丛书主编 董德松（黄冈市教育科学研究院院长）

黄冈题典

高中数学

本册主编 张文华

（高二卷）

中国计量出版社 卓越教育图书中心

丛书主编　董德松（黄冈市教育科学研究院院长）

黄冈题典

高中数学

（高二卷）

本册主编　张文华

中国计量出版社
卓越教育图书中心

黄冈题典

高中版

编 委 会

董德松　黄冈市教育科学研究院院长，教育学硕士。长期工作在教学一线，多年主管教学工作，始终站在教改前沿，成功总结出一套完善的教学方法。主编多部教学指导用书，在各级刊物上发表教育教学论文数十篇。

张文华　中学数学高级教师，黄冈市骨干教师，学科带头人，湖北省中学数学专业委员会会员。指导学生多次在全国中学生数学竞赛中获奖，并获优秀指导教师奖。在多家刊物上发表论文数十篇，主编多部优秀教辅图书。

余国清　中学数学高级教师，黄冈市骨干教师，湖北省优秀数学教师，湖北省中学数学专业委员会会员，黄冈市教育学会中学数学专业委员会理事。在《理科考试研究》等多家刊物上发表论文，主编多部教辅图书。

王志明　中学数学高级教师，黄冈市骨干教师，高中数学教研组组长，湖北省中学数学专业委员会会员。在《中学理科月刊》等多家刊物上发表论文20余篇，主编多部优秀教辅图书。

黄冈名师 权威编写

王建国 中学物理高级教师，黄冈市骨干教师，高中物理教研组长，湖北省中学物理学会会员。曾获全国物理竞赛优秀指导教师奖。在多家刊物上发表论文数十篇，主编多部畅销教辅图书。

曾利欢 黄冈市重点中学物理高级教师。从教20多年，注重学生能力培养；12年高三任课经历，所带班级的高考物理成绩位居黄冈市前列；多次被授予“先进教学工作者”、“优秀班主任”等称号。主编多部优秀教辅图书。

陈长东 黄冈市重点中学化学高级教师，高中化学教研组组长，学科带头人，华中师大考试中心研究员，湖北省重点中学联考之化学和理综试卷命题人。在《中学化学教育学》等多家刊物上发表论文，编有《高中化学实验》等图书。

徐水娥 黄冈市中学化学高级教师，湖北省优秀化学教师，中国化学学会会员。多次参加湖北省高考阅卷工作。在多家刊物上发表论文20余篇，主编多部教辅图书。

黄冈题典

编写说明

《黄冈题典》由黄冈市教育科学研究院董德松院长亲任主编，编写队伍阵容强大，由数十位长期工作在中学教学一线的资深教师组成。这套丛书凝聚了他们丰富的教学经验和教研成果，体现了黄冈教学的精髓。

《黄冈题典》（高中版）包括高中数学、高中物理、高中化学共9个分册，分别适用于高一至高三各年级，涵盖数学、物理、化学等学科知识要求的各类题型，解析系统、完整，点评明确（点明该题所考查的知识点等）。各册以学科知识块为单元，并分设基础题、能力题和高考真题及模拟试题精选三个栏目。

基础题

精选典型基础习题，覆盖本知识块基本概念、基本规律及基本方法，重在夯实基础。

能力题

侧重知识迁移，实现巩固基础知识到提高综合能力转换，拓展解题思路，活用解题技巧，提升解题能力。**一题多解**（一道习题多法求解）、**多题一解**（不同习题解法相似），融会贯通知识内在联系，培养发散思维；**一题多变**（由条件和结果的变化使题目变化）类题类比，触类旁通，培养归纳能力，提高思维灵活性。

高考真题及模拟试题精选

精选近年全国各地的高考及模拟试题，分析精解，点评考题所考查的知识侧重点。学生可据此了解高考对本知识块考查的深度、广度，有助于分析高考趋势，提高应试能力。

目　　录

第1章 不等式的性质

基础题

1. 下列命题中正确的命题个数为 （　　）

①若 $a>b$，且 a 与 b 同号，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

②若 $\frac{1}{a}>1$，则 $a<1$；

③若 $a\geqslant b$，$ac\geqslant bc$，则 $c\geqslant 0$；

④若 $a>b$，$n\in \mathbf{N}^*$，则 $a^{2n+1}>b^{2n+1}$.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

解析　(1)∵a，b 同号，∴ $\frac{1}{ab}>0$，由 $a>b$，两边同乘以 $\frac{1}{ab}$，得 $\frac{a}{ab}>\frac{b}{ab}$，即 $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$，亦即 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，因此①是真命题.

(2)由 $\frac{1}{a}>1$ 可知 $a>0$，对式 $\frac{1}{a}>1$ 两边同乘以 a 得 $1>a$，综合得 $0<a<1$，故②是假命题.

(3)$ac\geqslant bc$，即 $c(a-b)\geqslant 0$，当 $a-b=0$ 时，c 可取任意实数，因此③是假命题.

(4)由 $a>b$ 可知，a，b，0 之间有三种可能性，即 $a>b\geqslant 0$，$a\geqslant 0>b$，$0>a>b$. 若 $a>b\geqslant 0$，则由定理 4 的推论 2 知：$a^{2n+1}>b^{2n+1}$；若 $a\geqslant 0>b$. 则 $a^{2n+1}\geqslant 0>b^{2n+1}$；若 $0>a>b$，则 $(-b)>(-a)>0$，仍由定理 4 的推论 2 知 $(-b)^{2n+1}>(-a)^{2n+1}$，即 $-b^{2n+1}>-a^{2n+1}$，再由定理 4 知 $a^{2n+1}>b^{2n+1}$，因此④是真命题.

选 B.

本题直接考查不等式的性质，在应用性质时必须注意不等式性质成立的条件，要特别注意题目中字母的正负.

2. 若 $a<b<0$，则下列不等关系中不能成立的是 ( )

A. $a^2>b^2$　　B. $|a|>|b|$　　C. $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$　　D. $\dfrac{1}{a-b}>\dfrac{1}{a}$

解析 $a^2>b^2$ 与 $|a|>|b|$ 是等价的，显然A，B都成立．由不等式性质 a 与 b 同号时，$a<b\Rightarrow\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$，$\therefore$C也成立．可知D不成立．由以下两种方法论证：(1)任取 a、b 特殊值，如 $a=-2$，$b=-1$，则 $\dfrac{1}{a-b}=-1$，$\dfrac{1}{a}=-\dfrac{1}{2}$，可知 $\dfrac{1}{a-b}<\dfrac{1}{a}$.

(2) 推理：$\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a-a+b}{a(a-b)}=\dfrac{b}{a(a-b)}$. $\because a<b<0$，$\therefore a-b<0$，$\therefore\dfrac{b}{a(a-b)}<0$，即 $\dfrac{1}{a-b}<\dfrac{1}{a}$. 选D.

点评 本题考查不等式的性质．$a^2>b^2$ 与 $|a|>|b|$ 等价，也可用特值法来排除D不成立．

3. 设 a，$b\in\mathbf{R}^+$，且 $a\neq b$，$n\in\mathbf{N}^*$ 则 $ab^n+a^nb-a^{n+1}-b^{n+1}$ 的值 ( )

A. 恒为正　　B. 恒为负

C. 与 a，b 的大小有关　　D. 与 n 是奇数或偶数有关

解析 $ab^n+a^nb-a^{n+1}-b^{n+1}=a(b^n-a^n)+b(a^n-b^n)=(a^n-b^n)(b-a)=-(a-b)(a^n-b^n)$.

若 $a>b>0$，则 $a-b>0$，$a^n-b^n>0$，

$\therefore -(a-b)(a^n-b^n)<0$.

若 $0<a<b$，则 $a-b<0$，$a^n-b^n<0$，

$\therefore -(a-b)(a^n-b^n)<0$　　选B.

点评 本题考查了分类讨论的思想，分 $a>b>0$ 和 $b>a>0$ 两类来确定作差的符号．

4. 已知 $a>b$，则不等式①$a^2>b^2$，②$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$，③$\dfrac{1}{a-b}>\dfrac{1}{a}$ 中不能恒成立的个数是 ( )

A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

解析 对于①，因 $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ 且 $a-b>0$，但 $a+b$ 的符号无法确定.

对于②，因 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$ 且 $b-a<0$，

但 ab 的符号无法确定.

对于③，因 $\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a}=\frac{b}{(a-b)a}$ 且 $a-b>0$，

但 $\frac{b}{a}$ 的符号不确定. 所以这三个不等式都不能成立. 选 D.

点评 本题考查了不等式是否成立的判定，应先将不等式两边作差，然后进行分解或通分，最后判断其符号.

5. 若 $a>b>0$，下列各式中恒成立的是 ( )

A. $a^a>a^b$　　B. $\frac{b^2+1}{a^2+1}>\frac{b^2}{a^2}$

C. $a+\frac{1}{a}>b+\frac{1}{b}$　　D. $\frac{2a+b}{a+2b}>\frac{a}{b}$

解析 可以利用不等式的性质，或利用特殊值法排除某些选项. 由不等式的性质可知：

$a=\frac{1}{10}$，$b=\frac{1}{20}$ 时，C 不成立，故舍去. 当 $0<a<1$，$a>b$ 时，可知 $a^a<a^b$，故 A 不成立. 如果选取特殊值 $a=2$，$b=1$，可知 $\frac{2a+b}{a+2b}=\frac{5}{4}$，$\frac{a}{b}=2$，故 D 不成立. 选 B.

点评 在解答选择题时，根据问题特点，往往使用特殊值的方法来排除某些选项，间接地达到确定某一选项的目的.

6. 下列命题正确的有 ( )

(1)若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$；　　(2)若 $\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$，则 $a>b$；

(3)若 $a>b$，$ab\neq0$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；(4)若 $a>b$，$c>d$，则 $ac>bd$.

A. (1)(2)　　B. (2)　　C. (2)(3)　　D. (1)(2)(4)

解析 (1)错误．当 $c=0$ 时不成立．

(2)正确．由原式知 $c^2\neq0$ 且 $c^2>0$，在 $\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$ 两边同乘以 c^2，不等式方向不变，得 $a>b$.

(3)错误．$a>b\Leftrightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 不成立，例如：当 $a=1$，$b=-1$ 时不成立．

(4)错误．$a>b$，$c>d\Rightarrow ac>bd$ 不成立，例如：$a=c=1$，$b=d=-2$ 时不成立． 选 B.

点评 本题考查了不等式的性质，对于不等式的八条性质在解题中要灵活、准确地加以应用，若是假命题，只需举一反例即可．

7. 下列命题中真命题的个数为 ( )

(1)若 $a<b$，$c<0$，则 $\frac{c}{a}<\frac{c}{b}$；

(2)若 $ac^{-3}>bc^{-3}$，则 $a>b$；

(3)若 $a>b$，且 $k\in\mathbf{N}^*$，则 $a^k>b^k$；

(4)若 $a>b$，$b>c$，则 $a-b>b-c$.

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

解析 (1)因为 $a<b$，没有指出 $ab>0$，故 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 不成立，因此推不出 $\frac{c}{a}<\frac{c}{b}$，∴ 是假命题．

(2)当 $c<0$ 时，$c^{-3}<0$，有 $a<b$，∴是假命题．

(3)当 $a=1$，$b=-2$，$k=2$ 时，显然命题不成立，∴是假命题．

(4)取一些适当的数值加以说明，取 $a=2$，$b=0$，$c=-3$ 满足 $a>b$，$b>c$ 条件．但是 $a-b=2<b-c=3$．∴是假命题．

两个同向不等式一般不能相减，相减后可能成立，也可能不成立，但两个同向不等式一定可以相加． 选 A.

点评 本题考查了判断一个命题为假命题常用的两种方法；(1)从条件入手推出与结论相反的结论；(2)举出反例予以否定．

8. 若 $m<n$，$p<q$，且 $(p-m)(p-n)<0$，$(q-m)(q-n)<0$，则 m，n，p，q 的大小顺序是　(　　)

A. $m<p<q<n$　　B. $p<m<q<n$

C. $m<p<n<q$　　D. $p<m<n<q$

解析　把 $(p-m)(p-n)<0$ 看作是关于 p 的一元二次不等式，由 $m<n$ 可得：$m<p<n$，同理可得：$m<q<n$，又 $p<q$，$\therefore m<p<q<n$.　选 A.

点评　本题把比较大小和解一元二次不等式结合到一起，不等式在比较大小时方法多种多样．比较的数较多时可以借助数轴标出各数的大小顺序．

9. 若 $2^a=3^b=5^c<1$，则实数 a，b，c 的大小关系是　(　　)

A. $a<b<c$　　B. $c<a<b$　　C. $b<a<c$　　D. $c<b<a$

解析　设 $2^a=3^b=5^c=k<1$，两边同时取以 10 为底的对数可得：$\lg 2^a=\lg 3^b=\lg 5^c=\lg k<0$，

由 $a\lg 2=\lg k<0$ 可得 $a=\dfrac{\lg k}{\lg 2}=\log_2 k=\dfrac{1}{\log_k 2}$；

同理　$b=\dfrac{1}{\log_k 3}$，$c=\dfrac{1}{\log_k 5}$.

$\because 0<k<1$，$\therefore \log_k 5<\log_k 3<\log_k 2<0$，

$\therefore \dfrac{1}{\log_k 5}>\dfrac{1}{\log_k 3}>\dfrac{1}{\log_k 2}$，即 $a<b<c$.　选 A.

点评　本题用统一的 k 把 a，b，c 三者的关系连系到一起，反映出数学中化归的思想，再借助对数的性质来比较大小．

10. 设 a，b，$c\in\mathbf{R}$，且 a，b，c 不全相等，则不等式 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$ 成立的充要条件是　(　　)

A. a，b，c 全为正数　　B. a，b，c 全为非负数

C. $a+b+c\geqslant 0$　　D. $a+b+c>0$

解析　$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2+c^3-3abc-3a^2b-3ab^2$

$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2+c^3-ac-bc)-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

$\because a$，b，c 不全相等，$\therefore (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2>0$，

$\therefore a^3+b^3+c^3-3abc\geqslant 0 \Leftrightarrow a+b+c\geqslant 0$. 选 C.

点评 本题用作差的方法巧妙地变形，使 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 与 $\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$ 的符号相同，即要 $a^3+b^3+c^3-3abc\geqslant 0$，也就是 $a+b+c\geqslant 0$.

11. 比较当 $a\neq 0$ 时，$(a^2+\sqrt{2a}+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)$ 与 $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$ 的大小.

解析 $(a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)-(a^2+a+1)(a^2-a+1)$

$=[(a^2+1)^2-(\sqrt{2}a)^2]-[(a^2+1)^2-a^2]=-a^2$.

$\because a\neq 0$，$\therefore -a^2<0$.

$\therefore (a^2+\sqrt{2}a+1)(a^2-\sqrt{2}a+1)<(a^2+a+1)(a^2-a+1)$.

点评 本题考查用作差法比较两个式子的大小，关键在于判断它们差的符号，至于差的数值是多少并不重要.

12. 比较 x^6+1 与 x^4+x^2 的大小，其中 $x\in\mathbf{R}$.

解析 $(x^6+1)-(x^4+x^2)=x^6-x^4-x^2+1$

$=x^4(x^2-1)-(x^2-1)=(x^2-1)(x^4-1)$

$=(x^2-1)(x^2-1)(x^2+1)=(x^2-1)^2(x^2+1)$.

$\therefore$ 当 $x=\pm 1$ 时，$x^6+1=x^4+x^2$；

当 $x\neq\pm 1$ 时，$x^6+1>x^4+x^2$.

点评 本题判断差的符号是通过因式分解的方法实现的，本题最后定号，必须进行分类讨论.

13. 比较 $\left(\frac{n}{\sqrt{6}}+1\right)^3-\left(\frac{n}{\sqrt{6}}-1\right)^3$ 与 2 的大小 ($n\neq 0$).

解析　设 $a=\frac{n}{\sqrt{6}}$，则 $\left(\frac{n}{\sqrt{6}}+1\right)^3-\left(\frac{n}{\sqrt{6}}-1\right)^3=(a+1)^3-(a-1)^3$

$=(a^3+3a^2+3a+1)-(a^3-3a^2+3a-1)=6a^2+2=6n^2+2.$

$\therefore\left(\frac{n}{\sqrt{6}}+1\right)^3-\left(\frac{n}{\sqrt{6}}-1\right)^3-2=6n^2.$

$\because n\neq 0$，$\therefore n^2>0$，$\therefore\left(\frac{n}{\sqrt{6}}+1\right)^3-\left(\frac{n}{\sqrt{6}}-1\right)^3>2.$

点评　本题使用了代换，用 $\frac{n}{\sqrt{6}}=a$ 先对代数式 $\left(\frac{n}{\sqrt{6}}+1\right)^3-\left(\frac{n}{\sqrt{6}}-1\right)^3$ 进行化简，然后作差，从而简化了问题的解答过程.

14. 已知 $x>0$，$x\neq 1$，$m>n>0$，比较 $x^m+\frac{1}{x^m}$ 与 $x^n+\frac{1}{x^n}$ 的大小.

解析　$x^m+\frac{1}{x^m}-\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)=x^m-x^n+\frac{1}{x^m}-\frac{1}{x^n}$

$$=x^m-x^n-\frac{x^m-x^n}{x^{m+n}}=(x^m-x^n)\left(1-\frac{1}{x^{m+n}}\right).$$

当 $0<x<1$ 时，由 $m>n>0$，知

$$x^m<x^n \text{ 且 } x^{m+n}<1，1-\frac{1}{x^{m+n}}<0，$$

所以 $(x^m-x^n)\left(1-\frac{1}{x^{m+n}}\right)>0$；

当 $x>1$ 时，由 $m>n>0$，知

$$x^m>x^n \text{ 且 } x^{m+n}>1，1-\frac{1}{x^{m+n}}>0，$$

所以 $(x^m-x^n)\left(1-\frac{1}{x^{m+n}}\right)>0.$

综上，$x^m+\frac{1}{x^m}-\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)>0$，即 $x^m+\frac{1}{x^m}>x^n+\frac{1}{x^n}.$

点评　本题解答所用数学思想是分类讨论思想，解答含有参数的不等式问题，一般都需对参数的取值进行分类讨论.

15. $x\in\mathbf{R}$，比较 $(x+1)\left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)$ 与 $\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+x+1)$ 的大小.

解析 $\because (x+1)\left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)=(x+1)\left(x^2+x+1-\frac{x}{2}\right)$

$=(x+1)(x^2+x+1)-\frac{x}{2}(x+1)$.

$\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+x+1)=\left(x+1-\frac{1}{2}\right)(x^2+x+1)$

$=(x+1)(x^2+x+1)-\frac{1}{2}(x^2+x+1)$.

$\therefore (x+1)\left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)-\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+x+1)$

$=\frac{1}{2}(x^2+x+1)-\frac{1}{2}x(x+1)=\frac{1}{2}>0$.

$\therefore (x+1)\left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)>\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+x+1)$.

点评 本题根据两个式子特点，予以变形后再作差．如果直接作差，需要将$(x+1)\left(x^2+1+\frac{x}{2}\right)$与$\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+x+1)$展开，过程复杂，式子冗长，不利于判断其符号．

16. 设 $x\in\mathbf{R}$，比较 $\frac{1}{1+x}$与 $1-x$ 的大小．

解析 作差：$\frac{1}{1+x}-(1-x)=\frac{x^2}{1+x}$.

(1) 当 $x=0$ 时，即$\frac{x^2}{1+x}=0$，$\therefore \frac{1}{1+x}=1-x$；

(2) 当 $1+x<0$，即 $x<-1$ 时，$\frac{x^2}{1+x}<0$，

$\therefore \frac{1}{1+x}<1-x$；

(3) 当 $1+x>0$ 但 $x\neq 0$，即 $-1<x<0$ 或 $x>0$ 时，

$\frac{x^2}{1+x}>0$. $\therefore \frac{1}{1+x}>1-x$．

点评 本题利用作差变形到最简形式，不能马上定号，必须对字母根据式子具体特点分类讨论才能定号，此时要注意分类合理恰当，做到不重复、不遗漏．

17. 已知 a，$b\in\mathbf{R}^+$，比较$\frac{a+b}{2}$与$(a^b b^a)^{\frac{1}{a+b}}$的大小.

解析 $\because \frac{\sqrt{ab}}{(a^b b^a)^{\frac{1}{a+b}}}=a^{\frac{1}{2}-\frac{b}{a+b}}b^{\frac{1}{2}-\frac{a}{a+b}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2(a+b)}}$，$a$，$b\in\mathbf{R}^+$，

$\therefore$若 $a\geqslant b$，则$\frac{a}{b}\geqslant 1$，$a-b\geqslant 0$，根据指数函数性质有$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2(a+b)}}\geqslant 1$；若 $a<b$，则 $0<\frac{a}{b}<1$，$a-b<0$，根据指数函数性质有$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2(a+b)}}>1$.

又$\because \frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，$\therefore \frac{a+b}{2}\geqslant(a^b b^a)^{\frac{1}{a+b}}$.

点评 本题考查用作商方法来比较大小，题中$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，把$\sqrt{ab}$作为桥梁来比较$\frac{a+b}{2}$与$(a^b b^a)^{\frac{1}{a+b}}$的大小.

18. 已知 $a>b>c>0$，求证：$a^a b^b c^c>(abc)^{\frac{1}{3}(a+b+c)}$.

解析 证明：$\because a$，b，$c>0$，

$\therefore$欲证结论等价于 $a^{3a}b^{3b}c^{3c}>(abc)^{a+b+c}$，

即 $a^{2a}b^{2b}c^{2c}>a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$.

$$\because \frac{a^{2a}b^{2b}c^{2c}}{a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}}=a^{2a-(b+c)}b^{2b-(a+c)}c^{2c-(a+b)}$$
$$=a^{(a-b)+(a-c)}b^{(b-a)+(b-c)}c^{(c-a)+(c-b)}$$
$$=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}\left(\frac{a}{c}\right)^{a-c}.$$

又$\because a>b>c>0$，$\frac{a}{b}>1$，$\frac{b}{c}>1$，$\frac{a}{c}>1$，$a-b>0$，$b-c>0$，$a-c>0$

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}\left(\frac{a}{c}\right)^{a-c}>1$，即 $a^{2a}b^{2b}c^{2c}>a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$，

$\therefore a^a b^b c^c>(abc)^{\frac{1}{3}(a+b+c)}$.

点评 本题考查了用作商方法来比较大小的一般步骤，即先判断符号，再变形作商，比较与1的大小，最后确定大小关系.

能力题

19. [一题多变]已知$-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$，求$\frac{\alpha-\beta}{2}$的范围.

解析 $\because -\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$，$\therefore -\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$，$-\frac{\pi}{4}<\frac{\beta}{2}\leqslant\frac{\pi}{4}$，

$\therefore -\frac{\pi}{4}\leqslant-\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{4}$，$\therefore -\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\alpha-\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$.

又$\because \alpha<\beta$，$\therefore \frac{\alpha-\beta}{2}<0$. 故$-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\alpha-\beta}{2}<0$.

点评 本题在求含字母的数(或式)的取值范围时，一是要注意题设中的条件，二是要正确使用不等式性质，如本题中如果忽略了$\alpha<\beta$则$\frac{\alpha-\beta}{2}$的范围就求不出正确的结果.

变式题 1 已知$-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，求$\alpha-\frac{\beta}{2}$的范围.

答案：$-\frac{3\pi}{4}\leqslant\alpha-\frac{\beta}{2}<\frac{3\pi}{4}$　$-\pi\leqslant\frac{2\alpha-\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$.

变式题 2 已知$\frac{\pi}{-2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$且$\alpha\neq\beta$，求$\frac{\alpha-\beta}{2}$的范围.

答案：$\frac{\alpha-\beta}{2}$的范围为$[-\frac{\pi}{2}, 0)\cup(0, \frac{\pi}{2}]$.

20. [一题多解]已知a，$b\in\mathbf{R}^+$，且$a\neq b$，比较a^ab^b与a^bb^a的大小.

解析 解法 1 作差法：

$$a^ab^b-a^bb^a=a^bb^b(a^{a-b}-b^{a-b}).$$

由已知a，$b\in\mathbf{R}^+$，且$a\neq b$知，a与b的关系为$a>b>0$，或$b>a>0$. 以下分类讨论.

(1)若$a>b>0$，则

$\because$幂函数$y=x^n$当$n>0$时在$(0,+\infty)$上是增函数，