21世纪高等学校教材

大学物理教程

DAXUE WULI JIAOCHENG

（学习指导）

汪晓元 赵明 陈德彝 雷杰 罗来龙 张甫宽 等编

UNIVERSITY PHYSICS COURSE

北京邮电大学出版社
http://www.buptpress.com

大学物理教程

学习指导

汪晓元　赵　明　陈德彝
张甫宽　雷　杰　罗来龙　等编

北京邮电大学出版社

内容简介

这本《大学物理教程(学习指导)》是结合当前高等学校大学物理课程教学改革实际情况和多年教学经验，按照“高等工业院校物理课程教学基本要求”的精神编写的. 根据大学物理课程的实际特点，全书分为16章，每章有基本要求、内容提要、解题指导与示例、自测题四个栏目.

本书可与《大学物理教程》(北京邮电大学出版社，2005年)配套使用，也可作为大学物理、普通物理学的教学或自学的辅导参考书.

图书在版编目(CIP)数据

大学物理教程学习指导/汪晓元等编. —北京：北京邮电大学出版社，2005

ISBN 7-5635-1041-9

Ⅰ.大... Ⅱ.汪... Ⅲ.物理学—高等学校—自学参考资料 Ⅳ.04

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第005039号

书　　名：大学物理教程学习指导

编　　者：汪晓元　赵明　陈德彝　张甫宽　雷杰　罗来龙　等

责任编辑：陈露晓　付晓霞

出版发行：北京邮电大学出版社

社　　址：北京市海淀区西土城路10号(100876)

电话传真：010-62282185(发行部)　010-62283578(传真)

E-mail：sanwen99@mail.edu.cn

经　　销：各地新华书店

印　　刷：国防科技大学印刷厂印刷

开　　本：787mm×960mm　1/16

印　　张：15.25

字　　数：266千字

版　　次：2005年2月第1版　2005年8月第2次印刷

ISBN 7-5635-1041-9/O·95　　定　价：20.00元

引　言

编写一本既符合教学改革的精神，又适合目前我国高等教育实际的大学物理课程的教材，一直被高校的广大物理教师所关注，这是一项具有非常重要意义的工作. 由于近一个世纪以来物理学的发展及其与物理学紧密联系的新技术的出现和广泛应用，使得这项工作变得不容易、甚至比较复杂. 许多从事物理教学工作的教师在这方面做了许多有益的尝试和探索，取得了一些成果和经验. 我们编写的这套《大学物理教程》就是从物理课程教学改革的需要和教学实际情况出发所做的一种尝试和探索.

本套书根据"高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划"的精神，借鉴国内外关于教材建设与改革的经验，结合多年来我们的教学实践编写成的. 它包括了工科大学物理课程指导委员会制订的教学基本要求的全部内容，同时，适度介绍了近代物理的知识以及新技术的物理基础. 力图使这套书成为既满足各个层次大学物理课程教学及改革的实际需要，又符合高校实际情况，具备鲜明特色的好教材. 本教材特点主要有以下几点：

1. 精选经典内容，构建教材新体系. 力学部分，省略了高中阶段已经掌握的知识，如直线运动、抛体运动、物体碰撞，主要介绍运动学描述方法及运动定律、定理和守恒定律等，与中学阶段的力学体系既有联系但又完全不同. 同时把相对论纳入力学部分，使之与经典的时空概念形成鲜明的对照，有助于学生理解掌握.

2. 力求内容现代化. 教材中除讲述相对论和量子物理等近代物理内容外，还介绍了许多当前新技术中的基础物理原理，包括熵、全息、光纤通信、激光、超导、能带理论、纳米科学. 在通篇教材中，加大了现代化内容的比重，使学生能接触到更多新的物理知识和概念，对提高学生学习物理的兴趣，培养学生的探索精神有益处.

3. 力求内容精炼、综合. 抓住主要内容，去粗取精，突出物理学中的重要定律与定理，从物理学发展的过程和教学实际情况的两个方面组织教学内容，精选例题、习题，用基本的、通俗的方法讲述物理内容. 力求既满足广大师生的教学需要，又能激发学生的学习兴趣，培养学生的创新能力.

4. 适度开"窗口"、重视科学素质培养. 在现代物理部分大胆地"渗透"一些科

技前沿信息，并介绍了非线性物理的一些内容和概念.有些内容对学生学习可能有一定困难，但让学生尽早了解这些内容，有益于激发和培养学生的求知欲望和独立思考能力，提高学生的科学素质.

全套书由汪晓元、赵明、陈德彝、廖红、邓伟明、雷杰、罗来龙、赵黎、黄学洪、杨应平、刘想宁、陈清明、张甫宽共同编写.邓伟明编写质点运动学和原子核物理部分，刘想宁编写质点动力学，罗来龙编写角动量与刚体部分，廖红编写机械振动和机械波，陈德彝编写热学，赵黎编写静电学，雷杰编写相对论和稳恒电流，汪晓元编写稳恒磁场及磁介质，黄学洪编写电磁感应和电磁波，赵明编写光学，杨应平编写量子物理基础，陈清明编写量子物理基础的部分内容及工程新技术的物理基础.《大学物理教程(学习指导)》的相关部分仍由以上教师负责分工编写.由赵明、汪晓元、陈德彝分别负责上册、下册、指导书统稿工作，全套书最后由汪晓元负责定稿.在编写的过程中，参加编写的教师们付出了大量的辛勤劳动，同时得到了许多同行们很好的建议以及各参加编写的学校与出版社等方面的支持和帮助，在此一并表示真诚地感谢.

由于编者水平有限，错误及不妥之处在所难免，请广大师生批评指正，以便今后逐步完善和提高.

编　者
2004年11月

目　录

第一篇　力　学

第二篇　机械振动与机械波

第三篇　热学

第四篇　电磁学

第五篇　波动光学

第六篇　量子物理基础

第一篇　力学

第1章　运动学

基本要求

1. 理解描述运动的三个必要条件：参考系（以及坐标系）；合理的物理模型（质点）；运动的初始条件.
2. 熟练掌握用矢量描述运动的方法.
   即掌握位矢 $\boldsymbol{r}$、位移 $\Delta\boldsymbol{r}$、速度 $\boldsymbol{v}$、加速度 $\boldsymbol{a}$ 的概念及其在直角坐标系和自然坐标系中的表述方式；能熟练地计算质点做一维、二维运动时的运动学物理量.
3. 掌握用微积分的方法处理运动学中的两类问题.
4. 掌握质点做圆周运动的线量、角量描述.
5. 理解相对运动的有关概念和基本处理方法.

内容提要

一、运动学物理量：位矢 $\boldsymbol{r}$、位移 $\Delta\boldsymbol{r}$、速度 $\boldsymbol{v}$、加速度 $\boldsymbol{a}$

1. 在直角坐标系中

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{1-1}$$

大小

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{1-2a}$$

方向

$$\alpha_i=\arctan\frac{i}{r}\quad i=x,y,z \tag{1-2b}$$

$$\Delta\boldsymbol{r}=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k} \tag{1-3}$$

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \tag{1-4}$$

速率

$$v=|\boldsymbol{v}|=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\sqrt{v_x{}^2+v_y{}^2+v_z{}^2} \tag{1-5}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \tag{1-6a}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k} \tag{1-6b}$$

2. 在自然坐标系中

$$\boldsymbol{v}=v\,\hat{\tau}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\hat{\tau} \tag{1-7}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\hat{n} \tag{1-8}$$

二、圆周运动的角量描述

$$\theta=\theta(t) \tag{1-9}$$

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t} \tag{1-10}$$

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \tag{1-11}$$

线量与角量的关系

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R} \tag{1-12}$$

$$a_t=R\beta \tag{1-13}$$

三、两类运动学问题

1. 第一类：已知运动方程、求速度、加速度.　　（导数运算）

几何法：求（或比较）$x-t$ 图、$v-t$ 图上曲线的斜率

2. 第二类：已知加速度函数及初始条件 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\boldsymbol{v}_0$，求运动方程.（积分运算）若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$，即加速度为时间的函数

$$v_x=v_{0x}+\int_0^t a_x\mathrm{d}t \tag{1-14}$$

$$x=x_0+\int_0^t v_x\mathrm{d}t \tag{1-15}$$

y，z 分量求法同上.

条件合适时可用几何法求解，即求（或比较）$a-t$ 图、$v-t$ 图上曲线与坐标轴围成的面积.

若 $a=a(v)$，以直线运动为例，由于 $a(v)=\dfrac{dv}{dt}$

则

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{a(v)}=\int_0^t dt \tag{1-16}$$

解出 $v=v(t)$，就可以求出运动方程了

$$x=x_0+\int_0^t v(t)dt \tag{1-17}$$

若 $a=a(x)$，由恒等变换

$$a(x)=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{dv}{dx}v$$

$$\int_{x_0}^{x}a(x)dx=\int_{v_0}^{v}vdv \tag{1-18}$$

解出 $v=v(x)$，再由 $v(x)=\dfrac{dx}{dt}$

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{v(x)}=\int_0^t dt \tag{1-19}$$

就可以解出运动方程了.

四、相对运动的描述方法

1. 约定系统

在地面参考系中建立直角坐标系 $xOyz$，在对地面以匀速 $\boldsymbol{u}$ 直线运动的参考系中建立直角坐标系 $x'O'y'z'$. 取 x 和 x' 轴沿相对运动的直线，y 和 y'，z 和 z' 分别平行. 假定，$t=t'=0$ 时刻，O 与 O' 相重合. 以后我们称 O 所在的参考系为惯性系 S；O' 所在的参考系为惯性系 S'. 这样设定的条件称为约定系统.

2. 伽利略变换

在远小于光速的条件下，在约定系统中，两个不同惯性系上的观察者对同一质点运动的描述可能不同（物理量不同），这两套运动学物理量之间的转换关系称为伽利略变换，其形式为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{u}t+\boldsymbol{r}' \tag{1-20}$$

速度变换（速度合成公式）

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}' \tag{1-21}$$

加速度变换

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}' \tag{1-22}$$

投影式见教材式（1-38）.

解题指导与示例

例 1－1 一艘巡逻艇离开港口并向正东航行了 231 km 的距离，为躲避暴风雨，它转向东偏南 42.1°航行了 209 km，然后又向东偏北 54.8°航行了 262 km，求合位移的大小和方向(忽略地球表面的弯曲，假定所有的位移都位于同一平面内).

解 做图、建坐标，将各段位移依次称为 $\Delta \boldsymbol{r}_i (i=1,2,3)$，并将其在图中各坐标轴上投影，计算出投影分量，即

$$\Delta x_1 = 231\ \text{km}$$

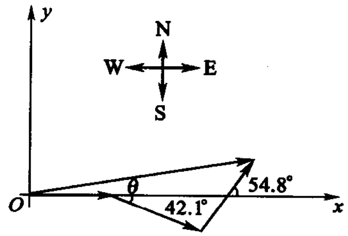
$$\Delta y_1 = 0$$

$$\Delta x_2 = 209\cos(-42.1°) = 155\ \text{km}$$

$$\Delta y_2 = 209\sin(-42.1°) = -140\ \text{km}$$

$$\Delta x_3 = 262\cos 54.8° = 151\ \text{km}$$

$$\Delta y_3 = 262\sin 54.8° = 214\ \text{km}$$



例 1－1 图

注意 Δx_2 的角度用－42.1°表示. 因为从 x 轴正向顺时针度量角度为负(依据右手螺旋法则). 合位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的两个分量分别为

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 537\ \text{km}$$

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 = 74\ \text{km}$$

给出了两个分量，合位移就算得到了. 但按照题目的要求，必须明确给出合位移的大小和方向

$$|\Delta \boldsymbol{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 542\ \text{km}$$

$$\theta = \arctan\frac{74}{537} = 7.8°$$

例 1－2 假设一长雪橇沿一直的雪坡向上滑，速度减慢至瞬时停顿后又往回滑下斜坡，分析雪橇的运动得出其运动方程为

$$x = 18 + 12t - 1.2t^2\ (\text{SI}).$$

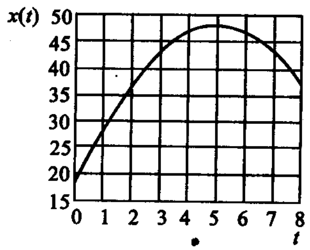
请画出雪橇运动的 $x-t$ 图；

求雪橇在 1～7 秒间的位移和路程；

求雪橇在 1～7 秒和 1～4 秒间的平均速度；

求雪橇速度随时间的函数关系；

求雪橇加速度随时间的函数关系.



例 1－2 图

解　由于运动有往返，找出折返时刻(由 $x-t$ 图可以看出)

令　$$\frac{dx}{dt}=0 \quad (x\text{ 极大点或者说是速度为零的点})$$

得　$$t=5\ \text{s} \quad (\text{这结果也可以由 } x-t \text{ 图看出})$$

则

$$\Delta x|_{1\sim7\text{s}}=x(7)-x(1)=14.4\ \text{m}$$

$$s|_{1\sim7\text{s}}=|x(5)-x(7)|+|x(5)-x(1)|=24\ \text{m}$$

平均速度

$$\bar{v}|_{1\sim4\text{s}}=\frac{x(4)-x(1)}{4-1}=6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\bar{v}|_{1\sim7\text{s}}=\frac{x(7)-x(1)}{7-1}=2.4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

(可见在变速运动中，不同时段的平均速度大小和方向都可能不一样)

雪橇的速度　$$v=\frac{dx}{dt}=12-2.4t\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

雪橇的加速度　$$a=\frac{dv}{dt}=2.4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}(\text{显然这是匀加速运动})$$

例 1-3　一质点沿半径为 R 的圆周运动，运动方程为 $s=bt-0.5ct^2$，b，c 均为常数，且 $b>\sqrt{Rc}$，其切向加速度和法向加速度相等，所经历的最小时间是多少？

解　由于　$$v=\frac{ds}{dt}=b-ct$$

$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=-c$$

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(b-ct)^2}{R}$$

故，当 $a_\tau=a_n$ 时

$$\frac{(b-ct)^2}{R}=|-c|$$

得　$$t_{\min}=\frac{b}{c}-\sqrt{\frac{R}{c}}$$

例 1-4　一做直线运动的质点，其加速度为 $a=-kv$(k 为常数)，$t=0$ 时 $x=0$，$v=v_0$. 当质点速度减为 v_0/n($n>1$)时，求质点经过的距离与质点能够移动的总距离之比.

解　由题设，质点任一时刻的加速度为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv$$

分离变量,积分

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=-k\int_0^t\mathrm{d}t$$

得
$$\ln\frac{v}{v_0}=-kt$$

所以
$$v=v_0\mathrm{e}^{-kt}$$

再由
$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0\mathrm{e}^{-kt}$$

分离变量,积分

$$\int_0^x\mathrm{d}x=\int_0^t v_0\mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t$$

得
$$x=\frac{v_0}{k}(1-\mathrm{e}^{-kt})=x_{\max}(1-\mathrm{e}^{-kt})$$

式中 $x_{\max}=\frac{v_0}{k}$是 $t\to\infty$时的 x 值,即质点能够移动的总距离.(物理上不可能有 $t\to\infty$,这是数学模型上的问题.实际上,用不了很长时间,质点就能达到静止状态.因此,$t\to\infty$在物理上理解为“时间足够长”.)

设 t_1 时刻,质点的速度减为 $v_1=v_0/n$

于是
$$\frac{v_1}{v_0}=\frac{1}{n}=\mathrm{e}^{-kt_1}$$

取对数,得
$$t_1=\frac{\ln n}{k}$$

相应经过的距离 x_1 与 $x_{\max}$之比为

$$\frac{x_1}{x_{\max}}=1-\mathrm{e}^{-\ln n}=1-\frac{1}{n}$$

另解:按原题的要求,只要找到 v 与 x 的关系就可以了,无需解出时间函数,这样一来解题过程可以简化.

由加速度的定义,利用恒等变换直接消去 t

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v$$

$$-k\mathrm{d}x=\mathrm{d}v$$

积分

$$-k\int_0^x\mathrm{d}x=\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v$$

得
$$x=\frac{v_0-v}{k}$$

当 $v=0$ 时，x 达到最大值
$$x_{\max}=\frac{v_0}{k}$$

所以，当质点速度减为 $v_0/n(n>1)$ 时

$$\frac{x}{x_{\max}}=\frac{v_0-v}{k}\Big/\frac{v_0}{k}=1-\frac{1}{n}$$

可以推出，在任一时刻，该质点的位置与速度遵循以下规律

$$\frac{x}{x_{\max}}+\frac{v}{v_0}=1$$

例 1－5　宽 L 的河流，流速与离岸的距离成正比，而两岸处的流速为零，河中心的流速为 v_0. 一艘小船以恒定的相对速度 v_r 垂直于水流从一岸驶向另一岸. 在离岸 $L/4$ 处因故突然调头，以相对速度 $v_r/2$ 垂直于水流驶回本岸. 试求：①小船的运动轨迹；②小船返回后的靠岸点与原出发点之间的距离是多少？（较难的运动学综合题）

分析：

（1）为便于表述，建立直角坐标系.

（2）根据题目给定的条件写出河流流速 $\boldsymbol{u}$ 的函数表达式，再写出已知的船相对水流的速度 $\boldsymbol{v}_r$ 的函数表达式，于是小船的绝对速度 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{u}$ 的表达式可得.

（3）由 $\boldsymbol{v}$ 的两个坐标分量 $v_x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 及 $v_y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 的表达式消去 t，即可得到能确定小船轨迹的微分方程，然后积分，得到轨迹方程.

（4）用同样的方法，可得到小船返回本岸时的轨迹方程；全程轨迹得到后，位移自然可以给出.

解　取平面直角坐标，沿本岸水流方向为 x 轴，y 轴指向对岸，坐标原点设于出发点.

设流速
$$\boldsymbol{u}=ky\boldsymbol{i}\quad（k \text{ 为比例系数}）$$

由题意
$$y=0 \text{ 处 } u=0;\ y=L/2 \text{ 处 } u=v_0$$

得
$$k=2v_0/L$$

所以
$$\boldsymbol{u}=\frac{2v_0}{L}y\boldsymbol{i}\quad\left(0<y<\frac{L}{2}\right)$$

小船的相对速度
$$\boldsymbol{v}_r=v_r\boldsymbol{j}$$

于是，小船的绝对速度
$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}_r=\frac{2v_0}{L}y\boldsymbol{i}+v_r\boldsymbol{j}$$

相应的坐标分量式为

$$\begin{cases} v_x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2v_0}{L}y \\ v_y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v_r \end{cases}$$

消去 dt,得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{2v_0}{Lv_r}y$$

分离变量

$$\mathrm{d}x=\frac{2v_0}{Lv_r}y\,\mathrm{d}y$$

此即关于小船驶出阶段轨迹的微分方程. 积分

$$\int_0^x \mathrm{d}x=\int_0^y \frac{2v_0}{Lv_r}y\,\mathrm{d}y$$

得

$$x=\frac{x_0}{Lv_r}y^2$$

这是一条抛物线. 在离岸 $L/4$ 处,小船的坐标为

$$\begin{cases} x=\dfrac{v_0}{Lv_r}\left(\dfrac{L}{4}\right)^2=\dfrac{v_0L}{16v_r} \\ y=\dfrac{L}{4} \end{cases}$$

返回本岸阶段

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}_r=\frac{2v_0}{L}Y\boldsymbol{i}-\frac{v_r}{2}\boldsymbol{j}$$

(注意第二项,区别矢量和分量的符号表述. 为避免混淆,这里转而采用大写符号,以区别前段的运动)

则

$$\begin{cases} v_X=\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2v_0}{L}Y \\ v_Y=\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{v_r}{2} \end{cases}$$

消去 dt,得

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}Y}=-\frac{4v_0}{Lv_r}Y$$

分离变量

$$\mathrm{d}X=-\frac{4v_0}{Lv_r}Y\mathrm{d}Y$$

此即小船返回本岸阶段轨迹的微分方程. 积分(从前段的终点开始)

$$\int_x^X \mathrm{d}X=-\int_y^Y \frac{2v_0}{Lv_r}Y\mathrm{d}Y$$

得

$$X=-\frac{2v_0}{Lv_r}Y^2+\frac{3v_0L}{16v_r}$$

这仍然是一条抛物线. 回到本岸时，小船的坐标为

$$\begin{cases} X=\dfrac{3v_0L}{16v_r} \\ Y=0 \end{cases}$$

若设 $v_0=4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$u=1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，河宽 $L=100$ m，运动轨迹如下图所示. 可见前段位移的 x 分量为 25 m；后段位移的 x 分量为 50 m；全程位移为 75 m.

例 1－5 图

例 1－6　猎豹捕羚羊(自动跟踪问题中的轨道与追及时间)问题.

(1) 这类问题一般都很复杂，即使给出微分方程，也找不到解析解，必须采用数值计算方法.

(2) 可以先建立一个最简化模型，试着给出它的微分方程(常常被称为数学模型). (挑战你的建模能力)

(3) 尝试给出该模型的解析解和数值解，用计算机绘图给出运动轨迹. 有可能的话，编写一段计算机程序模拟整个猎捕过程，这时你可以预先给羚羊设计一个较复杂的逃遁路线，看看你的模型中猎豹的追捕能力.

建模：将机灵的羚羊换成水面上速率为 v_f 的无人驾驶训练靶艇，该艇只会做匀速直线运动；同样将猎豹换成有自动跟踪能力的导弹鱼雷，其速率 $v=kv_f$ ($k>1$ 为常数). 取直角坐标系，沿海岸建 x 轴，y 轴当然指向外海域.

解　设地面直角坐标系.

靶艇 $A(x_f, y_f)$，运动方程

$$\begin{cases} x_f=v_f t \\ y_f=L \end{cases}$$

导弹 $B(x,y)$ 追踪 $A(x_f, y_f)$ 的效果是它的速度矢量 v 始终指向目标物 A，故连线 $\overline{BA}$ 为导弹轨迹的切线，因而可以考虑建立切线方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(y_f-y)}{x_f-x}$$

这是 B,A 系统必须满足的相互关系式,所以它就是我们要的数学模型. x_f 是变量,所以由此式还不能直接得到轨迹方程,将其改写

$$x_f-x=(L-y)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

试着先对 y 求导数(目的是消去变量 x_f,经验来自于多见、多做、多思考)

得 $$\frac{\mathrm{d}x_f}{\mathrm{d}y}=(L-y)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}$$

由题意 $$v^2=(kv_f)^2=k^2\left(\frac{\mathrm{d}x_f}{\mathrm{d}t}\right)^2=k^2\left(\frac{\mathrm{d}x_f}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

又据运动学定义

$$v^2=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

所以 $$k^2\left(\frac{\mathrm{d}x_f}{\mathrm{d}y}\right)^2=1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2$$

则 $$k(L-y)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}$$

这就是关于 x,y 的二阶常微分方程,即关于导弹轨迹的常微分方程(方程中已无其他变量).

用降阶法求解,令 $$u=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

则 $$k(L-y)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\sqrt{1+u^2}$$

分离变量 $$k\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{\mathrm{d}y}{L-y}$$

积分(注意 $t=0$ 时,有 $x=0$,$y=0$ 及 $u=0$)

$$k\int_0^t\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=\int_0^y\frac{\mathrm{d}y}{L-y}$$

得 $$u+\sqrt{1+u^2}=\left(\frac{L}{L-y}\right)^{\frac{1}{k}}$$

解出 $$u=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{L-y}{L}\right)^{-\frac{1}{k}}-\left(\frac{L-y}{L}\right)^{\frac{1}{k}}\right]$$

回到 u 的定义,分离变量

$$\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{L-y}{L}\right)^{-\frac{1}{k}}-\left(\frac{L-y}{L}\right)^{\frac{1}{k}}\right]\mathrm{d}y$$

积分 $$\int_0^x\mathrm{d}x=\int_0^y\left[\left(\frac{L-y}{L}\right)^{-\frac{1}{k}}-\left(\frac{L-y}{L}\right)^{\frac{1}{k}}\right]\mathrm{d}y$$