

新课标



决胜中考

重庆名校 中考总复习

数学

主编 刘剑平

重庆一中
CHONGQING YIZHONG
重庆南开中学
CHONGQING NANKAI ZHONGXUE
重庆八中
CHONGQING BAZHONG
重庆育才中学
CHONGQING YUCAI ZHONGXUE
重庆巴蜀中学
CHONGQING BASHU ZHONGXUE
西南师大附中
XINAN SHIDA FUZHONG
川外附属外国语学校
CHUANWAI FUSHU WAIGUOYU XUEXIAO



西南师范大学出版社

决胜中考

——重庆名校中考总复习

数 学

- 丛书编委会主任** 周安平(西南师范大学出版社社长、编审)
- 丛书编委** 鲁善坤(重庆一中校长、中学研究员)
- 宋 璞(重庆南开中学校长、特级教师)
- 张 勇(重庆八中校长、中学研究员)
- 李 亮(重庆育才中学校长、中学研究员)
- 傅唯泉(重庆巴蜀中学校长、高级教师)
- 李 平(西南师大附中校长、中学研究员)
- 张裕云(川外附属外国语学校校长、高级教师)

西南师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

决胜中考·数学:重庆名校中考总复习/刘剑平
主编. —重庆:西南师范大学出版社,2005.10

ISBN 7-5621-3464-2

I. 决… II. 刘… III. 数学课—初中—
升学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 123251 号

**决胜中考——重庆名校中考总复习·数学
(新课标)**

主编 刘剑平

责任编辑:伯古娟

特约编辑:孙卫红

封面设计:陈晓静

出版、发行:西南师范大学出版社

(重庆·北碚 邮编:400715)

网 址:<http://www.xscbs.com>

印 刷:重庆大学建大印刷厂

开 本:850mm×1168mm 1/16

印 张:10

字 数:338 千字

版 次:2005 年 11 月第 1 版

印 次:2005 年 11 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 7-5621-3464-2/G·2174

定 价:12.00 元

决胜

前言

中考

(新课标)

考进重庆名校是每一个中考学生的考场心愿！

期盼名师点拨是广大莘莘学子的急切呼唤！

《决胜中考——重庆名校中考总复习》丛书分语文、数学、英语、物理、化学、历史、政治七个分册。这是第一次由重庆名校正式授权，各位名师联手编著、精心打造，名校整体推出的精品助学图书。它以**编著的权威性、内容的新颖性、体系的实用性、题型的针对性**成为重庆中考的经典性指导读物，是一套初中毕业生中考总复习的理想丛书。

编著的权威性：由重庆名校校长领衔，组织重庆一中、重庆南开中学、重庆八中、重庆育才中学、重庆巴蜀中学、西南师大附中、川外附属外国语学校等重庆名校的优秀教师、学科带头人、中考命题专家参加编写。他们思维活跃，教学水平高，中考经验丰富。

内容的新颖性：以教育部新课程标准为纲，结合2005年重庆中考实际，对全书三分之二的內容进行了修订。修订中所选例题、习题都是名校教师在教学过程中反复演练的好题和近两年全国各省市的中考试题。这些试题有的是学生常见的易错题，有的是具有代表性的典型题，有的反

映了重庆中考的命题趋势,有的体现了中考的最新动态。它能使学生感受到身边的语文、英语、历史、政治,生活中的数学、物理、化学等,亲近自然,灵动有趣,也反映了中考命题的方向。

体系的实用性:丛书根据重庆初三复习的实际情况,精心构建了复习的目标体系,体现了学习的系统性和全面性。第一轮为基础复习,根据各科的不同特点,按知识点或章节编写,让学生通过系统复习,进一步巩固和深化基础知识。第二轮为专项训练,强调对综合素质和应变能力的训练,以全面提高学生的综合素质和综合能力。第三轮为实验探究或专题测试,作者精心编写的开放题、应用题、训练题可供学生和老师及时检测、反馈,使学生处于临考状态,检测学生的应试能力。

题型的针对性:丛书结合重庆的课改实际,依据人教版教材的特点,以系统的知识点为核心,典型题、新颖题、易错题等题型为纽带,题量适中,内容详实,分层训练,以达到夯实基础、掌握方法、提高素质的目的,提高复习的针对性和有效性。

本套丛书的修订本着“权威是保证、新颖是生命、实用是基础、针对是灵魂”的原则,力求在“精”、“新”、“实”三方面做好、做细、做透、做强,以确保它成为中考教辅读物中的精品。本套丛书充分展示了重庆名校科学的教学理念、重庆名师先进的教学水平,一定能引导广大中考学生科学、有效地复习,一定会让他们收到事半功倍的成效。

名校名师名题,高效高分高升!

好风凭借力,送君上青云!

愿《决胜中考——重庆名校中考总复习》丛书成为你圆梦的宝典!

《决胜中考——重庆名校中考总复习》丛书编委会

2005年10月

决胜

编者的话

中考

(新课标)

本书荟萃了一、三、八、育才、外语校等重点中学一线教师的集体智慧,以丰富的经验倾力打造而成。全书分中考基础夯实、专题突破和参考答案三部分,设置了“考点聚焦、知识回顾、典例剖析、强化训练”等栏目。

全书根据新课程标准,以中考《考试说明》为蓝本,以考点为依据构设章节体系,以学科内、跨学科综合问题为专题,进行解题思路分析和解题方法点拨。

书中所选例题、习题,均来源于全国各地(特别是课改区)近年中考试题。它们在考点的训练上具有代表性,在题型的变化与题目的难易程度上具有典型性。例题、习题在设置上从易到难,题量的安排紧扣新课程标准和考点要求,做到科学合理,适合不同层次的学生使用。

本书在立足基础知识和基本技能复习的同时,传递最新考试信息,给我们的同行提供一个真正的可操作性的复习安排,给我们的考生铺设一条通向名牌中学的高速公路。

为争取这套资料尽早与考生见面,书中难免存在不足,敬请读者朋友及时批评指正。

本册主编:刘剑平,编委:文齐、刘剑平、汤献录、何秋燕、张垂权、陈建明、易锋、腾颖、蔡承伟。

决胜

目录

中考

(新课标)

第一部分 基础夯实	1
第一章 实数	1
第二章 代数式	5
第三章 方程(组)及一元一次不等式(组)	11
第四章 函数	18
第五章 统计初步与概率	33
第六章 图形的认识	43
第七章 三角形	49
第八章 四边形	53
第九章 图形的变换	62
第十章 相似三角形	66
第十一章 解直角三角形	75
第十二章 圆	81
第二部分 专题突破	94
第十三章 方程与不等式的应用综合专训	94
第十四章 正(反)比例函数和一次函数综合专训	97

第十五章	二次函数综合专训(一)	101
	二次函数综合专训(二)	104
第十六章	动态几何专训	108
第十七章	信息题专训	114
第十八章	方案设计题专训	119
第十九章	实验与操作题专训	123
第二十章	生活与应用专训	127
第三部分	参考答案	132

基础夯实

第一章 实数

考点聚焦

本章主要考查实数的有关概念、实数的分类、实数的计算、近似数、科学记数法、有效数字等知识点,多以填空、选择题型出现.

1.1 实数的概念

知识回顾

1. 数轴三要素:原点、正方向和单位长度,数轴上的点与实数一一对应.
2. 相反数:实数 a 的相反数是 $-a$;0的相反数是0;若 a 、 b 互为相反数,则 $a+b=0$.
3. 倒数:乘积是1的两个数互为倒数,0没有倒数.
4. 绝对值:正数及零的绝对值是本身,负数的绝对值是它的相反数.
5. 科学记数法,近似数与有效数字,实数的分类.

典例剖析

例1 下列各数哪些属于有理数?哪些属于无理数?哪些属于实数?

$5.57, \pi, 3.141\ 592\ 6, 0.123\ 4, 0, \frac{1}{3}, \frac{22}{7}, \sqrt{2}, \sqrt[3]{9}, 0.424\ 224\ 222\ 4\cdots$

解析 有理数有: $5.57, 3.141\ 592\ 6, 0.123\ 4, 0, \frac{1}{3}, \frac{22}{7}$

无理数有: $\pi, \sqrt{2}, \sqrt[3]{9}, 0.424\ 224\ 222\ 4\cdots$

实数有: $5.57, \pi, 3.141\ 592\ 6, 0.123\ 4, 0, \frac{1}{3}, \frac{22}{7},$

$\sqrt{2}, \sqrt[3]{9}, 0.424\ 224\ 222\ 4\cdots$

注 记清有理数、无理数、实数的概念,然后紧扣概念进行判断,但我们需要注意以下两点. ①(只有)整数与分数是有理数,但由于有限小数与无限循环小数均能化成分数,故认为是分数,同样属于有理数.而有些无理数如 $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{3}$ 等穿上了分数的“外衣”,很容易使我们混淆,要注意区别. ②无理数的表现形式就初中而言大致有以下三种:一是关于 π 的式子(π 不能消去),如 $\frac{\pi}{3}, 3-\pi$ 等;二是开方(开平方或开立方)开不尽的数,如 $\sqrt{2}, \sqrt[3]{9}, \sqrt{2}-3$ 等;三是人为设计的无限不循环小数,如 $0.424\ 224\ 222\ 4\cdots$ 满足无限不循环特征.

例2 我国的国土面积约为 $9.60 \times 10^6 \text{ km}^2$,由四舍五入得到的近似数 9.60×10^6 ().

- A. 有3个有效数字,精确到百分位
- B. 有3个有效数字,精确到百万位
- C. 有3个有效数字,精确到万位
- D. 有2个有效数字,精确到十万位

解析 在确定有效数字与精确度时,特别要注意,用 $a \times 10^n$ (a 为只含一位整数位的数)表示的数中有效数字为 a 的有效数字;精确度为 a 中最末一位数字在原数中处于哪一位,则精确到哪一位,据此故选C.

注 精确度与有效数字这两个概念容易忘记,要注意在实际问题中理解记忆.

例3 (1)若 $|x|+|y|=0$,则 $x=$ _____,
 $y=$ _____.

(2)绝对值不大于3的整数有_____.



(3) 若 $|x| = -x, x = \frac{1}{x}$, 则 $x =$ _____.

图析 (1)0,0;(2) $\pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$;(3) -1 .

图注 (1)中两个非负式子相加为0,则只有同时为0才能符合题意;(2)中注意不大于即为小于等于的意思;(3)中要注意由 $|x| = -x$ 可知 $x \leq 0$,由 $x = \frac{1}{x}$ 可知 $x = \pm 1$,故 $x = -1$.

例4 如图1-1-1所示,某校为了美化环境,在一块长为10 m,宽为有理数的长方形土地上修建两个对称的正方形花坛.要使图中阴影部分草地的面积为 $8(4-\pi) \text{ m}^2$,中间道路的宽 x 应为 _____ m.

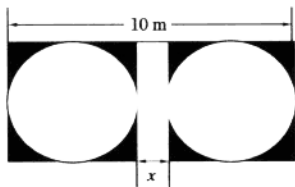


图 1-1-1

图析 先把阴影部分用含 x 的式子表达出来,易知圆的半径为 $\frac{10-x}{4}$,所以阴影部分面积可表示为:
 $10 \times \frac{10-x}{2} - 2\pi(\frac{10-x}{4})^2 - \frac{10-x}{2} \times x$,故建立方程:
 $10 \times \frac{10-x}{2} - 2\pi(\frac{10-x}{4})^2 - \frac{10-x}{2} \times x = 8(4-\pi) = 32 - 8\pi$,这个方程可利用实数有关概念进行解决.观察等式两端,由宽为有理数可得:

$$\begin{cases} -2(\frac{10-x}{4})^2 = -8 & \text{①} \\ 10 \times \frac{10-x}{2} - \frac{10-x}{2} \times x = 32 & \text{②} \end{cases}$$

由①可得出 $x = 2$,而 $x = 2$ 同样也满足②式,故中间道路宽 2 m.

图注 本题中利用了“两个含无理数的式子相等,则有有理数部分与无理数部分应分别相等”这一结论,利用此结论还可做如下变式题:已知 a, b 为有理数,且有 $a + 3b + (2a + b)\sqrt{3} = 5 + 6\sqrt{3}$,试求 a, b 的值.

强化训练

一、填空题

1. 冬季的某日,上海最低气温是 3°C ,北京最低气温是

-5°C ,这一天上海的最低气温比北京的最低气温高 _____ $^\circ\text{C}$.

2. (常德市 2005) 写出一个 3 到 4 之间的无理数: _____.

3. 若 $|-x| = |-6|$,则 $x =$ _____;若 $|x-3| = 0$,则 $x =$ _____.

4. (泰州市 2003) 一个数的倒数是 $\frac{3}{2}$,这个数的相反数是 _____.

5. (海淀区 2005) 把编号依次为 1,2,3,4,...,n 的若干盆花按右图所示摆放.花盆中的花按红、黄、蓝、紫的颜色依次循环排列,则第 8 行从左边数第 6 盆花的颜色为 _____ 色.



二、选择题

6. (厦门市 2005) 下列计算正确的是().

- A. $-1+1=0$ B. $-1-1=0$
 C. $3 \div \frac{1}{3} = 1$ D. $3^2 = 6$

7. (安徽省 2005) 我国“杂交水稻之父”袁隆平主持研究的某种超级杂交水稻平均亩产 820 kg. 某地今年计划种这种超级杂交水稻 3 000 亩,预计该地今年收获这种超级杂交水稻的总产量(用科学记数法表示)是(). (注:亩,面积单位,1 亩 = 666.6 m^2)

- A. $2.5 \times 10^6 \text{ kg}$ B. $2.5 \times 10^5 \text{ kg}$
 C. $2.46 \times 10^6 \text{ kg}$ D. $2.46 \times 10^5 \text{ kg}$

8. (海淀区 2005) 已知 $(1-m)^2 + |n+2| = 0$,则 $m+n$ 的值为().

- A. -1 B. -3 C. 3 D. 不能确定

9. (宜昌市 2005) 实数 m, n 在数轴上的位置如下图 1-1-2 所示,则下列不等关系中正确的是().

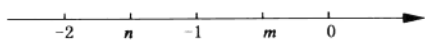


图 1-1-2

- A. $n < m$ B. $n^2 < m^2$
 C. $n^0 < m^0$ D. $|n| < |m|$

10. (杭州市 2005) 若化简 $|1-x| - \sqrt{x^2 - 8x + 16}$ 的结果为 $2x-5$,则 x 的取值范围是().

- A. 为任意实数 B. $1 \leq x \leq 4$
 C. $x \geq 1$ D. $x \leq 4$

三、解答题

11. 若点 A 表示的数为 $x+2$,点 B 表示的数为 $4-2x$,



且 A, B 两点到原点的距离相等, 求 x 的值.

12. 已知 $|x| = 3, |y| = 4$, 且 $x > y$, 求 $x + y$ 的值.

四、探索创新

13. (烟台市 2004) 先阅读下面的材料, 然后回答问题.

在一条直线上有依次排列的 $n(n > 1)$ 台机床在工作, 我们要设置一个零件供应站 P , 使这 n 台机床到供应站 P 的距离总和最小, 要解决这个问题, 先“退”到比较简单的情形.

如图 1-1-3, 如果直线上有 2 台机床时, 很明显设在 A_1 和 A_2 之间的任何地方都行, 因为甲和乙所走的距离之和等于 A_1 到 A_2 的距离.



图 1-1-3

图 1-1-4

如图 1-1-4, 如果直线上有 3 台机床时, 不难判断, 供应站设在中间一台机床 A_2 处最合适, 因为如果 P 放在 A_2 处, 甲和丙所走的距离之和恰好为 A_1 到 A_3 的距离. 而如果把 P 放在别处, 例如 D 处, 那么甲和丙所走的距离之和仍是 A_1 到 A_3 的距离, 可是乙还得走 A_2 到 D 的这一段, 这是多出来的. 因此 P 放在 A_2 处是最佳选择.

不难知道, 如果直线上有 4 台机床, P 应设在第 2 台与第 3 台之间的任何地方; 有 5 台机床, P 应设在第 3 台位置.

(1) 有 n 台机床时, P 应设在何处?

(2) 根据问题(1)中的结论, 求下式的最小值.

$$|x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-617|$$

1.2 实数的运算

知识回顾

- 在实数范围内进行加、减、乘、除、乘方、开方运算.
- 0 次方的运算: 任何数(0 除外)的 0 次方都等于 1.
- 负指数: 负指数的运算一般是利用公式 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 转化为正指数进行运算.
- 实数的大小比较: 特别注意一个数与它的倒数的比较, 一个数与它的方根的比较, 这些大小关系不能一概而论, 需对实数分范围讨论才能确定.

典例剖析

例 1 (1)(泉州市 2005) 计算: $2\ 005^0 - 2^2 + |-5|$

(2)(十堰市 2005) 计算: $(-2)^3 + \frac{1}{3}(2\ 005 + \pi)^0 -$

$$|- \frac{1}{3}|$$

(3)(海淀区 2005) 计算: $-2^3 \times 2^{-1} + \sqrt{12} + (\tan 30^\circ - \cos 45^\circ)$

剖析 (1) 原式 $= 1 - 4 + 5 = 2$

(2) 原式 $= -8 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -8$

(3) 原式 $= -8 \times \frac{1}{2} + 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $= -4 + \frac{7}{3}\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

注意 在实数的混合运算中, 要注意 0 次方、负指数的处理, 有时还需要熟记特殊三角函数值.

例 2 (1)(无锡市 2005) 比较 $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ 的大小, 结果正确的是().

A. $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{3} < \frac{1}{4}$ B. $-\frac{1}{2} < \frac{1}{4} < -\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{4} < -\frac{1}{3} < -\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{3} < -\frac{1}{2} < \frac{1}{4}$

(2) 在实数范围内, 下列判断正确的是().

A. 若 $|x| = |y|$, 则 $x = y$

B. 若 $\sqrt{x^2} = \sqrt{y^2}$, 则 $x = y$

C. 若 $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{y}$, 则 $x = y$

D. 若 $x > y$, 则 $x^2 > y^2$

剖析 (1) 根据正数大于负数, 而负数之间比较是绝对值大的反而小, 故选 A.

(2) 通过特殊值法容易得出正确答案为 C.

注意 在实数之间进行大小比较时, 要注意两个数的大小关系并不一定能推广到它们各自的方根大小或幂的大小关系, 如(2)中 D 答案若 $x = 2, y = -3$, 结论就不成立了.

例 3 已知实数 x, y 满足 $\sqrt{x-2y-3} + (2x-3y-5)^2 = 0$, 求 $x-8y$ 的平方根和立方根.

剖析 由题意得:

$$\begin{cases} x-2y-3=0 \\ 2x-3y-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}, \text{ 所以 } x-8y=9, \text{ 故 } x-$$

$8y$ 的平方根为 ± 3 , 立方根为 $\sqrt[3]{9}$.

注意 在对非负数性质的考察中, 要充分运用



“非负式子之和为零,则每个式子均为零”这一结论解决问题.

例 4 (1) 已知实数 a 满足: $|2\ 004 - a| + \sqrt{a - 2\ 005} = a$, 那么 $a - 2\ 004^2 =$ _____.

(2) 若 a 和 b 分别是 $8 - \sqrt{11}$ 的整数部分和小数部分, 则 $2a - b =$ _____.

解析 (1) 由题意知 $a \geq 2\ 005$, 故原等式可化为 $a - 2\ 004 + \sqrt{a - 2\ 005} = a \Rightarrow \sqrt{a - 2\ 005} = 2\ 004 \Rightarrow a - 2\ 005 = 2\ 004^2$,
所以 $a - 2\ 004^2 = 2\ 005$.

(2) 通过估计: $8 - \sqrt{11}$ 的整数部分为 4, 则小数部分为 $8 - \sqrt{11} - 4 = 4 - \sqrt{11}$,

所以 $2a - b = 2 \times 4 - (4 - \sqrt{11}) = 4 + \sqrt{11}$.

注意 (1) 本题通过开平方对被开方数的要求这一隐含条件, 确定出 a 的取值范围, 从而化简式子得解.

(2) 通过估算求整数部分, 再用原数减去整数部分即得小数部分, 然后再参与其他运算.

强化训练

一、填空题

- (泉州市 2005) 计算: $3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} =$ _____.
- (三明市 2005) 计算: $(\frac{1}{2})^{-1} =$ _____.
- (徐州市 2005) 计算: $(-2)^2 - 2^0 + (\frac{1}{2})^{-1} + \sqrt[3]{8} - \sqrt{9} =$ _____.
- (茂名市 2005)《广东省工伤保险条例》规定: 职工有依法享受工伤保险待遇的权利. 某单位一名职工因公受伤住院治疗了 1 个月(按 30 天计), 用去医疗费 5 000 元, 伙食费 500 元, 工伤保险基金按规定给他补贴医疗费 4 500 元, 其单位按因公出差标准(每天 30 元)的 70% 补助给他作为伙食费, 则在这次工伤治疗中他自己只需支付 _____.
- (日照市 2005) 已知下列等式:
 - $1^3 = 1^2$;
 - $1^3 + 2^3 = 3^2$;
 - $1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$;
 - $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$;
 - ...
 由此规律知, 第 ⑤ 个等式是 _____.

二、选择题

- (安徽省 2005) 计算: $2 - (-1)^2$ 等于().
A. 1 B. 0 C. -1 D. 3
- (荆州市 2005) 下列运算中正确的是().
A. $2^2 \times 2^3 = 2^5$
B. $(-2)^{-1} \times 2 = 1$
C. $(-2)^0 - |-2| = -1$
D. $2^5 \div 2^4 = 2^2$
- (徐州市 2005) 下列运算中错误的是().
A. $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$
B. $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
C. $2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
D. $\sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} = \sqrt{2} - \sqrt{3}$
- (淮安市 2005) 下列关于 $\sqrt{12}$ 的说法中错误的是().
A. $\sqrt{12}$ 是无理数
B. $3 < \sqrt{12} < 4$
C. $\sqrt{12}$ 是 12 的算术平方根
D. $\sqrt{12}$ 不能再化简
- (日照市 2005) 在五一黄金周期间, 某超市推出如下购物优惠方案:
 - 一次性购物在 100 元(不含 100 元)以内时, 不享受优惠;
 - 一次性购物在 100 元(含 100 元)以上, 300 元(不含 300 元)以内时, 享受九折优惠;
 - 一次性购物在 300 元(含 300 元)以上时, 享受八折优惠.
 王茜在本超市两次购物分别付款 80 元、252 元. 如果王茜改成在本超市一次性购买与上两次完全相同的商品, 则应付款().
A. 332 元 B. 316 元或 332 元
C. 288 元 D. 288 元或 316 元

三、解答题

- (厦门市 2005) 计算: $2^2 + (4 - 7) \div \frac{3}{2} + (\sqrt{3})^0$
- (黄石市 2005) 计算: $|5| + (\frac{1}{2})^{-2} + \sqrt[3]{-27} - \sqrt{(-2)^2} - (\sqrt{7} - 1)^0$



四、探索创新

13. (荆州市 2005) 已知 $(x - \sqrt{3})^2 + |y - \cos 30^\circ| = 0$,

求 $\frac{3xy - x^2y^2}{xy - 1} \cdot (\frac{1}{xy} - 1)$ 的值.

第二章 代数式

考点聚焦

1. 掌握单项式、多项式、整式的概念及其关系, 会识别同类项, 能进行整式的加减运算.
2. 在探索的基础上, 了解正整数幂的运算性质, 并进行同底数幂的乘除, 能进行整式的乘法、除法运算.
3. 掌握因式分解的意义和因式分解的一般步骤, 能熟练地对多项式进行因式分解.
4. 掌握分式的概念、基本性质; 能熟练地进行分式的有关计算.
5. 了解二次根式的概念, 利用二次根式的有关性质进行二次根式的加、减、乘、除等运算.

$$(ab)^m = a^m b^m \quad a^m \div a^n = a^{m-n}$$

(其中 m, n 为整数, a, b 为实数且 $a \neq 0$)

6. 乘法公式

(1) 平方差公式: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
 (2) 完全平方公式: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

7. 掌握整式的加、减、乘、除、乘方的较简单的混合运算, 并能灵活地运用运算律与乘法公式简化运算.
8. 因式分解: 把一个多项式化成几个整式积的形式.
9. 理解因式分解的意义并感受分解因式与整式乘法是相反方向的变形, 掌握提公因式法和运用公式法这两种分解因式的基本方法, 了解因式分解的一般步骤, 能够熟练地运用这些方法进行多项式的因式分解.

典例剖析

例 1 已知: $\frac{4}{9}x^{2n}y$ 与 $-\frac{2}{3}x^4y^{m+1}$ 是同类项, 求 m, n 的值.

剖析 由题目知 $\frac{4}{9}x^{2n}y$ 与 $-\frac{2}{3}x^4y^{m+1}$ 是同类项, 即 x 的指数相同, y 的指数相同; 可得方程 $2n = 4, m + 1 = 1$, 即可求出 $m = 0, n = 2$.

注 解答此类题目是根据同类项的概念——字母相同, 相同字母的指数也相同, 然后利用方程思想列出方程, 解方程即可求出未知数的值.

例 2 分解因式

- (1) (陕西省 2004) $x^3y^2 - 4x$
- (2) (黄冈市 2004) $x^2 - y^2 - x - y$
- (3) $(x^2 - 2x)(x^2 - 2x + 2) + 1$
- (4) $(x + y)^2 + 4(x - y)^2 - 4(x^2 - y^2)$

剖析

$$\begin{aligned} (1) x^3y^2 - 4x &= x(x^2y^2 - 4) = x(xy - 2)(xy + 2) \\ (2) x^2 - y^2 - x - y &= (x + y)(x - y) - (x + y) \\ &= (x + y)(x - y - 1) \end{aligned}$$

2.1 整式及分解因式

知识回顾

1. 整式

单项式: 数和字母的积(单独一个数或字母也叫单项式)
 多项式: 几个单项式的和

2. 同类项: 所含字母相同, 相同字母的指数也相同的项.
3. 合并同类项: 把同类项的系数相加, 字母和字母的指数不变.
4. 在理解同类项概念的基础上, 掌握合并同类项的方法, 掌握添括号的法则, 能正确地进行同类项的合并和去括号与添括号. 在准确判断、正确合并同类项的基础上, 进行整式的加减运算.
5. 幂的运算法则

$$a^m a^n = a^{m+n} \quad (a^m)^n = a^{mn}$$



$$\begin{aligned} (3) & (x^2 - 2x)(x^2 - 2x + 2) + 1 \\ &= (x^2 - 2x)^2 + 2(x^2 - 2x) + 1 \\ &= (x^2 - 2x + 1)^2 = (x - 1)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) & (x + y)^2 + 4(x - y)^2 - 4(x^2 - y^2) \\ &= (x + y)^2 - 4(x + y)(x - y) + 4(x - y)^2 \\ &= [(x + y) - 2(x - y)]^2 = (x - 3y)^2 \end{aligned}$$

【解法】 因式分解时应注意:①分解因式时首先考虑有无公因式可提,当有公因式时,先提取,再进一步考虑分解[如(1)];②分解因式必须进行彻底,直至每个因式都不能再分解为止[如(3)];③有时根据需要先进行乘法运算,然后再分解[如(3)].

例 3 (1) 设 $a - b = -2$, 求 $\frac{a^2 + b^2}{2} - ab$ 的值.

(2) 若方程 $(x - 2)(x^2 - 4x + 2) = 0$ 的根分别为 x_1, x_2, x_3 , 求 $x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3$ 的值.

【解法】 (1) 因为 $a - b = -2$, 由 $\frac{a^2 + b^2}{2} - ab = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{2} = \frac{(a - b)^2}{2}$,

$$\text{所以 } \frac{a^2 + b^2}{2} - ab = 2.$$

(2) 由方程有: $x - 2 = 0$ 或 $x^2 - 4x + 2 = 0$.

不妨设 x_1 为 $x - 2 = 0$ 的根, x_2, x_3 为 $x^2 - 4x + 2 = 0$ 的根.

$$\text{所以 } x_1 = 2, x_2 + x_3 = 4, x_2 x_3 = 2.$$

$$\text{所以原式} = x_1(x_2 + x_3) + x_2 x_3 = 10.$$

【解法】 求代数式的值有如下情形:①先化简,然后代入字母的值求值;②将要求的代数式转化为已知条件的代数式;③式子中字母的值隐含在方程等条件中,先由条件求出字母(或整体)的值,再求代数式的值.

例 4 已知 $x^m = 3, x^n = 6$, 求 x^{3m-2n} 的值.

$$\text{【解法】 } x^{3m-2n} = x^{3m} \div x^{2n} = (x^m)^3 \div (x^n)^2$$

$$\text{因为 } x^m = 3, x^n = 6,$$

$$\text{所以原式} = 3^3 \div 6^2 = 27 \div 36 = \frac{3}{4}.$$

【解法】 对于同底数幂的除法法则、同底数幂的乘法法则,不仅可以正用而且可以逆用.

$$\text{即: } a^{m+n} = a^m \cdot a^n, a^{m-n} = a^m \div a^n.$$



一、填空题

1. (宁波市 2005) 分解因式 $2x^2 - 18 =$ _____.

2. (重庆市 2004) 将 $(\frac{2}{3}a^4b^7 - \frac{1}{9}a^2b^5) \div (-\frac{1}{3}ab^3)^2$ 化简为 _____.

3. (河北省 2004) 若 x_1, x_2 是一元二次方程 $2x^2 - 3x + 1 = 0$ 的两个根, 则 $x_1^2 + x_2^2$ 的值是 _____.

4. (浙江省 2005) 日常生活中取款、上网等都需要密码. 有一种用“因式分解”法产生的密码, 方便记忆. 原理可用例子说明如下: 如对于多项式 $x^4 - y^4$, 因式分解的结果是 $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$, 若取 $x = 9, y = 9$ 时, 则各个因式的值是: $(x - y) = 0, (x + y) = 18, (x^2 + y^2) = 162$, 于是就可以把“018162”作为一个六位数的密码. 对于多项式 $4x^3 - xy^2$, 取 $x = 10, y = 10$ 时, 用上述方法产生的密码是: _____ (写出一个即可).

5. (重庆市课改区 2005) 把 $4x^2 + 1$ 加上一个单项式, 使其成为一个完全平方式, 请你写出所有符合条件的单项式: _____.

二、选择题

6. (重庆市 2005) 下列运算中, 错误的是().

A. $a \cdot a^2 = a^3$ B. $2a + 3b = 6ab$

C. $a^4 \div a^2 = a^2$ D. $(-ab)^2 = a^2b^2$

7. (烟台市 2003) 若 $3a^m b^{2m+3n}$ 与 $a^{2m-3} b^n$ 的和仍是一个单项式, 则 m, n 的值分别为().

A. 1, 2 B. 2, 1 C. 1, 1 D. 1, 3

8. (北京市朝阳区 2003) 把多项式 $a^3 + 2a^2b + ab^2 - a$ 分解因式的结果是().

A. $(a^2 + ab + a)(a + b + 1)$

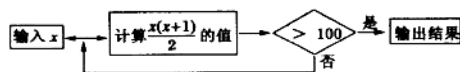
B. $a(a^2 + 2ab + b^2 - 1)$

C. $a(a + b + 1)(a + b - 1)$

D. $(a^2 + ab + a)(a^2 + ab - a)$

9. (浙江省衢州市 2004) 按下图的程序计算, 若开始输入的值为 $x = 3$, 则最后输出的结果是().

A. 6 B. 21 C. 156 D. 231



10. (兰州市 2005) 已知实数 x 满足 $x^2 + \frac{1}{x} + x + \frac{1}{x} = 0$,

那么 $x + \frac{1}{x}$ 的值是().

A. 1 或 -2 B. -1 或 2 C. 1 D. -2

三、解答题

11. (1) 已知 $(x + y)^2 = 9, (x - y)^2 = 5$, 求 $x^2 + y^2$ 的



值.

(2)(长沙市 2005) 先化简再求值: $y(x+y) + (x+y)(x-y) - x^2$, 其中 $x = -2, y = \frac{1}{2}$.

12. 分解因式.

(1) $x^2 - 2xy - 9 + y^2$

(2) $y^4 + 2xy - 24$

四、探索创新

13. 观察下列等式:

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 = 25 = 5^2$

$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 = 121 = 11^2$

$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1 = 361 = 19^2$

$4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + 1 = 841 = 29^2$

...

(1) 找出上面 4 个算式的特征, 并用文字表述出来.

(2) 你能猜想出怎样一个普遍性结论?

(3) 证明你猜想的结论的正确性.

2.2 分 式



1. 分式的概念: 如果除式 B 中含有字母, 那么称 $\frac{A}{B}$

为分式; 当 $B = 0$ 时, 分式无意义; 当 $\begin{cases} A = 0 \\ B \neq 0 \end{cases}$ 时, 分式的值为 0.

2. 分式的基本性质: 分式的分子与分母都乘以(或除以)同一个不等于零的整式, 分式的值不变.

3. 能灵活运用分式的基本性质进行约分、通分、求值.

4. 最简分式: 指分式的分子与分母没有公因式.

5. 能熟练地进行分式的加、减、乘、除运算. 注意最后结果应化为最简分式.

6. 分式的化简求值有时需要对条件和代数式同时变形, 也可根据需要适当变形、整体代人.



例 1 当 $\frac{|a|-3}{a^2-4a+3}$ 的值为 0 时, a 的值是多少?

解析 由 $\begin{cases} |a|-3=0 \\ a^2-4a+3 \neq 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a = \pm 3 \\ a \neq 3, a \neq 1 \end{cases}$, 所以 $a = -3$.

注意 ① 使分式的值为零, 需满足两个条件: (A) 分子等于零; (B) 分母不等于零.

② 使分式有意义, 只需分母不等于零.

例 2 已知下列 4 个式子:

① $\frac{x^2-16}{x-4} = x-4$;

② $\frac{0.01x-0.5}{0.3x+0.04} = \frac{x-5}{3x+4}$;

③ $\frac{1}{-x+y} = \frac{1}{x+y}$;

④ $\frac{(x^2)^3}{x^3} = x^3$.

其中正确式子的序号是_____.

解析 ① $\frac{x^2-16}{x-4} = \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = x+4$, 所

以 ① 是错误的;

② $\frac{0.01x-0.5}{0.3x+0.04} = \frac{100(0.01x-0.5)}{100(0.3x+0.04)} = \frac{x-50}{30x+4}$,

所以 ② 是错误的;

③ $\frac{1}{-x+y} = -\frac{1}{x-y}$, 所以 ③ 是错

误的;

④ $\frac{(x^2)^3}{x^3} = \frac{x^6}{x^3} = x^3$, 所以 ④ 是正确的, 应填 ④.

注意 此题主要考查了分式的基本性质和符号法则, 掌握分式的基本性质和代数式的恒等变形是关键, 分子、分母和分式三个符号同时改变两个, 其结果不变; 应注意分数线有时起到括号的作用.

例 3 化简: $(\frac{x}{x-2} - \frac{x}{x+2}) \div \frac{4x}{2-x}$

解析 $(\frac{x}{x-2} - \frac{x}{x+2}) \div \frac{4x}{2-x}$
 $= \frac{x^2+2x-x^2+2x}{(x-2)(x+2)} \times \frac{2-x}{4x}$
 $= -\frac{1}{x+2}$

注意 ① 分式的加减运算, 一般先通分, 再加减. 如果公分母不易发现, 常常要将分母因式分解.

② 分式的乘除运算实为约分, 其关键在于找分式中的公因式, 所以解题之前必须将分子分母进行因式分解.

③ 分式运算的结果必须化为最简分式.

例 4 已知: $x + \frac{1}{x} = 4$, 求 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值.



解析 由 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$

$$= \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1} = \frac{1}{(x + \frac{1}{x})^2 - 1}$$

把 $x + \frac{1}{x} = 4$ 整体代入,

$$\text{原式} = \frac{1}{16-1} = \frac{1}{15}$$

注意 由条件求出值,再代入计算显然很繁,注意到求值分式的分子、分母同时除以 x^2 后可转化为含 $x + \frac{1}{x}$ 的形式,再整体代入.



一、填空题

- (杭州市 2005) 当 $m =$ _____ 时, 分式 $\frac{(m-1)(m-3)}{m^2-3m+2}$ 的值为零.
- (浙江省丽水市 2005) 已知 $\frac{a}{b} = \frac{5}{2}$, 则 $\frac{a-b}{b} =$ _____.
- 若 $ab = 2, \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 3$, 则 $(a+b)^2 =$ _____.
- 若 $0 < x < 1$, 且 $x + \frac{1}{x} = 6$, 则 $x - \frac{1}{x} =$ _____.
- 观察下面一列有规律的数: $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \dots$

根据其规律可知:

- 第 8 个数是 _____;
- 第 n 个数是 _____.

二、选择题

- 当 $x = 2$ 时, 下列各式的值为 0 的是 ().
 - $\frac{x-2}{x^2-3x+2}$
 - $\frac{1}{x-2}$
 - $\frac{2x-4}{x-9}$
 - $\frac{x+2}{x-1}$
- (北京市丰台区 2005) 计算 $\frac{1}{x-1} - \frac{x}{x-1}$ 的结果是 ().
 - $x-1$
 - $1-x$
 - 1
 - -1
- (广东省茂名市课改区 2005) 下列分式的运算中正确的是 ().
 - $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{a+b}$
 - $\frac{(a^3)^2}{a} = a^3$

- $\frac{a^2+b^2}{a+b} = a+b$
- $\frac{a-3}{a^2-6a+9} = a-3$

- 如果分式 $\frac{6}{1+x}$ 的值为正整数, 则整数 x 的值的个数有 ().
 - 2 个
 - 3 个
 - 4 个
 - 5 个
- 甲、乙两人分别从两地同时出发, 若相向而行, 则 a 小时相遇; 若同向而行, 则 b 小时甲追上乙, 那么甲的速度是乙的速度的 ().
 - $\frac{a+b}{b}$ 倍
 - $\frac{b}{a+b}$ 倍
 - $\frac{b+a}{b-a}$ 倍
 - $\frac{b-a}{b+a}$ 倍

三、解答题

- (1)(重庆市 2005) 化简: $(2 - \frac{4}{x+3}) \cdot \frac{x}{x+1}$
 (2)(苏州市 2005) 化简: $\frac{1}{2x} - \frac{1}{x+y} \cdot (\frac{x+y}{2x} - x - y)$
- (1)(安徽省 2005) 请将下面的代数式尽可能化简, 再选择一个你喜欢的数(要合适哦!) 代入求值.

$$2a - (a+1) + \frac{a^2-1}{a-1}$$
 (2)(重庆市课改区 2005) 先化简, 再求值.

$$\frac{b}{a-b} - \frac{b^3}{a^3-2a^2b+ab^2} \div \frac{ab+b^2}{a^2-b^2}$$
 其中 $a = \sqrt{12}, b = \sqrt{3}$.

四、探索创新

- (河南省实验区 2005) 有这样一道题: “请化简 $(\frac{x-2}{x+2} + \frac{4x}{x^2-4}) \div \frac{1}{x^2-4}$, 再求值, 其中 $x = -\sqrt{3}$.” 小玲做题时把 “ $x = -\sqrt{3}$ ” 错抄成了 “ $x = \sqrt{3}$ ”, 但她的计算结果也是正确的, 请你解释这是怎么回事.



2.3 二次根式

1. 了解平方根、立方根、开平方、开立方的概念.

(1) 如果一个数的平方等于 a , 即 $x^2 = a$, 那么这个数就叫做 a 的平方根(也叫做二次方根).

一个正数有两个平方根; 0 只有一个平方根, 它是 0



本身;负数没有平方根.

(2) 求一个正数的平方根的运算,就叫做开平方.

(3) 立方根:如果一个数的立方等于 a ,即 $x^3 = a$,那么这个数就叫做 a 的立方根.正数的立方根是正数;0的立方根是0;负数的立方根是负数.

(4) 求一个数的立方根的运算,就叫做开立方.

2. 明确算术平方根的概念:一般地,如果一个正数 x 的平方等于 a ,即 $x^2 = a$,那么这个正数 x 就叫做 a 的算术平方根,记为 \sqrt{a} ,我们规定0的算术平方根是0,即 $\sqrt{0} = 0$.

3. 二次根式、最简二次根式、同类二次根式的概念

(1) 二次根式是形如 $\sqrt{a}(a \geq 0)$ 的式子.

(2) 最简二次根式满足被开方数的因数是整数,因式是整式,被开方数中不含能开得尽方的因数或因式.

(3) 同类二次根式是把二次根式化为最简二次根式后,被开方数(式)相同.

4. 二次根式运算的性质

$$(\sqrt{a})^2 = a(a \geq 0) \quad \sqrt{a^2} = |a|$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}(a \geq 0, b \geq 0)$$

$$\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}(a > 0, b \geq 0)$$

5. 二次根式的运算

(1) 二次根式的加减法主要是把根式化成最简二次根式后合并同类二次根式.

(2) 二次根式的乘法主要是逆用性质 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}(a \geq 0, b \geq 0)$,并参照多项式乘法法则进行运算;二次根式的除法有时可逆用性质 $\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}(a > 0, b \geq 0)$ 进行运算.



例 1 (1) 一个正数 x 的两个平方根分别是 $a+1$ 和 $a-3$,则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) $\sqrt{x-2} + \sqrt{3-x}$ 有意义,则 x 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解析 (1) 由题意得: $a+1+a-3=0$,解得 $a=1$,所以 $x=4$.

(2) 由
$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases}$$
 解得 $2 \leq x \leq 3$.

注 ① 由于一个正数的平方根有两个,它们互为相反数,根据这一理论,建立关于 a 的方程求解.

② 根据被开方数只能为非负数,建立不等式(组).

例 2 (1) 在下列根式 $4\sqrt{5a}$, $\sqrt{2a^3}$, \sqrt{b} , $\sqrt{8x}$, $\sqrt{\frac{a}{2}}$ 中,最简二次根式的个数为().

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

(2)(北京市海淀区 2004) 已知 $\sqrt{3-x} + |2x-y| = 0$,那么 $x+y$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解析 (1) 由最简二次根式的概念可知 $4\sqrt{5}$ 和 \sqrt{b} 是最简二次根式,故选择 C.

(2) 因为 $\sqrt{3-x} \geq 0$, $|2x-y| \geq 0$,

$$\text{所以只有 } \begin{cases} 3-x=0 \\ 2x-y=0 \end{cases} \text{ 时, } \sqrt{3-x} + |2x-y| = 0$$

成立,

解得 $x=3, y=6$,故 $x+y=9$.

注 ① 最简二次根式满足被开方数的因数是整数,因式是整式;被开方数中不含能开得尽方的因数或因式.

② 运用几个非负数之和为零,那么这几个数同时为零的规律,我们已经学过的非负数有偶次幂、绝对值、算术平方根等.

例 3 计算:(1) $(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{5})$

(2) $(\sqrt{3}-2\sqrt{12}-\sqrt{6}) \cdot 2\sqrt{3}+5\sqrt{2}$

解析 (1) $(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{5})$

$$= \sqrt{6}^2 - \sqrt{5}^2 = 6 - 5 = 1$$

(2) $(\sqrt{3}-2\sqrt{12}-\sqrt{6}) \cdot 2\sqrt{3}+5\sqrt{2}$

$$= \sqrt{3} \times 2\sqrt{3} - 2\sqrt{12} \times 2\sqrt{3} - \sqrt{6} \times 2\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$$

$$= 2\sqrt{3}^2 - 4\sqrt{36} - 2\sqrt{3}^2 \times 2 + 5\sqrt{2}$$

$$= 6 - 24 - 6\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$$

$$= -18 - \sqrt{2}$$

注 ① 二次根式的乘法运算,应注意乘法公式和乘法运算律的灵活运用,如(1)题运用平方差公式.

(2)题先用乘法分配律展开,然后逆用 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}(a \geq 0, b \geq 0)$,再化成最简根式,合并同类二次根式.

② 注意运算结果必须化为最简二次根式.

例 4 (1) 先将 $\frac{\sqrt{x-2}}{x-2} \div \sqrt{\frac{x}{x^3-2x^2}}$ 化简,然后自选出一个合适的值,代入化简后的式子求值.

(2)(贵阳实验区 2004) 先化简,再求值: $(\frac{3x}{x-1} -$

$$\frac{x}{x+1}) \frac{x^2-1}{x}$$
,其中 $x = \sqrt{2}-2$.

解析 (1) 原式 = $\frac{\sqrt{x-2}}{x-2} \div \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}$