

中国高中数学高考知识点
与学科综合能力专项训练大全

最新修订版

100%覆盖高考考点

完全解读高考命题信息

New

高考新考点

完全解读与优化训练

数学

总主编：何舟
本书主编：李果民

2004 考心胜



中国高中生数学常考知识点
与学科综合能力冲刺训练

最新修订版

New

高考新考点

完全解读与优化训练

总主编 何 舟
本书主编 李果民
副主编 冯克俭
撰 稿 冯克俭 姜俊波 张锡民
王起来 杨树森 徐印同
赵小兵 张振山
马长苓 李 强
谢 平 张艳春
王国红 王秀娟

数学

2004 考必胜

中国少年儿童出版社

中国高中生数学常考知识点与学科综合能力冲刺训练大全

高考新考点

完全解读与优化训练

数 学

◆ 出版发行：中国少年儿童出版社
出版人：/

主 编：李果民	装帧设计：张 奇
责任编辑：余俊雄	美术编辑：周建明
责任校对：于彩敏 潘 晔 滕 娅	责任印务：栾永生

社 址：北京东四十二条 21 号	邮政编码：100708
电 话：086-010-64032266	传 真：086-010-64012262
印刷：新泰市汶南福利彩印厂	经销：新华书店
开本：880 × 1230 毫米 1/32	印张：16.125
2003 年 9 月北京第 3 版	2003 年 9 月 山东第 5 次印刷
字数：448 千字	印数：15000 册
ISBN 7 - 5007 - 5535 - X/G · 4327	定价：16.80 元

图书若有印装问题，请随时向印刷厂退换。

版权所有，侵权必究。



创新·应用·开放

——高考数学命题特点、趋势与总复习建议

2003年是施行高中课程改革试验高考的第四年,今年的数学试卷与前三年相比,试卷的结构和考查方式;采用的题型和配备的题量;各种题型的分值比例;考查的内容及其所占分值比例等方面保持相对稳定,但对考生能力、知识的综合运用,数学素养等却有较高的要求。

一、试卷的主要特点

(一)重点突出

试卷将高中数学的重点作为重要的考查对象,保持较高的比例,而且达到必要的深度,已成为试题的主体。代数中的函数、数列、不等式、三角基本变换;立体几何中的线与线、线与面、面与面的平行和垂直关系;解析几何中圆锥曲线的性质、轨迹方程;课程改革试验后新增加的向量、概率统计、导数等已构成高中数学的主干知识,同时也是高考考查的重点内容。

例如,函数的有关知识是高中数学最基本,也是最重要内容之一,2003年数学理科试卷中,有(2)(3)(5)(7)(10)(17)(19)共7个试题,总体49分,直接对函数的有关概念、重要性质、基本方法、基本应用进行了考查,其中包括:函数的符号、定义域、值域、分段函数、反函数、函数的图象及描点法作图;函数的单调性、周期性、连续性;导数及其几何意义、函数的最值等。涉及到的函数类型有:二次函数、指数函数、对数函数、三角函数,反三角函数,复合函数等。对函数的考查几乎涵盖了高中所学函数的全部内容,而且要求也较高。

又如,立体几何是培养学生空间想象能力最有力的工具,是高中数学不可或缺的内容之一,2003年数学理科试卷中,有(6)(12)(16)(18)共4个试题,总计26分,通过对空间图形辨识、几何元素的位置关系的确定,相关几何量的计算,来实现对空间想象能力,逻辑推理能力的考查。今年的试题在立体几何上的要求高于往年。

再如,2003年数学理科试卷中,有(4)(7)(14)(19)(20)共计5个试题对新课程增加的内容:平面向量、导数、概率、统计等进行了考查。





2003年数学理科试卷中,对数列、不等式、解析几何等内容的考查试题有(7)(8)(9)(11)(21)(22)等。

初步统计表明,上述内容已成为高考考查的重点,考查的试题已成为试卷的主题,约占全卷总分的90%。

(二) 注重能力

高考不仅考查考生对高中数学知识掌握情况,而且考查他们在运用知识和方法的过程中所表现的数学能力和一般心理能力。数学能力是指思维能力,运算能力,空间想象能力和运用所学数学知识分析问题和解决问题的能力,其中数学思维能力是数学能力的核心,分析问题和解决问题的能力相对于前三者它是一种综合能力,反映出思维的更高层次。2003年高考数学试卷以数学学科能力为基础,以思维能力为核心,全面考查学生应具备的各种能力。

1. 注重运算能力

运算能力是思维能力与运算技能的结合,运算能力主要是数与式的组合与求解变形能力。整个试卷22个试题,除(4)(6)两题外,其余的20个题都需要经过计算才能求的结论。这里既有数学、字母运算,也有向量的计算;既有一般的代数运算,也有指数、对数、三角函数的计算;有解方程,也有不等式的求解;有初等数学的一般演算,也有高等数学导数、极限的计算。正确解答试题不仅要求计算准确,而且需要运算熟练、合理、简捷,体现对考生思维的敏捷性、灵活性和深刻性的考查。

2. 注重空间想象能力

高考数学对空间想象能力的考查,一般是通过立体几何试题来实现的。2003年数学文、理试卷各有4个题目为立体几何试题,所占分值均为26分高于其所占课时比例,也高于往年高考中立体几何的比例。

试题对空间图形认识的要求高于往年,理科的第(6)(12)两题都是复合题,这样就增加识别图形的难度;第(16)题需在5个空间图形中,从不同的角度观察图中线与线的关系,判断出异面直线垂直,进而推证线与面垂直,稍有疏忽即可出错。这些题目的正确解答,需要具备较强空间观念,对所涉及到的正方体、正四面体、正八面体以及球等空间几何体的正确理解和把握,能将复空间图形分解成简单图形的组合,能将空间问题转化为平面问题进行解决。

3. 注重思维能力

由于思维能力是数学能力的核心,因此,从某种意义上讲对其他能力的考查仅是表象,其实质还是考查思维能力。如解答理科试卷第(8)题,要根据方程的根确定



等差数列,然后计算 $|m-n|$ 的值.在解题过程中需要认真分析已知条件并从中提取有用的信息:① $\frac{1}{4}$ 是方程的一个根;② $\frac{1}{4}$ 是四个根组成等差数列的第一项;③ m 和 n 分别是两个根的积;④每两个根的和都等于2;⑤需先确定等差数列的各项;⑥求出 m 与 n 值等.仅有这一方面还够,还必须从记忆系统中提取与题目有关的信息:⑦等差中项的有关知识;⑧方程的根与系数的关系.还要对从两方面提取信息进行有机的组合;并条理化地进行整理,形成解题的行动系列:(1)将 $\frac{1}{4}$ 代入到一个二次方程中求得 m (或 n)的值;(2)利用 $\frac{1}{4}$ 和 m (或 n)的值求得数列的第4项;(3)根据等差数列通项求出公差及第2、3两项;(4)计算数列第2、3两项的乘积,即为 n (或 m);(5)最后计算 $|m-n|$ 的值.在实施解题序列的过程中,推理和运算能否顺利完成,这些都是数学能力的体现,实际上思维能力已具体地表现为运算能力、逻辑推理能力和分析问题解决问题的能力.

再如,理科试卷第(15)题,是染色问题.解答此题需具备较强分析问题、解决问题的能力,解决问题过程中要始终保持头脑清醒、思维缜密、推理精细、方法得当,对考生的思维能力、综合素质提出较高的要求.

(三) 强调综合

考查综合运用知识的能力是2003年数学试题的突出特点.试题的设计注重了学科的内在联系和综合,注意在知识网络的交汇处命题,提出问题,展开设问.

1. 新课程增加内容与传统内容的综合

试题把“平面向量”,“导数”作为切入点将新课程增加内容与传统内容有机地结合在一起.如2003年数学理科试卷中第(4)(12)题将平面向量与解析几何的直线,平面几何的三角形有关知识结合,解决这些问题时,除需掌握直线,三角形“五心”的有关知识外,还需掌握向量的基本概念、基本运算.再如理科试卷中第(7)题是利用导数求曲线的切线斜率,第(19)题是利用导数来确定函数的单调性的,这两个题目的解答中导数已成为不可缺少的工具.

2. 学科各分支内容的综合

如2003年数学理科试卷中第(8)题是等差数列与方程的综合;第(11)题是组合、数列求和、极限的综合;第(9)题是直线与双曲线的综合;第(6)题和第(12)题分别在八面体与正方体的复合体及四面体与球的复合体中确定他们之间的位置关系,计算相关元素的数量关系.



3. 解决综合试题需要多种能力的综合

例如,第(12)是球与其内接的正四面体的复合体,欲求球的表面积,需求的球的半径,而球的半径正是球心到内接四面体的顶点的线段,又已知四面体的棱为 $\sqrt{2}$,因此,需添加辅助线将半径放在相应的三角形中,再利用平面几何以及解三角形的有关知识计算求解.因此,解决此题不仅需要较强的计算能力,还需具备较强的空间想象能力和逻辑推理能力,是综合能力的体现.

又如,第(21)题是研究两条直线的交点轨迹问题,题中的直线是借助向量的知识给出的,解决此题,需要利用直线的方向向量的概念和向量的坐标运算求得直线的方程,再根据求轨迹的方法消去两直线方程中的参数得动点的轨迹方程,然后利用椭圆的方程与性质,曲线与方程的关系等解析几何的基本思想以及分类讨论的数学思想完成问题解答.解答中需要对数学进行演算、对式子进行变形,同时还需要对参数进行分析,对方程给出判断,其间,推理、论证、演算,环环相扣,步步相连,单独一种能力很难得到圆满的解答.

二、对高中数学教学几点启示

由于2003年高考数学试题的综合程度有较大的提高,大部分考生感到不适应,除了要求命题人在命题时,能充分考虑到中学数学的教学实际,并据此科学确定试卷和试题的难度之外,更重要的是分析学生出现的问题,深刻反思中学数学教学的弊端,除弊立益,改进复习工作的教学,使学生得到更好的发展.

启示之一,应重视基础知识的理解,基本技能的训练

高考试卷在选择题、填空题和解答题的起始题的设计都注重了控制试题的绝对难度,立足考查基础知识和基本技能,就是一些综合性的题目其设问的编排也注意到由浅入深.但是,由于教学上的某些疏忽和轻视造成学生的知识的空白和技能的缺陷.例如,理科的(21)和文科的(22)题是同一个题,其中涉及到“直线的方向向量”的概念,相当一部分考生不知“直线的方向向量”为何物,有部分教师也认为教材中没有“直线的方向向量”这个概念.由于这一知识点的遗漏,直接影响了对该题的理解和解答,抽样统计结果显示60%的考生的得分不超过2分; $\frac{1}{3}$ 的考生得零分.又如,理科的第(17)题的(II),要求考生在直角坐标系中,用“五点法”描点画出化简后的函数 $f(x) = 1 + \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的图象.描点法画已知函数的图象是高中生应掌握的基本技能,而且还是熟知的三角函数的图象,



然而,由于教学和复习中缺乏必要的训练,基本方法没掌握,对于这样一个非常的基本问题,得满分者不足 $\frac{1}{4}$,图象画的千奇百怪,错误情况五花八门。窥一斑而见全豹,应吸取教训,在日常教学中,重视课本,重视基础知识的教学,强调基本技能的训练。

启示之二,重视知识结构,注意知识间的联系

高考改革的宗旨是加强能力和素质的考查,孤立的强调考查某一种能力已不适宜,反映在试题中单一考查某一个知识点的题目已很少出现。解符号这些试题需要多个知识的综合运用,其基础是具备良好的知识结构。数学知识的学习往往是一部分一部分进行的,而数学知识的应用确实综合的,同时,数学知识的结构的形成和发展,又是一个知识积累、梳理的过程。因此,在教学和复习中首先要扎实学好基础知识并在此基础上,注意各部分知识的各自发展过程中的纵向联系,以及各部分知识之间的横向联系,理清脉络,抓住知识主下,构建知识网络。

启示之三,突出思维能力的培养

高考是能力型考试,它不仅考查学生对高中阶段数学知识的掌握情况,而且以这些知识为材料,考查学生在运用知识和方法的过程中的学科能力和一般能力,是把数学学科作为一个整体,进行综合考查。要想在高考中取得较好成绩,没有良好的能力是难以实现的。考生数学能力的培养、发展和形成是伴随着数学知识的形成与发展之中孕育而生。学习中,应克服重视结果、轻视过程的倾向,避免大量机械的重复练习的“题海”战术,要精选习题、注意分析、重视解题过程、总结规律,使数学能力在知识的积累、系统化和网络化的形成过程中得到大幅度的提高和发展。

启示之四,改革教学方式和学习方式

今年理科试题的(4)(10)(22),设计新颖,情景陌生,相当部分考生不解题意,无法解答。其原因何在?其中一个主要原因是,课堂教学观念陈旧,教学方法单一。中学数学的课堂教学,基本上还是采用教师讲学生听,教师讲什么学生听什么,教师怎么讲,学生怎么听的单一的教学模式。特别是,以应试为惟一自的的教学和复习模式,其显著的特点是模仿、机械记忆和反复练习,这种培养方式,只能培养应试能力,只会照搬题型,遇到新的问题情景就束手无策,这样的事例在高考答卷中屡见不鲜。这样的培养模式使学生的思维僵化,钝化了学生的创造力,影响学生能力的进一步发展。当前,要适应课程改革的需要和高考改革的新要求,在教学中,应提倡“问题解决模式”和“研究性学习”,为学生构建一种开放的学习环境,提供多种



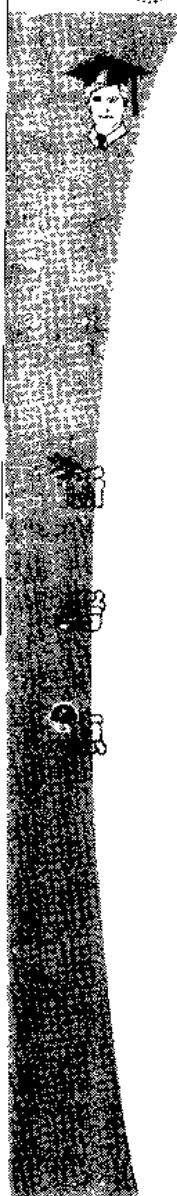


获取知识的渠道. 在数学问题的提出、分析和解决过程之中, 让学生亲身经历数学问题的发现过程、解决方法和探索过程、问题结论的深化过程. 教师通过适时的启发、点拨, 引导学生进行主动的探索, 学生通过观察、分析、综合、抽象、概括, 在数学的思维的活动中逐步提高数学能力, 形成创新意识.

2003 年普通高等学校招生全国统一考试(全国卷)

2003 年普通高等学校招生全国统一考试(上海卷)

2003 年普通高等学校招生全国统一考试(天津卷)



目 录

创新·应用·开放

- 高考数学命题特点、趋势与总复习建议 (1)

第一章 集合与简易逻辑

- 考点1 集 合 (1)
- 考点2 含绝对值不等式和一元二次不等式的解法 (7)
- 考点3 简易逻辑与充要条件 (11)
- 挑战高分本章训练优化设计 (16)

第二章 函 数

- 考点4 映射、函数、反函数 (19)
- 考点5 函数的解析式、定义域、值域 (25)
- 考点6 函数的性质 (31)
- 考点7 指数函数与对数函数 (38)
- 考点8 函数的图象及其变换 (46)
- 考点9 函数的应用 (52)
- 挑战高分本章训练优化设计 (62)

第三章 数 列

- 考点10 数列的概念 (64)
- 考点11 等差数列 (72)
- 考点12 等比数列 (79)
- 考点13 数列的综合应用 (86)
- 考点14 数学归纳法及其应用 (94)
- 挑战高分本章训练优化设计 (103)

第四章 三角函数

- 考点15 角的概念与任意角三角函数 (106)
- 考点16 同角关系诱导公式 (109)
- 考点17 两角和与差的三角函数 二倍角 (113)





考点 18	三角函数的图象和性质	(120)
考点 19	三角函数的求值、化简与证明	(126)
考点 20	三角函数的最值	(133)
挑战高分本章训练优化设计		(139)

第五章 平面向量

考点 21	向量的运算	(141)
考点 22	平面向量的坐标表示	(146)
考点 23	线段的定比分点和平移	(152)
考点 24	解斜三角形	(157)
挑战高分本章训练优化设计		(163)

第六章 不等式

考点 25	不等式的概念和性质	(165)
考点 26	算术平均数与几何平均数	(170)
考点 27	不等式的证明	(176)
考点 28	不等式的解法	(183)
考点 29	含绝对值的不等式	(188)
考点 30	不等式的应用问题	(193)
挑战高分本章训练优化设计		(199)

第七章 直线和圆的方程

考点 31	直线的方程及两直线的位置关系	(201)
考点 32	简单的线性规划	(206)
考点 33	曲线和方程	(212)
考点 34	圆的方程	(216)
考点 35	直线和圆的位置关系	(221)
挑战高分本章训练优化设计		(226)

第八章 圆锥曲线方程

考点 36	椭圆及其标准方程	(228)
考点 37	双曲线及其标准方程	(234)
考点 38	抛物线及其标准方程	(242)
考点 39	直线与圆锥曲线的位置关系	(248)
考点 40	综合运用	(253)
挑战高分本章训练优化设计		(260)





第九章 直线、平面、简单几何体

考点 41 平面与空间直线	(263)
考点 42 直线与平面间的平行与垂直	(268)
考点 43 空间的角	(276)
考点 44 空间的距离	(284)
考点 45 棱柱、棱锥、多面体	(290)
考点 46 球	(300)
挑战高分本章训练优化设计	(304)

第十章 空间向量

考点 47 空间向量及其运算	(307)
考点 48 空间向量的坐标运算	(314)
挑战高分本章训练优化设计	(318)

第十一章 排列、组合和概率

考点 49 两个计数原理	(321)
考点 50 排列与组合	(328)
考点 51 二项式定理	(337)
考点 52 概 率	(343)
挑战高分本章训练优化设计	(350)

第十二章 概率与统计

考点 53 离散型随机变量的分布列	(352)
考点 54 离散型随机变量的期望值和方差	(357)
考点 55 统 计	(361)
挑战高分本章训练优化设计	(365)

第十三章 极 限

考点 56 数列的极限	(367)
考点 57 函数的极限	(373)
考点 58 函数的连续性	(379)
挑战高分本章训练优化设计	(383)

第十四章 导数与微分

考点 59 导数与微分的概念	(385)
考点 60 导数的应用	(391)
挑战高分本章训练优化设计	(395)



第十五章 复 数

考点 61 复数的有关概念	(397)
考点 62 复数的代数形式及其运算	(403)
挑战高分本章训练优化设计	(407)
2003 年普通高等学校招生全国统一考试(全国卷)	(409)
2003 年普通高等学校招生全国统一考试(上海卷)	(413)
2003 年普通高等学校招生全国统一考试(天津卷)	(416)

参考答案及提示

第一章 集合与简易逻辑	(420)
第二章 函 数	(422)
第三章 数 列	(428)
第四章 三角函数	(432)
第五章 平面向量	(439)
第六章 不等式	(442)
第七章 直线和圆的方程	(446)
第八章 圆锥曲线方程	(451)
第九章 直线、平面、简单几何体	(459)
第十章 空间向量	(469)
第十一章 排列、组合和概率	(473)
第十二章 概率与统计	(475)
第十三章 极 限	(478)
第十四章 导数与微分	(482)
第十五章 复 数	(484)



第一章 集合与简易逻辑

重、难、疑点与热点剖示

重点 理解集合、子集、交集、并集、补集的概念；解决绝对值不等式及一元二次不等式的方法；充要条件的判定等内容。

难点 集合之间包含关系的确定；集合术语的理解，集合与不等式问题综合时转化技巧的应用，逻辑联结词的意义领会等内容。

疑点 “或”“且”“非”含义的理解，命题的等价性，集合的多种运算关系等。

热点 考查集合概念的认识与理解；考查集合知识的应用，如求不等式和不等式组的解集；考查准确使用数学语言的能力；考查命题的形式及等价性；考查充要条件的判定；考查逻辑推理和分析问题的能力等。

学习本章知识要掌握集合的语言、符号以及“或”“且”“非”逻辑联结词的含义；要准确掌握集合、元素、子集、交集、并集、补集、命题、充要条件等概念；要强化数形结合意识，自觉利用韦恩图、数轴、函数图象帮助解题，提高数学解题中的形象思维能力。在遇到集合语言与集合思想的运用问题时，如函数定义域、值域、方程与不等式的解集、解几中曲线间的相交问题等，这些问题多是集合与其他知识点的揉合，所以要注意数学思想方法的复习，解题时要广泛应用数形结合、逻辑划分、函数方程思想、等价能力思想等，并辅之以配方法、图象法、判别式法，达到灵活解题的目的。

考点1 集 合

考点归纳

理解集合、子集、补集、交集、并集的概念，了解空集和全集的意义，了解属于、包含、相等关系的意义。复习中要注意将集合内容与其他章节知识相结合，适当渗透相关数学思想，并善于利用这些思想解决问题。近些年来，集合是必考的内容，虽然难度不大，但也考查了一些方法性的操作技巧。

思维拓展

解答集合问题，要正确理解集合的有关概念，对于用描述法给出的集合 $\{x|x \in P\}$ ，要紧紧抓住竖线前面的代表元素 x 以及它所具有的性质 P ；树立借助韦恩





图、数轴解决集合问题的意识;明确集合中元素的确定性、互异性、无序性;处理集合问题时,注意知识间的必然联系,如数集和点集都与函数、方程、不等式、解析几何有关,解题中要使思维具有广阔的视角.

考查方式

近几年高考对集合的考查多以选择题的形式出现,难度一般,属易解题.

考题回顾

例 1 (2003·北京) 设集合 $A = \{x | x^2 - 1 > 0\}$, $B = \{x | \log_2 x > 0\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ().

- A. $\{x | x > 1\}$ B. $\{x | x > 0\}$
C. $\{x | x < -1\}$ D. $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$

思路分析 用描述法写出各个集合中的元素,就可以很快确定 $A \cap B$ 了.

解法指导 A.

易错点析 交集运用不清楚,这都可能导致错误.

例 2 (2001·上海) 设集合 $A = \{x | 2 \lg x = \lg(8x - 15), x \in \mathbf{R}\}$, $B =$

$\{x | \cos \frac{x}{2} > 0, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $A \cap B$ 的元素个数为 _____ 个.

思路分析 先化简集合,找出集合中元素的构成,再验证即可判断.

解法指导 1.

易错点析 验证 $x = 3, 5$ 是否在 B 中时,易疏忽二者皆为弧度数,由所在象限判定其余弦取值符号,易出现错误.

例 3 (2002·天津) 设集合 $M = \{x | x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$, $N = \{x | x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$, 则 ().

- A. $M = N$ B. $M \subsetneq N$ C. $M \supsetneq N$ D. $M \cap N = \emptyset$

思路分析 从子集的判断入手,再佐以个别元素的检验,即可得出真子集的结论.

解法指导 任取 $x_0 \in M$, 则 $x_0 = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}$, 即 $x_0 = \frac{1}{4}(2k+1) = \frac{1}{4}[(2k-1)+2]$
 $= \frac{1}{4}(2k-1) + \frac{1}{2}$.

$\therefore k \in \mathbf{Z}, 2k-1 \in \mathbf{Z}$,

$\therefore x_0 \in N$, 由此知 $M \subseteq N$.

又由于显然有 $\frac{1}{2} \in N$, 但令 $\frac{1}{2} = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k = \frac{1}{2} \notin \mathbf{Z}$, 由此知 $\frac{1}{2} \notin M$, 综上, 得 $M \subsetneq N$, 选 B.





方法指导 本题如果被集合表示的形式所惑,不能推导出元素的归属关系,则不能判定 M 是 N 的真子集.

例 4 (2013·全国) (1) 设 $\{a_n\}$ 是集合 $\{2^i + 2^j \mid 0 \leqslant i < j, \text{且 } i, j \in \mathbf{Z}\}$ 中所有的数从小到大排列成的数列,

即 $a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 6, a_4 = 9, a_5 = 10, a_6 = 12, \dots$

将数列 $\{a_n\}$ 各项按照上小下大,左小右大的原则写成如下的三角形数表:

$$\begin{array}{c} 3 \\ 5 \quad 6 \\ 9 \quad 10 \quad 12 \\ \dots \end{array}$$

① 写出这个三角形数表的第四行、第五行各数;② 求 a_{100} .

(2) 设 $\{b_n\}$ 是集合 $\{2^r + 2^s + 2^t \mid 0 \leqslant r < s < t, \text{且 } r, s, t \in \mathbf{Z}\}$ 中所有的数都是从小到大排列成的数列,已知 $b_k = 1160$, 求 k .

方法指导 注意元素和集合的关系,准确计算元素个数.

思路分析 (1) ① 第四行 17 18 20 24 第五行 33 34 36 40 48

② 设 $a_{100} = 2^{s_0} + 2^{t_0}$, 只须确定正整数 s_0, t_0 .

数列 $\{a_n\}$ 中小于 2^{10} 的项构成的子集为 $\{2^i + 2^j \mid 0 \leqslant i < j < 10\}$,

其元素个数为 $C_{10}^2 = \frac{t_0(t_0-1)}{2}$, 依题意 $\frac{t_0(t_0-1)}{2} < 100$. 满足等式的最大整数 t_0

为 14, 所以取 $t_0 = 14$.

因为 $100 - C_{14}^2 = s_0 + 1$, 由此解得 $s_0 = 8$,

$\therefore a_{100} = 2^{14} + 2^8 = 16640$.

(2) $b_k = 1160 = 2^{10} + 2^7 + 2^3$, 令 $M = \{c \in B \mid c < 1160\}$, 其中, $B = \{2^r + 2^s + 2^t \mid 0 \leqslant r < s < t\}$

因 $M = \{c \in B \mid c < 2^{10}\} \cup \{c \in B \mid 2^{10} < c < 2^{10} + 2^7\} \cup \{c \in B \mid 2^{10} + 2^7 < c < 2^{10} + 2^7 + 2^3\}$.

现在求 M 的元素个数: $\{c \in B \mid c < 2^{10}\} = \{2^i + 2^j + 2^k \mid 0 \leqslant i < j < k < 10\}$,

其元素个数为 C_{10}^3 ; $\{c \in B \mid 2^{10} < c < 2^{10} + 2^7\} = \{2^{10} + 2^i + 2^j \mid 0 \leqslant i < j < 7\}$.

某元素个数为 C_7^2 ; $\{c \in B \mid 2^{10} + 2^7 < c < 2^{10} + 2^7 + 2^3\} = \{2^{10} + 2^7 + 2^i \mid 0 \leqslant i < 3\}$.

某元素个数为 C_3^1 ; $k = C_{10}^3 + C_7^2 + C_3^1 + 1 = 145$.

方法指导 M 中的元素的确认至关重要.

典型题链

新情境题 在一次考试中,某班级有 36 人的数学成绩不低于 80 分,有 20 人的





物理成绩不低于 80 分,且有 15 人的数学、物理成绩都不低于 80 分,那么,有多少人在这两科成绩中至少有一科不低于 80 分?

思路分析 并集中元素的个数寻求要注意元素的互异性.此题还可转换成求两科成绩均低于 80 分的人数,这正是高考题中求集合中元素个数的一类题目,只不过本题入手先转换成集合语言,这是关键所在.

解法指导 用 A, B 分别表示数学、物理成绩不低于 80 分的学生的集合,则

$$\begin{aligned}\text{Card}(A \cup B) &= \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) \\ &= 36 + 20 - 15 \\ &= 41.\end{aligned}$$

\therefore 至少有 41 人.

新情境题 2 已知 $A = \{2, 4, a^3 - 2a^2 - a + 7\}$, $B = \{-4, a + 3, a^2 - 2a + 2, a^3 + a^2 + 3a + 7\}$, 且 $A \cap B = \{2, 5\}$, 求实数 a 的值, 并求 $A \cup B$.

思路分析 由交集元素入手, 求出待定系数 a 的可能性, 再检验是否符合条件. 这也是高考题分类讨论的类似手法, 本题若不验证, 则难免多解.

解法指导 $\because A \cap B = \{2, 5\}$, $A = \{2, 4, a^3 - 2a^2 - a + 7\}$,

$$\therefore a^3 - 2a^2 - a + 7 = 5.$$

解得 $a = -1, 1, 2$.

当 $a = -1$ 时, $A \cap B = \{2, 4, 5\}$, 这与已知矛盾;

当 $a = 1$ 时, $A \cap B = \{4\}$, 也与已知矛盾;

当 $a = 2$ 时, $A \cap B = \{2, 5\}$, 符合题意.

故 $a = 2$ 适合条件, 此时 $B = \{-4, 5, 2, 25\}$, $A \cup B = \{-4, 2, 4, 5, 25\}$.

新情境题 3 已知集合 $A = \{x | x^2 + 4x = 0\}$, 集合 $B = \{x | x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0\}$, 其中 $x \in \mathbf{R}$, 若 $A \cap B = B$, 求实数 a 的取值范围.

思路分析 利用分类讨论的思想将集 B 不同情况加以分析论证, 最终得到结果. 要注意 B 为空集这一情况, 不要疏忽丢掉, 这也是高考题考察集合时所特别关注的.

解法指导 先化简 $A = \{0, -4\}$, 由于 $A \cap B = B$, 所以 $B \subseteq A$, 以下分类讨论:

若 $B = \emptyset$ 时, 则有方程 $x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0$ 的判别式 $\Delta < 0$, 即

$$4(a+1)^2 - 4(a^2 - 1) < 0.$$

解得 $a < -1$.

若 $B = \{0\}$ 或 $B = \{-4\}$ 时, 方程 $x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0$ 中 $\Delta = 0$, 即

$$4(a+1)^2 - 4(a^2 - 1) = 0.$$

解得 $a = -1$.

此时 $B = \{x | x^2 = 0\} = \{0\}$, 满足题意.

若 $B = \{0, -4\}$ 时, 则由方程 $x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0$ 的两根为 0 和 -4, 可得