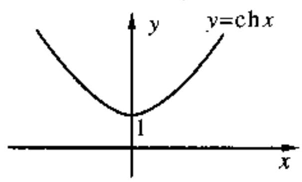
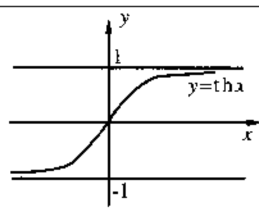
例 11　$y=\sin^2(x^2+\cos x)$ 是初等函数.

下面介绍一下工程技术中常用的一种函数——双曲函数

双曲函数

在应用中我们经常遇到的双曲函数是（表 1－2）：

表 1－2

函数的名称	函数的表达方式	函数的图形	函数的性质
双曲正弦	$\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$		a) 其定义域为： $(-\infty,+\infty)$； b) 是奇函数； c) 在定义域内是单调增.
双曲余弦	$\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$		a) 其定义域为： $(-\infty,+\infty)$； b) 是偶函数； c) 其图像过点（0，1）.
双曲正切	$\mathrm{th}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$		a) 其定义域为： $(-\infty,+\infty)$； b) 是奇函数； c) 其图形夹在水平直线 $y=1$ 及 $y=-1$ 之间；在定域内单调增.

我们再来看一下双曲函数与三角函数的区别（表 1－3）：

表 1－3

双曲函数的性质	三角函数的性质
$\mathrm{sh}0=0$，$\mathrm{ch}0=1$，$\mathrm{th}0=0$	$\sin 0=0$，$\cos 0=1$，$\tan 0=0$
$\mathrm{sh}x$ 与 $\mathrm{th}x$ 是奇函数，$\mathrm{ch}x$ 是偶函数	$\sin x$ 与 $\tan x$ 是奇函数，$\cos x$ 是偶函数
$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$	$\sin^2x+\cos^2x=1$
$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sb}^2x=1$	$\sin^2x+\cos^2x=1$
它们都不是周期函数	都是周期函数

双曲函数也有和差公式：

$$\mathrm{sh}(x\pm y)=\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}y\pm\mathrm{ch}x\,\mathrm{sh}y$$

$$\mathrm{ch}(x\pm y)=\mathrm{ch}x\,\mathrm{ch}y\pm\mathrm{sh}x\,\mathrm{sh}y$$

$$\mathrm{th}(x\pm y)=\frac{\mathrm{th}x\pm\mathrm{th}y}{1\pm\mathrm{th}x\,\mathrm{th}y}$$

习题 1 - 1

1．求下列函数的自然定义域．

(1) $y=\sqrt{3x+2}$　　(2) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$

(3) $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$　　(4) $y=\arcsin(x-3)$

2．下列各题中，函数$f(x)$和$g(x)$是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$　　(2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$g(x)=\sqrt[3]{x-1}$　　(4) $f(x)=1$，$g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$

3．试证下列函数在指定区间内的单调性．

(1) $y=\frac{x}{1-x}$，$(-\infty,1)$　　(2) $y=x+\ln x$，$(0,+\infty)$

4．下列函数中哪些是偶函数，哪些是既奇函数，哪些既非函数又非奇函数？

(1) $y=x^2(1-x^2)$　　(2) $y=3x^2-x^3$

(3) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$　　(4) $y=x(x-1)(x+1)$

(5) $y=\sin x-\cos x+1$　　(6) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$

5．下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期．

(1) $y=\cos(x-2)$　　(2) $y=\cos 4x$

(3) $y=1+\sin\pi x$　　(4) $y=x\cos x$

(5) $y=\sin^2 x$

6．求下列函数的反函数．

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$　　(2) $y=\frac{1-x}{1+x}$

(3) $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bd\neq 0)$　　(4) $y=2\sin 3x$ $(-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6})$

(5) $y=1+\ln(x+2)$　　(6) $y=\frac{2^x}{2^x+1}$

7．在下列各题中，求由所给函数构成的复合函数，并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值．

(1) $y=u^2$，$u=\sin x$，$x_1=\frac{\pi}{6}$，$x_2=\frac{\pi}{3}$　　(2) $y=\sin u$, $u=2x$, $x_1=\frac{\pi}{8}$, $x_2=\frac{\pi}{4}$

(3) $y=e^u$，$u=1+x^2$，$x_1=1$，$x_2=2$　　(4) $y=e^u$，$u=x^2$，$x_1=0$，$x_2=1$

(5) $y=u^2$，$u=e^x$，$x_1=1$，$x_2=-1$

8．设$f(x)$的定义域 $D=[0,1]$，求下列各函数的定义域．

(1) $f(x^2)$　　(2) $f(\sin x)$

(3) $f(x+a)(a>0)$　　(4) $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$

第二节 数列的极限

在高等数学中，极限是一个重要的基本概念，高等数学中其他的一些重要概念，如微分，积分，级数等等，都是用极限来定义的，我们首先讨论数列的极限，然后讨论函数的极限，并在此基础上讨论函数的连续性．由于极限概念的抽象性，在讨论过程中，我们只是给出相应的结论，而忽略其严格的证明．

一、数列

若按照一定的法则，有第一个数 a_1，第二个数 a_2，…，依次排列下去，使得任何一个正整数 n 对应着一个确定的数 a_n，那么，我们称这列有次序的数 a_1，a_2，…，a_n，…为数列．简记为数列 $\{a_n\}$．

数列中的每一个数叫做数列的项．第 n 项 a_n 叫做数列的一般项或通项．

注 我们也可以把数列 $\{a_n\}$ 看作自变量为正整数 n 的函数，即：$a_n=f(n)$，它的定义域是全体正整数．

二、极限

极限的概念是求实际问题的精确解答而产生的．

从我国古代数学家刘徽（公元三世纪）求圆的面积说起，我们可通过作圆的内接正多边形，近似求出圆的面积．设有一圆，首先作圆内接正六边形，把它的面积记为 A_1；再作圆的内接正十二边形，其面积记为 A_2；再作圆的内接正二十四边形，其面积记为 A_3；依次循下去（一般把内接正 $6\times 2^{n-1}$边形的面积记为 A_n）可得一系列内接正多边形的面积：A_1，A_2，A_3，…，A_n，…，它们就构成一个有序数列．

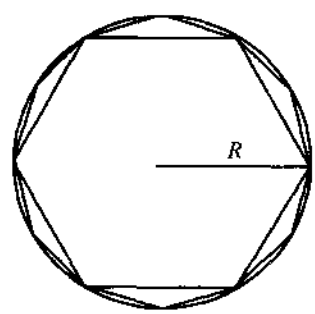


图 2－1

我们可以发现，当内接正多边形的边数无限增加时，A_n 也无限接近某一确定的数值（圆的面积），这个确定的数值在数学上被称为数列 A_1，A_2，A_3，…，A_n，... 当 $n\to\infty$（读作 n 趋近于无穷大）的极限．

三、数列的极限定义

一般地，对于数列 x_1，x_2，…，x_n，…来说，如果项数 n 无限增大时，项 x_n 无限接近某一常数 a，即对任意给定的正数 ε（不论其多么小），总存在正整数 N，使得对于 $n>N$ 时的一切 x_n，不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

都成立，那么就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a．

记作：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ 或 $x_n\to a \quad (n\to\infty)$．

注 此定义中的正数 ε 只有任意给定，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 才能表达出 x_n 与 a 无限接近的意思．

且定义中的正整数 N 与任意给定的正数 ε 是有关的，它是随着 ε 的给定而确定的．

在此我们可能不易理解这个概念，下面我们再给出它的一个几何解释，以使我们能

更好地理解它.

数列 $\{x_n\}$ 极限为 a 的一个几何解释：

我们首先介绍邻域的概念：数轴上到点 a 的距离小于 ε 的点的全体，称为点 a 的 ε 邻域，记为 $U(a,\varepsilon)$，即

$$U(a,\varepsilon)=\{x\,|\,|x-a|<\varepsilon\}=(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$$

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉，点 a 的 ε 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心 ε 邻域，记作 $\overset{0}{U}(a,\varepsilon)$ 即

$$\overset{0}{U}(a,\varepsilon)=\{x\,|\,0<|x-a|<\varepsilon\}=(a-\varepsilon,a)\cup(a,a+\varepsilon)$$

将常数 a 及数列 x_1，x_2，…，x_n，…在数轴上用它们的对应点表示出来，再在数轴上作点 a 的 ε 邻域即开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$，如图 2-2 所示：

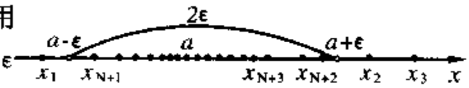


图 2-2

因不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 与不等式 $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ 等价，故当 $n>N$ 时，所有的点 x_n 都落在开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 内，而只有有限个（至多只有 N 个）在此区间以外.

注　至于如何求数列的极限，我们在以后会学习到，这里我们不作讨论.

四、数列的有界性及收敛数列的性质

对于数列 $\{x_n\}$，若存在着正数 M，使得一切 x_n 都满足不等式 $|x_n|\leqslant M$，则称数列 $\{x_n\}$ 是有界的，若正数 M 不存在，则可说数列 x_n 是无界的.

定理 1　若数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

注　有界的数列不一定收敛，即：数列有界是数列收敛的必要条件，但不是充分条件.

例 1　数列　$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots,\ (-1)^{n+1},\ \cdots$　是有界的，但它是发散的.

定理 2　若数列 x_n 有极限，则极限唯一.

定理 3　收敛数列的保号性：如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且 $a>0$（或 $a<0$），那么存在正整数 N，当 $n>N$ 时，都有 $x_n>0$（或 $x_n<0$）.

推论　如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n>0$（或 $x_n<0$），且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，那么 $a\geqslant 0$（或 $a\leqslant 0$））

习题 1-2

1. 观察一般项 x_n 如下的数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势，写出它产的极限：

(1) $x_n=\dfrac{1}{2^n}$　(2) $x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$　(3) $x_n=2+\dfrac{1}{n^2}$　(4) $x_n=n(-1)^n$

2. 根据数列极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{99\cdots9}_{n个}=1$

第三节　函数的极限

上节我们学习了数列的极限，已经知道数列可看作一类特殊的函数，即自变量取 1 →∞内的正整数，若自变量不再限于正整数的顺序，而是连续变化的，就成了函数．下面我们来学习函 数的极限．函数的极限有两种情况：

a）自变量无限增大；

b）自变量无限接近某一定点 x_0.

我们已知道数列极限的情况，那么函数的极限如何呢?

下面我们结合着数列的极限来学习函数极限的概念.

一、函数的极限

1．自变量趋向无穷大时函数的极限

定义 1 如果函数 $y=f(x)$在（a，$+\infty$）有定义，当 x 无限增大时，$f(x)$的值无限接近某一常数 A，即对任意给定的正数 ε（不论其多么小)，总存在着正数 X，使得对于适合不等式 $x>X$ 的一切 x，所对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

那么常数 A 就叫做函数 $y=f(x)$当 $x\to+\infty$时的极限，记作：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

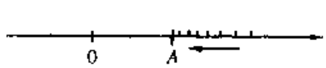
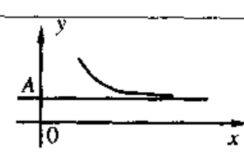
读者可类似定义 $y=f(x)$当 $x\to-\infty$及 $x\to\infty$时的极限分别记作 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，且易知

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 当且仅当 } \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

一般地，如果$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=C$，则函数$f(x)$的图象越来越接近直线 $y=c$，即直线 $y=c$ 是曲线 $y=f(x)$的水平渐近线.

下面我们用表格把函数的极限与数列的极限对比一下（表 1－4)：

表 1－4

数列极限的定义	函数极限的定义
存在数列 $a_n=f(n)$ 与常数 A 任给一正数 $\varepsilon>0$ 总可找到一正整数 N 对于 $n>N$ 的所有 a_n 都满足$\|a_n-A\|<\varepsilon$ 数列 a_n 当 $n\to\infty$时收敛于 A 记：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$	存在函数 $y=f(x)$与常数 A 任给一正数 $\varepsilon>0$ 总可找到一正数 X 对于适合$\|x\|>X$ 的一切 x 都满足$\|f(x)-A\|<\varepsilon$ 函数 $y=f(x)$当 $x\to\infty$时的极限为 A 记：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$
	

2．自变量趋向有限值时函数的极限

我们先来看一个例子.