高中 数学

代数(一)

主编／王建军

北京海淀区特高级教师
中南地区特高级教师
联合编写

各个击破丛书
各个击破丛书
各个击破丛书

各个击破

丛书

延边人民出版社

前　　言

《各个击破》丛书，顺应当今高考改革形势，在一版的基础上，进一步补充、修订、完善。使之更充实，更合理，更实用。编写过程中，我们全面回顾近几年高考试题，深入研究《教学大纲》和《考试说明》，准确把握高考的热点冷点，真正做到了重点强攻，难点详析，弱点密补。为了便于使用，我们根据学科特点，科学切分，每科一般分为二至四册，最多七册，每册独立成书。各册均由三个板块构成：考点例析、解题指导、典题精练。“考点例析”，选用近年高考试题，详尽解析，从而达到“解剖麻雀”，探求规律之目的；“解题指导”，意在让学生对高考各知识点，各种题型的解题规律方法有一个理性认识，交给学生解决实际问题的金钥匙；“典题精练”，精心编制和选用了足量的科学性强、训练价值高的练习题，对高考各知识点进行强化训练，实现由知识到能力的转变。可以说，本丛书既是学生自学应考的最佳资料，也是教师指导复习的理想用书。总之，我们想把最理想、最优化的创意奉献出来，使学生在熟悉各考点的基础上，构建知识体系，把握重点，突出难点，形成能力。由于时间、水平所限，书中纰漏在所难免，恳请批评指正。

编　者

2001 年 6 月

目　录

绪　论

本书的编写顺序是根据人民教育出版社中学数学室(1996.1)编写的高级中学课本(必修)的顺序.依据2001年版《考试说明》编写而成.

《考试说明》中指出:

数学科考试的宗旨是:测试中学数学基础知识、基本技能、基本思想和方法,考查逻辑思维能力、运算能力、空间想象能力以及运用所学数学知识和方法分析问题和解决问题的能力.

考试内容以原国家教育委员会1990年颁布的《全日制中学数学数学大纲(修订本)》高中阶段的教学内容为主,分为代数、立体几何、平面解析几何三个分科.根据《全日制中学数学教学大纲(修订本)》的规定,高中阶段的必学内容与选学内容的"反三角函数和简单三角方程"、"参数方程和极坐标"合在一起,是理工农医类的数学试题的命题范围.

关于考试内容的知识要求和能力要求作如下说明:

一、知识要求

对知识的要求由低到高分为三个层次,依次是了解、理解和掌握、灵活和综合运用,且高一级的层次要求包含低一级的层次要求.

(1) 了解:要求对所列知识内容有初步的、感性的认识,知道有关内容,并能在有关的问题中直接应用.

(2) 理解和掌握:要求对所列知识内容有较深刻的理性认识,能够解释、举例或变形、推断,并能利用知识解决有关问题.

(3) 灵活和综合运用:要求系统地掌握知识的内在联系,能运用所列知识分析和解决较为复杂的或综合性的问题.

二、能力要求

(1) 逻辑思维能力:会对问题或资料进行观察、比较、分析、综合、抽象与概括;会用演绎、归纳和类比进行推断;能准确、清晰、有条理地进行表述.

(2) 运算能力:会根据概念、公式、法则,进行数、式、方程的正确运算和变形;能分析条件,寻求与设计合理、简捷的运算途径;能根据要求对数据进行估计,并能进行近似计算.

(3) 空间想象能力:能根据条件画出正确的图形,根据图形想象出直观形象;能正确地分析出图形中基本元素及其相互关系;能对图形进行分解、组合与变形.

(4) 分析和解决问题的能力:能阅读、理解对问题进行陈述的材料;能综合应用所学数学知识、思想和方法解决问题,包括解决在相关学科、生产、生活中的数学问题,并能用数学语言正确地加以表述.

三、对知识和能力的考查注意如下几点:

(1) 对数学基础知识的考查,要求全面又突出重点,注重学科的内在联系和知识的综合.重点知识是支掌学科知识体系的主要内容,考查时要保持较高的比例,并达到必要的深度,构成数学试题的主体.学科的内在联系、包括代数、立体几何、平面解析几何三个分科之间的相互联系及在各自发展过程中,各部分知识间的纵向联系.知识的综合性,则是从学科的整体高度考虑问题,在知识网络交汇点设计试题.

(2) 数学思想和方法是数学知识在更高层次上的抽象和概括,它蕴涵在数学知识发生、发展和应用的过程中.因此,对于数学思想和方法的考查必然要与数学知识的考查结合进行,通过数学知识的考查,反映考生对数学思想和方法理解和掌握的程度.考查时、要

从学科整体意义和思想含义上立意,注意通性通法,淡化特殊技巧,有效地检测考生对中学数学知识中所蕴涵的数学思想和方法的掌握程度.

(3) 对能力的考查,以逻辑思维能力为核心,全面考查各种能力,强调探究性、综合性、应用性,切合考生的实际.运算能力是思维能力与运算技能的结合,它不仅包括数的运算,还包括式的运算,对考生运算能力的考查主要是以含字母的式的运算为主,同时要兼顾对算理和逻辑推理的考查.空间想象能力是对空间形式的观察、分析、抽象的能力,图形的处理与图形的变换都要注意与推理相结合.分析问题和解决问题的能力是上述三种基本数学能力的综合体现.对数学能力的考查要以数学基础知识、数学思想和方法为基础,加强思维品质的考查,对数学应用问题,要把握好提出问题所涉及的数学知识和方法的深度和广度,要切合我国中学数学教学的实际.

(4) 数学科的命题,在考查基础知识的基础上,注重对数学思想和方法的考查,注重对数学能力的考查,在强调综合性的同时,重视试题的层次性,合理调控综合程度,坚持多角度、多层次的考查.

四、对文理科命题范围的说明

实行"3 + 2" 考试后,高考数学卷分为文史、与理工农医两大类.文史类高考的数学试题的命题范围是大纲中高中阶段的必学内容,即课本上标有 ※ 号的内容——选学内容(反三角函数和简单三角方程、参数方程和极坐标),不在命题范围内.

在《考试说明》中只规定了文理两科考试范围的区别而没有涉及到试卷结构及难度的差别.《考试说明》规定:

考试形式及试卷结构

考试采用闭卷笔试形式.全卷满分为 150 分,考试时间为 120 分钟.

全试卷包括Ⅰ卷和Ⅱ卷.Ⅰ卷为选择题;Ⅱ卷为非选择题.

代数、立体几何和平面解析几何所占分数的百分比与它们在教学中所占课时的百分比大致相同.代数约占 60%,立体几何约占 20%,平面解析几何约占 20%.

试题分选择题、填空题和解答题三种题型.选择题是四选一型的单项选择题;填空题只要求直接填写结果,不必写出计算过程或推证过程;解答题包括计算题、证明题和应用题等,解答应写出文字说明、演算步骤或推证过程.三种题型分数的百分比约为:选择题 40%,填空题 10%,解答题 50%.

试题按其难度分为容易题、中等题和难题.难度为 0.7 以上的题为容易题,难度为 0.4 ～ 0.7 之间的题为中等题,难度为 0.4 以下的题为难题.三种试题分值之比约为 3 : 5 : 2.

从近几年文理两科数学试卷来看,文理两科试卷的差异在逐渐缩小.("3 + X" 考试,已不再分文理科),这主要是考虑到文科毕业生将来一般从事管理决策工作,对他们掌握知识的深刻和范围可能有别于理科,但对其逻辑思维能力的要求,特别是根据已有的情况进行逻辑推理、科学决策的能力应不低于理科.数学科考试应发挥应有的作用,促进在中学数学教学中,进行"大众数学" 教育,以数学知识作为工具和材料,培养文科考生严谨求实的思维品质,理论联系实际的思想意识,条理周密的思想方法,正是基于这些考虑及国际、社会对数学的要求,确定了文科试卷改革的方向:文理科试卷除在知识范围的要求上略有区别外,在基础知识和基本能力方面的要求应当尽量一致;在考查一些较高层次的能力时,考查目的应一致,但要求层次应有所区别.

《考试说明》主要是以知识为主线,列出考试内容(知识点),并提出相应的考试要求,但没有详细分析考试内容与四种能力之间的关系.为了适应当前高考命题改革的趋势,下面以近几年考题为例,作出具体解释,并突出对相应能力考查的分析.

第一章 幂函数、指数函数和对数函数

【考试要求】

集合.子集、交集、并集、补集.

$|ax+b|<c$、$|ax+b|>c$ $(c>0)$ 型不等式.一元二次不等式.

映射.函数.

分数指数幂与根式.幂函数及其图象.函数的单调性.函数的奇偶性.

反函数.互为反函数的函数图象间的关系.

指数函数.

对数.对数的性质和运算法则,对数函数.换底公式.简单的指数方程和对数方程.

【考点例析】

1.理解集合、子集、交集、并集、补集的概念.了解空集和全集的意义,了解属于、包含、相等关系的意义,能掌握有关的术语和符号,能正确地表示一些较简单的集合.

【释析】

这一条罗列了四个概念.其中5个属于理解的层次,5个属于了解的层次.除此之外还要求掌握有关的术语和符号.这些术语和符号是指课本上出现和使用过的术语和符号.对集合的表示法虽没有提出具体的要求,这里应理解为掌握列举法、描述法、图示法(文氏图)以及用一个大写字母表示集合的抽象方法或区间表示.

主要技能和方法包括:正确地表示集合;求已给集合的交集、并集或补集;判断两个集合之间的包含或相等的关系等.

注:本书中的自然数集不包括零.

主要能力包括:对抽象数学符号理解和使用的能力;用图来表示集合并研究其关系的能力.

【例1】(1)(1996年全国理)已知全集 $I=N$,集合 $A=\{x\mid x=2n,n\in \mathbf{N}\}$,$B=\{x\mid x=4n,n\in \mathbf{N}\}$,则

A.$I=A\cup B$ B.$I=\bar{A}\cup B$ C.$I=A\cup\bar{B}$ D.$I=\bar{A}\cup\bar{B}$

(2)(96年全国文,①)设全集 $I=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,集合 $A=\{1,3,5,7\}$,$B=\{3,5\}$,则

A.$I=A\cup B$ B.$I=\bar{A}\cup B$ C.$I=A\cup\bar{B}$ D.$I=\bar{A}\cup\bar{B}$

【答案】(1)C (2)C

【解析】(1)法一:$\bar{A}$ 中元素是非2的倍数的自然数(即正奇数),$\bar{B}$ 中元素是非4的倍数的自然数,显然只有 C 正确.

法二:$\because A=\{2,4,6,8,\cdots\}$,$B=\{4,8,12,\cdots\}$,$\therefore \bar{B}=\{1,2,3,5,6,7,9,\cdots\}$

$\therefore I=A\cup\bar{B}$,故应选C.

法三:$\because B\subset A$,$\therefore \bar{A}\subset\bar{B}$,$\bar{A}\cap\bar{B}=\bar{A}$ $\therefore I=A\cup\bar{A}=A\cup\bar{B}$

【评析】本题考查集合有关的概念和运算,用无限集进行考查,提高了对逻辑思维能力的要求.(2)是(1)的姐妹题.用有限集考查,降低了难度.

【例2】(1997年全国文、理,①)设集合 $M=\{x\mid 0\leqslant x<2\}$,集合 $N=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$,集合 $M\cap N=$

A. $\{x \mid 0 \leqslant x < 1\}$　　B. $\{x \mid 0 \leqslant x < 2\}$

C. $\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$　　D. $\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\}$

【答案】 B

【解析】 先化简 $N = \{x \mid -1 < x < 3\}$，所以 $M \cap N = \{x \mid 0 \leqslant x < 2\}$，故选 B.

【评析】 本题考查对交集的理解和掌握，由于给定的集合实质是不等式的解集，兼考处理不等式解集的基本技能.

【例 3】（1999 年全国文、理，①）如图 1—1，I 是全集，M、P、S 是 I 的 3 个子集，则阴影部分所表示的集合是

A. $(M \cap P) \cap S$　　B. $(M \cap P) \cup S$

C. $(M \cap P) \cap \bar{S}$　　D. $(M \cap P) \cup \bar{S}$

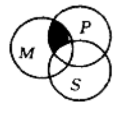


图 1—1

【答案】 C

【解析】 由图知阴影部分表示的是 $M \cap P$ 的子集，且是 $\bar{S}$ 的子集，故选 C.

【评析】 本题源于课本，主要考察考生对集合文氏图的理解，作为选择支，含有集合的交、并、补等关系，有点小综合的味道，不过只要对有关概念能正确理解，便能作答，无需什么技巧.

【解题指导】

高考对集合的考查包括两种方式：一是对集合自身的考查，重点是集合的交、并、补运算；二是将集合作为工具考查集合语言与集合思想的运用，如求函数的定义域、值域、方程与不等式的解集，解析几何中的曲线交点的表示等等，这些分散在其他各单元、章节中.

近几年的高考复现率60%　（98 年、2000 年未直接考查）

复习时抓住集合的特征是解有关集合问题的关键，集合的元素具有确定性（对于任何一个给定的集合 A 和元素 a，$a \in \mathbf{A}$ 与 $a \notin \mathbf{A}$ 二者必居其一，二者仅居其一），互异性（每一集合中的任意两个元素都互不相同），无序性（集合内元素无先后顺序之分）；注意区别 a（元素）与 $\{a\}$（单元素集）；$\{a, b\}$（双元素集）与 $\{(a, b)\}$（单元素集）；$\varnothing$（空集）与 $\{\varnothing\}$；注意两大关系的区分：一是元素对集合的从属关系（$\in$，$\notin$），二是集合与集合之间的包含关系（$\subseteq$，$\subset$，$\subsetneqq$，$\not\subset$，$=$）. 注意二种常用思想方法：(1) 数形结合的思想 ① 在深刻理解集合的交、并、补概念的基础上，用文氏图解有关集合问题，具有化抽象为具体的功能，② 两个集合都是不等式的解集时，通常借助数轴进行数集之间的运算，但要注意区间的开与闭，③ 若集合中的元素是有序实数对即用坐标形式表示的，要想到满足条件的点所构成的图形是什么，画出草图，转化为解析几何问题. 如：

设全集 $I = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$，集合 $M = \left\{(x, y) \,\middle|\, \frac{y-3}{x-2} = 1\right\}$，$N = \{(x, y) \mid y \neq x + 1\}$，那么 $\bar{M} \cap \bar{N}$ 等于

A. $\varnothing$　　B. $\{(2, 3)\}$　　C. $(2, 3)$　　D. $\{(x, y) \mid y = x + 1\}$

【答案】 B

【解析】 $M = \{(x, y) \mid y = x + 1, x \neq 2, y \neq 3\}$，$\bar{M} = \{2, 3\}$，$\bar{N}$ 即直线 $y = x + 1$ 上的所有点. $\therefore \bar{M} \cap \bar{N} = \{(2, 3)\}$. 故选 B.

(2) 化归的思想：解题时，当一种集合的表达式不好入手时，可将其转化为另一种形式. 如将 $\bar{A} \cap \bar{B}$ 转化为 $\overline{A \cup B}$，将 $A \cup B = A$ 转化为 $B \subseteq A$ 等.

【典题精练一】

一、选择题

1. 已知集合 $A=\{x\mid y=x,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y=x^2,x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B$ 等于
   A. $\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$　B. $\{y\mid y\geqslant 0\}$　C. $\{(0,0),(1,1)\}$　D. $\varnothing$
2. 集合 $A=\{(x,y)\mid y=|2^x|$ 和 $B=\{(x,y)\mid y>0,x\in\mathbf{R}\}$ 之间的关系是
   A. $A\subset B$　B. $B\subset A$　C. $A=B$　D. $A\cap B=\varnothing$
3. 已知集合 $M=\{x\mid x=3n,n\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x\mid x=3n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，$P=\{x\mid x=3n-1,n\in 2\}$，且 $a\in\mathbf{M}$，$b\in\mathbf{N}$，$C\in\mathbf{P}$，设 $d=a-b+c$，则
   A. $d\in\mathbf{M}$　B. $d\in\mathbf{N}$　C. $d\in\mathbf{P}$　D. $d\in M\cup P$
4. 设集合 $A=\{1,5\}$，则满足 $A\cup B=\{1,5\}$ 的集合 B 的个数是
   A. 4 个　B. 3 个　C. 2 个　D. 1 个
5. 定义 $A-B=\{x\mid x\in\mathbf{A}$，且 $x\notin\mathbf{B}\}$，若 $A=\{1,3,5,7,9\}$，$B=\{2,3,5\}$，则 $A-B$ 等于
   A. A　B. B　C. $\{2\}$　D. $\{1,7,9\}$
6. 设全集 $I=R$，集合 $M=\{x\mid\sqrt{x^2}>2\}$，$B=\{x\mid\log_x 7>\log_3 7\}$，那么 $M\cap\overline{N}=$
   A. $\{x\mid x<-2\}$　B. $\{x\mid x<-2$ 或 $x\geqslant 3\}$
   C. $\{x\mid x\geqslant 3\}$　D. $\{x\mid -2\leqslant x<3\}$
7. 已知集合 $M=\left\{x\mid x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$，$N=\left\{x\mid x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，则
   A. $M\subset N$　B. $M\supset N$　C. $M=N$　D. $M\cap N=\varphi$
8. 下列命题正确的是
   A. "畅销的书" 可构成集合
   B. "不超过 30 的非负整数" 不能构成集合
   C. "在直角坐标平面内横坐标与纵坐标相等的点"，可构成集合
   D. 整数集可以表示成{全体整数}

二、填空题

9. 设 $A=\{x\mid x^2-x-2>0\}$，$B=\{x\mid x^2+4x+P<0\}$，若 $B\subseteq A$，则实数 P 的取值集合是__________.
10. 设全集 $I=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{|2a-1|,2\}$，$\overline{A}=\{5\}$，则实数 a 的值为__________.
11. 非空集合 $S\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，且 S 还满足条件：若 $a\in\mathbf{S}$，则 $6-a\in\mathbf{S}$，符合上述要求的集合 S 的个数是__________.
12. 含有三个实数的集合可表示为 $\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}$，也可以表示为 $\{a^2,a+b,0\}$，则 $a^{2001}+b^{2002}$ 的值等于__________.

三、解答题

13. 用适当的方法表示下列集合
   (1) 绝对值不大于 2 的整数；(2) 所有被 3 整除的数；
   (3) 在直角坐标平面上不在一、三象限内的点；
   (4) 方程 $\sqrt{2x+1}+|y-2|=0$ 的解 $(x,y\in\mathbf{R})$.
14. 已知集合 $A=\{x\mid ax^2+2x+1=0,a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R}\}$.
   (1) 若 A 中只有一个元素，求 a 的值，并求出这个元素；

(2) 若 A 中至少有一个元素,求 a 的取值范围.

15. 设 $f(x)=x^2+ax+b$, $A=\{x\mid f(x)=x, x\in\mathbf{R}\}=\{a\}$,若$(a,b)\in M$,求 M.
16. 已知三个集合:$A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$, $B=\{x\mid \log_2(x^2-5x+8)=1\}$, $C=\{x\mid 2^{x^2+2x-8}=1\}$,若 $A\cap B\neq\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$,求实数 a 的值和集合 A.
17. 设 M 是满足下列两个条件的函数 $f(x)$ 的集合:① $f(x)$ 定义域为$[-1,1]$,② 若 $x_1,x_2\in[-1,1]$,则 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant 4|x_1-x_2|$. 试问,定义在$[-1,1]$上的函数 $g(x)=x^2+2x-1$ 是否属于集合 M?并说明理由.
18. 设集合 $A=\{x\mid 0\leqslant\log_2(x+3)\leqslant 3\}$, $B=\{x\mid m-1\leqslant x\leqslant 2m+1\}$.
    (1) 当 $\in\mathbf{N}$ 时,求 A 的子集的个数;
    (2) 当 $x\in\mathbf{R}$,且 $A\cap B=B$,求 M 的取值范围;
    (3) 当 $x\in\mathbf{R}$,且 $A\cap B=\varnothing$ 时,求 M 的取值范围.
19. 设集合 $A=\{(x,y)\mid y=\sqrt{2a^2-x^2}, a>0\}$, $B=\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=a^2, a>0\}$ 且 $A\cap B\neq\varnothing$,求 a 的最值.
20. 设 $A=\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1, |y|\leqslant 1, x,y\in\mathbf{R}\}$, $B=\{(x,y)\mid (x-a)^2+(y-a)^2\leqslant 1\}$,若 $A\cap B\neq\varnothing$,求实数 a 的取值范围.
21. 已知 $A=\left\{(x,y)\left|\dfrac{y-3}{x-2}=a+1\right.\right\}$, $B=\{(x,y)\mid (a^2-1)x+(a-1)y=15\}$,试确定 a 的值集,使 $A\cap B=\varnothing$.
22. 已知 $f(x)=(m-2)x^2-4mx+2m-6$ 的图象与 x 轴有两个交点,其中至少有一个在 x 轴的负半轴上,求实数 m 的范围.

【考点例析】

2. 理解 $|ax+b|<c$、$|ax+b|>c(c>0)$ 型不等式的概念,并掌握它们的解法. 了解二次函数、一元二次不等式或及一元二次方程三者之间的关系,掌握一元二次不等式的解法.

【释析】

这一条给出了两个概念(绝对值不等式、一元二次不等式),属理解的一个,了解的一个,掌握的两个. 对绝对值不等式要求不高,只要掌握绝对值符号里面是一次式:$ax+b(a\neq 0)$ 的不等式的解法. 但对一元二次不等式,由于应用较广泛,要求熟练掌握其解法. 应明确何时求交集、何时求并集.

主要技能和方法:实数绝对值的意义,集合的运算,不等式的性质的运用. 换元的思想、等价转化思想、分类讨论思想、数形结合思想.

主要能力:转化的能力、集合思想的综合运用能力.

【例 1】(2000 年全国高考文,(1))设集合 $A=\{x\mid x\in\mathbf{Z}$,且 $-10\leqslant x\leqslant -1\}$, $B=\{x\mid x\in\mathbf{Z}$,且 $|x|\leqslant 5\}$,则 $A\cup B$ 中的元素的个数是

A. 11　　B. 10　　C. 16　　D. 15

【答案】 C

【解析】 $\because |x|\leqslant 5\Leftrightarrow -5\leqslant x\leqslant 5$, $\therefore B=\{x\mid -5\leqslant x\leqslant 5$, 且 $x\in\mathbf{Z}\}$, $\therefore A\cup B=\{x\mid -10\leqslant x\leqslant 5, x\in\mathbf{Z}\}$, $\therefore A\cup B$ 中共有 16 个元素.

【评析】 本题主要考查最简单的绝对值不等式的求解及集合的运算. 兼考计数的一般方法(或等差数列通项公式的应用).

【例 2】(1998 年上海,⑮)设全集为 R, $A=\{x\mid x^2-5x-6>0\}$, $B=\{x\mid |x-5|<a, a\in\mathbf{R}$, 为常数$\}$,且 $11\in\mathbf{B}$,则

A.$\bar{A}\cup B=R$ B.$A\cup\bar{B}=R$ C.$\bar{A}\cup\bar{B}=R$ D.$A\cup B=R$

【答案】 D

【解析】 由已知 $A=\{x\mid x<-1$ 或 $x>6\}$，由 $11\in \mathbf{B}$ 知 $6<a$，B 中不等式为 $5-a<x<5+a$，有 $5+a>6$(实际上 $5+a>5+6=11$)，且 $5-a<-1$ 易知，$A\cup B=R$.

【评析】 本题主要考查绝对值不等式及一元二次不等式的求解，求解时，先由 $11\in \mathbf{B}$，求得 a 的范围：$(6,+\infty)$，再将 $5-a$，$5+a$ 与 A 的端点比较，结合数轴及集合的运算的意义，得解.

【例 3】 (1998 年全国文，⑳) 设 $a\neq b$，解关于 x 的不等式

$a^2x+b^2(1-x)\geqslant[ax+b(1-x)]^2$

【解析】 先将原不等式化为标准形式：$ax^2+bx+c\geqslant 0$，再根据情况进行分类讨论.

【解】 将原不等式化为$(a^2-b^2)x+b^2\geqslant(a-b)^2x^2+2(a-b)bx+b^2$，

移项，整理后得$(a-b)^2(x^2-x)\leqslant 0$，$\because a\neq b$，即$(a-b)^2>0$，

$\therefore x^2-x\leqslant 0$，即 $x(x-1)\leqslant 0$，解此不等式，得解集

$\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$.

【评析】 本题主要考查不等式的基本知识，不等式的解法. 请同学们考虑：若没有 $a\neq b$ 这一条件，如何求解？解集是什么？

【例4】 (1997 年全国理，㉔) 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$，方程 $f(x)-x=0$ 的两根 x_1,x_2 满足 $0<x_1<x_2<\dfrac{1}{a}$.

(1) 当 $x\in(0,x_1)$ 时，证明 $x<f(x)<x_1$；

(2) 设函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=x_0$ 对称，证明：$x_0<\dfrac{x_1}{2}$.

【解析】 对(1) 由于 $f(x)$ 为二次函数，可考虑证明不等式基本方法之一——比较法(比差). 对(2)，先将 $f(x)$ 图象的对称轴表示出来，再根据题设条件及目标推证.

【证明】 (1) 令 $F(x)=f(x)-x$. $\because x_1,x_2$ 是方程 $f(x)-x=0$ 的根，

$\therefore F(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ 当 $x\in(0,x_1)$ 时，由于 $x_1<x_2$，得

$(x-x_1)(x-x_2)>0$，又 $a>0$，得 $F(x)=a(x-x_1)(x-x_2)>0$，即 $x<f(x)$.

又 $x_1-f(x)=x_1-[x+F(x)]=x_1-x+a(x_1-x)(x-x_2)=(x_1-x)[1+a(x-x_2)]$.

$\because 0<x<x_1<x_2<\dfrac{1}{a}$，$\therefore x_1-x>0$，$1+a(x-x_2)=1+ax-ax_2>1-ax_2>0$.

得 $x_1-f(x)>0$，由此得 $f(x)<x_1$，$\therefore x<f(x)<x_1$ 成立.

(2) 依题意知 $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ $\because x_1,x_2$ 是方程 $f(x)-x=0$ 的根，即 x_1,x_2 是方程 $ax^2+(b-1)x+c=0$ 的根.

$$\therefore x_1+x_2=-\frac{b-1}{a},\ x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{a(x_1+x_2)-1}{2a}$$

$$=\frac{ax_1+ax_2-1}{2a}.\ \because ax_2<1,\ \therefore x_0<\frac{ax_1}{2a}=\frac{x_1}{2}.$$

或用分析法：

(1) 欲证 $x<f(x)<x_1$，只需证 $0<f(x)-x<x_1-x$，即

$0 < a(x_1 - x)(x_2 - x) < x_1 - x$，两边同除以 $a(x_1 - x) > 0$，

得 $0 < x_2 - x < \dfrac{1}{a}$，又 $0 < x < x_1 < x_2 < \dfrac{1}{a}$，从而 $0 < x_2 - x < \dfrac{1}{a}$ 成立，故原命题得证.

(2) 欲证 $x_0 < \dfrac{x_1}{2}$，只需证 $0 > x_0 - \dfrac{x_1}{2} = -\dfrac{b}{2a} - \dfrac{x_1}{2} = \dfrac{x_2}{2} - \dfrac{1}{2a}$（这里有 $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$，$\dfrac{x_1 + x_2}{2} = -\dfrac{b-1}{2a}$），即 $x_2 < \dfrac{1}{a}$. 由此条件以上不等式显然成立.

【评析】此题主要考查一元二次方程、二次函数和不等式的基础知识，考查综合运用数学知识分析问题和解决问题的能力，考查证明不等式的方法.

本题以二次函数为本源，联立一元二次方程的根，进行不等式的论证. 在推证中，一个容易出现的误区为：将方程 $f(x) - x = 0$ 化为 $ax^2 + (b-1)x + c = 0$ 去研究，导致无以下手，而已知方程根，由韦达定理还原方程为 $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$，这是初中知识. 可见在解(证)题时，若一种思路受阻，应及时转变思维，寻求他法. 本题对思维的灵活性的考查是深刻的.

【例 5】(2000 年全国文、理，㉑) 某蔬菜基地种植西红柿，由历年市场行情得知，从二月一日起的 300 天内，西红柿市场售价与上市时间的关系用图 1—2 中图一的一条折线表示；西红柿的种植成本与上市时间的关系用图 1—2 中图二的抛物线段表示.

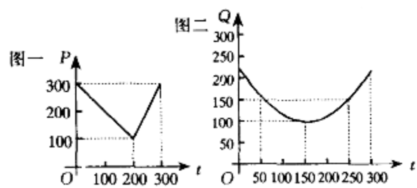


图 1—2

(Ⅰ) 写出图一表示的市场售价与时间的函数关系式 $P = f(t)$；

写出图二表示的种植成本与时间的函数关系式 $Q = g(t)$；

(Ⅱ) 认定市场售价减去种植成本为纯收益，问何时上市的西红柿纯收益最大？

(注：市场售价和种植成本的单位：元 $/10^2 kg$，时间单位：天)

【解】(Ⅰ) 由图一可得市场售价与时间的函数关系为

$$f(t) = \begin{cases} 300 - t, & 0 \leqslant t \leqslant 200, \\ 2t - 300, & 200 < t \leqslant 300; \end{cases}$$

由图二可得种植成本与时间的函数关系为

$$g(t) = \frac{1}{200}(t - 150)^2 + 100, \quad 0 \leqslant t \leqslant 300.$$

(Ⅱ) 设 t 时刻的纯收益为 $M(t)$，则由题意得 $M(t) = f(t) - g(t)$，

即 $M(t)=\begin{cases}-\frac{1}{200}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{175}{2}, & 0\leqslant t\leqslant 200,\\ -\frac{1}{200}t^2+\frac{7}{2}t-\frac{1025}{2}, & 200<t\leqslant 300.\end{cases}$

当 $0\leqslant t\leqslant 200$ 时,配方整理得 $M(t)=-\frac{1}{200}(t-50)^2+100$,所以,当 $t=50$ 时,$M(t)$ 取得区间 $[0,200]$ 上的最大值 100;

当 $200<t\leqslant 300$ 时,配方整理得 $M(t)=-\frac{1}{200}(t-350)^2+100$,所以,当 $t=300$ 时,$M(t)$ 取得区间 $(200,300]$ 上的最大值 87.5.

综上,由 $100>87.5$ 可知,$M(t)$ 在区间 $(0,300]$ 上可以取得最大值 100,此时 $t=50$,即从二月一日开始的第 50 天时,上市的西红柿纯收益最大.

【评析】 本题主要考查由函数图象建立函数关系式和函数最大值的问题,考查运用所学知识解决实际问题的能力.

一般地,对二次函数在有限区间上的最值问题,宜用配方法.对公式:$x=-\frac{b}{2a}$ 时,$y_{\max}$(或 $y_{\min}$)$=\frac{4ac-b^2}{4a}$,当自变量 x 可取任意实数时,可考虑使用.

【解题指导】

对不等式 $|ax+b|<c$,或 $|ax+b|>c$ 及一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的求解,近几年全国高考中没有单独命题考查(对理科来说),一般结合其它知识点综合命题.

二次函数是学生在高中阶段所学过的最正规、最完备的函数之一,它最能体现学生对函数思想的把握.在近几年高考中的复现率为 100%.

统览中学数学教材,可以发现,一元二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 占有极其重要的地位,不管在代数中,还是解析几何中,利用函数的机会特别多,许多重点内容与方法,如:配方法、待定系数法、换元法、参数的分类讨论、解方程、解不等式、不等式的证明、圆锥曲线、函数的最值、轨迹等都与二次函数有密切的关系.二次函数也几乎涉及到高考中的主要思想方法:如,函数与方程思想、数形结合思想、分类讨论思想及等价转化思想等.围绕二次函数的内涵及外延,在中学阶段,展开的非常充分,而且这些内容对近代代数和现代数学都有深刻的影响,是考生进入高校深造不可缺少的重要的基础.因此,在高考中,围绕着有关一元二次函数式的考查,社一元二次方程、一元二次不等式、二次曲线、二次函数的应用等,一直占有相当大的比重,考查的方法也是灵活多变.

1. 对二次函数基本性质的考查,是高考的重点之一.

① 奇偶性:$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 为偶函数的充要条件是一次项系数 $b=0$.当 $b\neq 0$ 时,二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 为非奇非偶函数.

② 单调性:二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$ 是单调性的分界线.(请读者自己写出二次函数的单调区间)

③ 最值.二次函数的区间最值既是重点又是难点,有三种情况:

1° 对称轴、区间都是确定的;2° 对称轴变动,区间固定;

3° 对称轴定,区间变动(对称轴、区间都变动的情况高考中未出现过).

对这类问题的求解,一般结合配方法、根据函数的单调性结合图象及分类讨论完

成.

2. 二次函数与方程根的讨论(根的分布问题)

① 已知含参数的一元二次方程的根在某区间,求参数范围,可借助于二次函数的图象,设 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$,方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根为 $x_1,x_2(x_1\leqslant x_2)$,$m$、$n$ 为常数,且 $m<n$.

1° 若 x_1,x_2 分居两区间时,只需考虑端点的函数值的符号.

如 $x_1\in(-\infty,m),x_2\in(m,+\infty)\Leftrightarrow f(m)<0$,

$x_1\in(-\infty,m),x_2\in(n,+\infty)\Leftrightarrow f(m)<0$ 且 $f(n)<0$.

2° 当 x_1、x_2 位于同一区间时,不但要考虑端点函数值的符号,还要考虑判别式 $\triangle\geqslant0$ 及对称轴 $-\dfrac{b}{2a}$ 的范围.

如 $x_1,x_2\in(m,+\infty)\Leftrightarrow f(m)>0$ 且 $-\dfrac{b}{2a}>m$ 且 $\triangle=b^2-4ac\geqslant0$;

若 $x_1,x_2\in(m,n)\Leftrightarrow f(m)>0$,且 $f(n)>0$ 且 $\triangle=b^2-4ac\geqslant0$ 且 $m<-\dfrac{b}{2a}<n$.

一般地说,根的分布问题,需考虑:在区间端点函数值的符号、判别式、对称轴的范围,有关规律不必死记硬背.

② 确定方程的实根个数或实根范围,注意函数思想及数形结合,往往起到事半功倍的效果.

例如:方程 $x^2-\dfrac{3}{2}x-k=0$ 在 $(-1,1)$ 上有实根,求实数 k 的取值范围.

分析一:由 $\triangle=(-\dfrac{3}{2})^2+4k\geqslant0\Rightarrow k\geqslant-\dfrac{9}{10}$,由求根公式得 $x=\dfrac{1}{2}(\dfrac{3}{2}\pm\sqrt{\dfrac{9}{4}+4k})$,再由 x_1 或 $x_2\in(-1,1)$ 即可求解(显然此思路运算量较大).

分析二:设 $f(x)=x^2-\dfrac{3}{2}x-k$.① 方程 $x^2-\dfrac{3}{2}x-k=0$ 在 $(-1,1)$ 上有两个解时,需 $\triangle\geqslant0$ 且 $f(1)>0$ 且 $f(-1)>0$,且 $-1<-\dfrac{b}{2a}<1\Rightarrow-\dfrac{9}{16}\leqslant k<-\dfrac{1}{2}$.

② 方程在 $(-1,1)$ 上,有且只有一解时,需满足

$$f(-1)f(1)<0\text{或}\begin{cases}f(-1)=0,\\f(1)>0,\\\triangle>0,\\-\dfrac{b}{2a}\in(-1,1)\end{cases}\text{或}\begin{cases}f(1)=0\\f(-1)>0,\\\triangle>0,\\-\dfrac{b}{2a}\in(-1,1).\end{cases}\Rightarrow-\frac{1}{2}\leqslant k<\frac{5}{2}.$$

由 ①、② 得 $k\in\left[-\dfrac{9}{16},\dfrac{5}{2}\right)$.

分析三:原方程可化为 $x^2-\dfrac{3}{2}x=k$,令 $y=f(x)=x^2-\dfrac{3}{2}x,x\in(-1,1)$,$y=g(x)=k$.在同一直角坐标系中分别画出 $f(x)$、$g(x)$ 的图象,分析何时两曲线有公共点,即可求得 k 值.

分析四:运用函数思想.$k=x^2-\dfrac{3}{2}x=(x-\dfrac{3}{4})^2-\dfrac{9}{16},x\in(-1,1)$,由图象

知，$x\to -1$时，$k\to k_{\max}=\dfrac{5}{2}$，$\because \dfrac{3}{4}\in(-1,1)$，$\therefore x=\dfrac{3}{4}$时，$k_{\min}=-\dfrac{9}{16}$，$\therefore k\in\left[-\dfrac{9}{16},\dfrac{5}{2}\right)$.

请大家自己比较以上各思路的优劣，并思考：

(1) 若方程 $x^2-\dfrac{3}{2}x-k=0$ 在闭区间$[-1,1]$上有实数根，求实数 k 的范围.

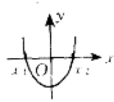
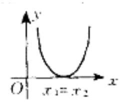
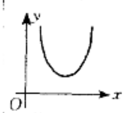
(2) 试讨论关于 x 的方程$x^2-\dfrac{3}{2}x-k=0$，在$(-1,1)$上根的情况(其中 $k\in\mathbf{R}$).

3. 注意在应用题创建二次函数模型.

通过对应用题进行深入细致的分析与探讨，正确提炼所蕴含的数学信息，对符合二次函数定义、性质的要通过设问，建立正确的二次函数模型(如 2000 年高考文理，(21)). 但要注意理论与实际的统一及定义域的限制作用，要仔细分析、观察，正确写出归纳解答.

在未来的考题中，联系实际的二次函数应用题，带有探索性质的函数综合题，定义新情景的信息迁移题，以"三个二次"为核心，借助根与系数关系，判别式等解题手段的综合题，函数与其它知识的网络交汇点试题将是高考命题的热点，因为它最能体现学生的数学思维品质.

附："三个二次"之间的关系：

判别式 $\Delta=b^2-4ac$		$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象				
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 的根		有相异二实根 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$	有相等二实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	无实根
一元二次不等式的解集	$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$	$\{x\mid x<x_1$，或 $x>x_2\}$	$\{x\mid x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq -\dfrac{b}{2a}\}$	R
	$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

【典题精练二】

一、选择题

1. 不等式 $1\leqslant|x-2|\leqslant 7$ 的解集是

　A. $\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 9\}$　　B. $\{x\mid -5\leqslant x\leqslant 1\}$

　C. $\{x\mid -5\leqslant x\leqslant 9\}$　　D. $\{x\mid -5\leqslant x\leqslant 1$，或 $3\leqslant x\leqslant 9\}$

2. 已知集合 $P=\{x\mid x^2-2x<3\}$，$Q=\{x\mid |x|<a\}$，若 $P\supset Q$，则实数 a 的取值范围是

　A. $0<a\leqslant 1$　　B. $a\leqslant 1$　　C. $-1\leqslant a\leqslant 3$　　D. $a<1$

3. 关于 x 的不等式$ax^2+bx+c<0(a\neq 0)$ 的解集为 $\varnothing$，则

A. $a<0$ 且 $b^2-4ac\leqslant 0$　B. $a<0$, 且 $b^2-4ac\geqslant 0$
C. $a>0$, 且 $b^2-4ac\leqslant 0$　D. $a>0$, 且 $b^2-4ac>0$

4. 已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象如图 1—3 所示，则 b 的取值范围是

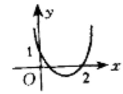


图 1—3

A. $b>0$　　B. $b<0$
C. $b<-1$　　D. $-2<b<-1$

5. 两个二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 与 $g(x)=bx^2+ax+c$ 的图象只可能是

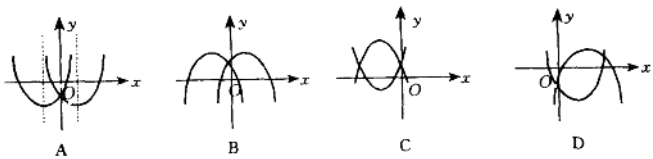


图 1—4

6. 若二次函数 $f(x)=4x^2-2(p-2)x-2p^2-p+1$ 在区间 $[-1,1]$ 内至少存在一点 $C(c,0)$，使 $f(c)>0$，则实数 P 的取值范围是

A. $(-\frac{1}{2},1)$　B. $(-3,\frac{3}{2})$　C. $(-\infty,-3]$　D. $(-3,-\frac{1}{2})\cup(1,\frac{3}{2})$

7. 对于每一个实数 x，$f(x)$ 是 $y=2-x^2$ 和 $y=x$ 这两个函数中的较小者，则 $f(x)$ 的最大值是

A. 1　B. 2　C. 0　D. -4

8. 已知函数 $f(x)=x^2$，集合 $M=\{x\mid f(x+1)=ax, x\in\mathbf{R}\}$，且 $M\cup R^+=R^+$，则实数 a 的取值范围是

A. $(0,+\infty)$　B. $(2,+\infty)$　C. $[4,+\infty)$　D. $(-\infty,0)\cup[4,+\infty)$

9. 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，如果 $f(x_1)=f(x_2)$(其中 $x_1\neq x_2$)，则 $f(x_1+x_2)$ 等于

A. $-\frac{b}{2a}$　B. $-\frac{b}{a}$　C. c　D. $\frac{4ac-b^2}{4a}$

10. 已知函数 $f(x)=-x^2+ax+b^2-b+1(a,b\in\mathbf{R})$ 对任意实数 x 都有 $f(1-x)=f(1+x)$ 成立，若 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)>0$ 恒成立，则 b 的取值范围是

A. $-1<b<0$　B. $b>2$　C. $b<-1$ 或 $b>2$　D. $b<-1$

11. 对任意 $a\in[-1,1]$，函数 $f(x)=x^2+(a-4)x+4-2a$ 的值总大于 0，则 x 的取值范围是

A. $\{x\mid 1<x<2$, 或 $x>3\}$　B. $\{x\mid 1<x<2\}$
C. $\{x\mid x<1$, 或 $x>3\}$　D. $\{x\mid x<1$, 或 $x>2\}$

12. 函数 $f(x)=(4-3a)x^2-2x+a(a\leqslant\frac{2}{3})$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值是

A. $a-\frac{1}{4-3a}$　B. a　C. $2-2a$　D. $\frac{4}{3}$

13. 某种电热水器的水箱盛满水是 200 升，加热到一定温度，即可浴用，浴用时，已知

每分钟放水 34 升，在放水的同时按 $\frac{10}{9}$ 毫升 / 秒^2 的匀加速度自动注水(即 t 分钟自动注水 $2t^2$ 升). 当水箱内的水量达到最小值时，放水程度自动停止. 现假定每人洗浴用水量为 65 升，则该热水器一次至多可供

A. 3 个洗浴　　B. 4 人洗浴　　C. 5 人洗浴　　D. 6 人洗浴

14. 设函数 $f(x) = \sin x$, $g(x) = -9(\frac{x}{\pi})^2 + 9\cdot(\frac{x}{\pi}) - \frac{3}{4}$，则使 $g(x) \geqslant f(x)$ 的 x 的取值范围是

A. $[0, \pi]$　　B. $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$　　C. $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$　　D. $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$

二、填空题

15. 已知不等式 $|ax + b| < 2(a \neq 0, b > 0)$ 的解集为 $\{x \mid 1 < x < 5\}$，则 $a + b =$ ________ $(a, b \in \mathbf{R}.)$

16. 若二次函数 $f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ 和 $f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$，使得 $f_1(x) + f_2(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数的条件是________.

17. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 + 3x - 18 > 0\}$, $B = \{x \mid (x - k)(x - k - 1) \leqslant 0\}$，且 $A \cap B \neq \varnothing$，则 k 的取值范围是________.

18. 若不等式 $|x + 2| + |x - 3| < m$ 的解集为非空数集，则实数 m 的取值范围是________.

19. 不等式 $x^2 - 3|x| + 2 > 0$ 的解集为________.

20. 如果二次函数 $f(x) = x^2 - (a - 1)x + 5$ 在区间 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上是增函数，那么 $f(2)$ 的取值范围是________.

21. 在测量某物理量的过程中，因仪器和观察的误差，使得 n 次测量分别得到 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，共 n 个数据. 我们规定所测量物理量的“最佳近似值”a 是这样一个量：与其他近似值比较，a 与各数据的差的平方和最小. 依此规定，从 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 推出的 $a =$ ________.

22. 老师给出一个函数 $y = f(x)$，四个学生甲、乙、丙、丁各指出这个函数的一个性质：甲：对于 $x \in \mathbf{R}$，都有 $f(1 + x) = f(1 - x)$；乙：在 $(-\infty, 0]$ 上函数递减；丙：在 $(0, +\infty)$ 上函数递增；丁：$f(0)$ 不是函数的最小值. 如果其中恰有三人说得正确，请写出一个这样的函数________.

三、解答题

23. (1) 若不等式 $x^2 + bx + c < 0$ 的解集是 $\{x \mid -1 < x < 2\}$，求不等式 $cx^2 + bx + 1 > 0$ 的解集；

(2) 如果不等式 $(a - 2)x^2 - 2(a - 2)x - 4 < 0$ 的解集是实数集 $\mathbf{R}$，求实数 a 的取值范围.

24. 已知抛物线 $y = x^2 + 2kx + (3 - 2k)$, $(k \in \mathbf{R})$.

(1) 当 k 为何值时，抛物线的顶点在第二象限？

(2) 当 k 为何值时，抛物线的顶点位置最高？并求此时顶点坐标.

25. 有一个关于 x 的二次函数，当 $x = 3$ 时取最大值 10，并且它的图象在 x 轴上截得的线段长为 4，求这个二次函数.

26. 设 x_1, x_2 是方程 $2x^2 - 4mx + (5m^2 - 9m + 12) = 0$ 的两实根.

(1) 将 $u = {x_1}^2 + {x_2}^2$ 表示为 m 的函数 $u = f(m)$；

(2) 求 $u = f(m)$ 的最值.

27. 求函数 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 在闭区间 $[t, t+1]$ 上的最值.

28. 已知二点 $P(0,1)$ 和 $Q(2,3)$, 如果抛物线 $y = x^2 + ax + 2$ 与线段 PQ 有两个不同的公共点, 求实数 a 的取值范围.

29. 已知 A、B 是 $\triangle ABC$ 的两个内角, 且 $\operatorname{tg}A$、$\operatorname{tg}B$ 是方程 $x^2 + mx + m + 1 = 0$ 的两个实根, 求 m 的取值范围.

30. 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx$ (a, b 为常数, $a \neq 0$) 满足条件: $f(5-x) = f(x-3)$, 且方程 $f(x) = x$ 有等根.
(1) 求 $f(x)$ 的解析式;
(2) 是否存在实数 m、n ($m < n$) 使 $f(x)$ 的定义域和值域分别为 $[m, n]$ 和 $[3m, 3n]$? 如果存在, 求出 m、n 的值; 如果不存在, 请说明理由.

31. 已知函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ 满足下列条件:
① $f(-1) = 0$; ② $f(x) \geqslant x$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立; ③ $x \in (0,2)$ 时, 有 $f(x) \leqslant \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$.
(1) 求 $f(1)$ 的值; (2) 证明 $a > 0$, $c > 0$;
(3) 当 $x \in [-1, 1]$ 时, 函数 $g(x) = f(x) - mx$ ($m \in \mathbf{R}$) 是单调的, 求证: $m \leqslant 0$, 或 $m \geqslant 1$.

32. 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 和一次函数 $g(x) = -bx$, 其中 a, b, c 满足 $a > b > c$, $a + b + c = 0$.
(1) 求证: 两函数的图象交于不同的两点 A、B;
(2) 求线段 AB 在 x 轴上的射影 A_1B_1 的长的取值范围;
(3) 求证: 方程 $f(x) - g(x) = 0$ 的两根都小于 2.

33. (2001 年春季高考, 北京、内蒙古、安徽卷, ㉑) 某摩托车生产企业, 上年度生产摩托车的投入成本为 1 万元 / 辆, 出厂价为 1.2 万元 / 辆, 年销售量为 1000 辆. 本年度为适应市场需求, 计划提高产品档次, 适度增加投入成本. 若每辆车投入成本增加的比例为 x ($0 < x < 1$), 则出厂价相应提高的比例为 $0.75x$. 同时预计年销售量增加的比例为 $0.6x$, 已知年利润 = (出厂价 − 投入成本) × 年销售量.
(Ⅰ) 写出本年度预计的年利润 y 与投入成本增加的比例 x 的关系式;
(Ⅱ) 为使本年度的年利润比上年有所增加, 问投入成本增加的比例 x 应在什么范围内?

34. 已知下列函数 $f(x) = x^2 + 2ax - (1 - \sqrt{3})a + \sqrt{3}$, $g(x) = x^2 + 2x + 3a^2$.
求证: 不论 a 取何值, 这两个函数的图象至少有一个位于 x 轴的上方.

35. 某杂志若定价每本 2 元, 可以发行 10 万本, 若定价每本每提高 0.2 元, 则发行量减少 5000 本, 现要使销售总额不低于 22.4 万元, 则杂志最高价格可定为多少? 该杂志的最大销售总额为多少?

【考点例析】

3. 了解映射的概念, 在此基础上理解函数及其有关的概念, 掌握互为反函数的函数图象间的关系.

【释析】

这一条有 3 层意思, 关于映射的概念, 只要求到了解的层次, 虽然映射是定义函数的基础, 但它属于原始概念, 不作过高要求, 在历届高考中很少考查, 只有 1999 年、2000 年全国高考中以选择题的形式作了简单的考查, 关于函数及其有关的概念, 则