总主编／蔡上鹤

特别合作 sina新浪网 中学生学习报

Magic

魔力！高效！经典！权威！

魔法数学

魔法数学

Magic Math

专题突破

高中数学思想方法

体验征服学习考试 精彩感觉！

高中版

丛书主编／严文科

认准此防伪标识

补上你知识木桶上最短的那一块

- 最全面、最创新的素质教育
- 最科学、最优化的学习流程
- 最新颖、最独到的情境设置

著名节目主持人
魔法教辅品牌代言人 何炅

长征出版社
CHANGZHENG PRESS

总主编/蔡上鹤

Magic

魔力！高效！经典！权威！

魔法数学

MAGIC MATH

魔法数学

Magic Math

专题突破

高中数学思想方法

高中版

丛书主编/ 严文科

本册主编/ 李　慧　周正实

编　　委/ 孙炳木　邵承青　朱　林

孙江昆　张　笋　关清波

于春明　于文君　杜敦杰

长征出版社

CHANGZHENG PRESS

图书在版编目（CIP）数据

魔法数学专题突破．高中：高中数学思想方法/李慧，周正实主编．—北京：长征出版社，2004
ISBN 7-80015-814-4

Ⅰ．魔…　Ⅱ．①李…②周…　Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 044328 号

魔法数学专题突破高中版

主创设计 / 魔法教育发展研究中心
电　　话 / 010－80602977
网　　址 / http：//www.magic 365.com.cn

出　　版 / 长征出版社
（北京市西城区阜外大街 34 号　邮编：100832）
行销企划 / 北京九恒世纪文化有限公司
（服务热线：010－80602977）
经　　销 / 全国新华书店
印　　刷 / 北京鑫丰华彩印有限公司
开　　本 / 880×1230　1/32
字　　数 / 4160 千字
印　　张 / 130 印张
版　　次 / 2004 年 6 月第 1 版
印　　次 / 2004 年 6 月第 1 次印刷
书　　号 / ISBN 7-80015-814-4/G・313
全套定价 / 192.00 元

版权所有・侵权必究

Magic

魔法系列丛书

总顾问

方　明　全国教育工会主席，中国陶行知研究会会长。
张怀西　全国政协副主席，民进中央副主席。
周洪宇　第十届全国人大代表，华中师范大学教育学院副院长，全国中青年教育理论工作者委员会副会长。
邱济隆　北京四中校长，全国优秀校长，全国教育系统劳动模范。
盖　雁　吉林省人大代表，白城市第一中学校长。
蔡林森　全国“五一”劳动奖章获得者，洋思中学校长。
赵世荣　哈尔滨市十四中学校长，全国知名校长。

总主编

张定远　著名教材专家，中学语文教育权威，课程教材研究所研究员，人教社资深编审，全国中语会学术委员会主任。
蔡上鹤　中学数学教育权威，人民教育出版社资深编审，国家教育部课程教材研究所教授，高中新大纲新教材编委，国务院特殊津贴专家。
薄　冰　英语教育界泰斗，北京外国语大学英语系教授，著名英语语法专家。
张同恂　中学物理教育权威，著名教材专家，人民教育出版社资深编审。
程耀尧　北京市特级教师，著名教材编写专家，北京市化学教学研究会会员。
刘　真　著名教材专家，中学生物教育权威，人民教育出版社资深编审。
杨启楠　中学政治教育权威，著名教材专家，人民教育出版社资深编审。
臧　嵘　著名历史学家，教材专家，中学历史教育权威，人民教育出版社资深编审。
刘淑梅　著名教材专家，中学地理教育权威，人民教育出版社资深编审，课程教材研究所研究员。

编委会

（以姓氏音序排列）

蔡银保	蔡尤臻	曹柏树	查建章	陈汉楚	陈　伦	陈幼安	崔庆生	邓荣科	邓雄兵	丁　健
董树岱	杜敦杰	范学术	房瑞芝	冯福泰	冯　琪	伏　萍	付东峰	高永全	高永祥	龚天青
龚天荣	龚新平	关清波	郭海东	郭权京	郭秀玲	韩　波	韩杏良	何传忠	何建新	何锡冰
洪京强	洪　涛	侯义军	胡道贵	胡光华	黄发莲	黄淑利	黄新元	姜建华	靖泽川	居卫国
库乐畅	李长杰	李泉福	李贵霞	李　华	李　慧	李健民	李延良	李　永	李占军	厉江海
梁殿斌	廖剑书	廖三红	刘传民	刘洪彬	刘建三	刘立雄	刘六华	刘玉军	刘智慧	龙　宇
卢同利	鲁希波	吕保群	吕永新	罗校生	马　恒	毛以斌	苗汝东	穆鸿书	穆振永	牛　雷
潘红霞	彭明学	乔连运	乔瑞根	秦清德	曲柏森	屈胜蛟	任美桂	任树纲	尚　乔	邵承青
邵泽玉	施亚菊	石虎林	史泽军	舒育文	侣进东	宋玉珍	孙炳木	孙丰羽	孙江昆	汤文骏
汤新德	唐丙乾	唐丽娜	汪凤珍	汪　兴	王成振	王光年	王广清	王海琴	王　麟	王　玲
王梅泉	王目春	王　平	王　强	王　冉	王瑞香	王淑英	王同喜	王卫东	王文田	王现民
王雄兵	王熙秋	王宜春	王宜泉	王永庆	王玉强	吴承斌	吴承坚	吴平英	吴胜华	吴校红
武剑英	武松健	谢绍年	熊桂宏	熊国启	熊银忠	熊正兰	徐爱容	徐　晋	薛秀立	闫洪林
严光彬	杨海龙	杨　胜	杨仕辉	杨希学	杨先元	杨新民	杨泽宏	姚国锋	游梦蛟	于春明
于双兰	于文君	余春喜	余晓明	余映潮	余　勇	袁冬华	袁建锋	张彩民	张春荣	张光军
张国富	张吉孝	张　健	张扩军	张启军	张庆志	张瑞芹	张胜言	张四平	张　笋	张秀芹
张　岩	张迎春	张佑胜	张　征	章登享	赵　刚	赵拥军	赵致平	郑　瑾	郑　磊	郑西强
周长颜	周崇典	周永宏	周正实	朱　林	祝联胜	祝中清				

Magic

致读者

在新的世纪，国内基础教育正发生着日新月异的变化，广大教师和学生对中学教辅读物出版创新的呼声也此起彼伏：中学教辅需要精品，需要品牌，需要从更远、更新的角度重新打造！在这一大背景下，魔法英语以其独特的品质和魅力赢得了读者的尊重和认可，应接不暇的咨询电话和雪片般的订单让我们更加深刻地体会到：中国的基础教育太需要“魔法”这样卓越的图书了！

数以万计的中学教师和学生问我们：你们何时出版“魔法语文”“魔法数学”“魔法物理”“魔法化学”等其他学科的图书？

肩负着社会的责任，带着广大中学师生的期盼，我们联合了美国蒙登戈国际语言研究中心、英国剑桥国际语言研究院等国内外数十所教育研究机构，邀请了张定远、蔡上鹤、薄冰、张同恂、程耀尧、刘真、杨启楠、臧嵘、刘淑梅等十余名基础教育界权威、国内顶级教材专家，在北京四中、黄冈中学、华东师大附中、清华大学附中、北大附中等国内百余所重点中学的鼎力协助下，隆重推出了以《魔法英语》为龙头的《魔法语文》《魔法数学》《魔法物理》《魔法化学》《魔法生物》《魔法政治》《魔法历史》《魔法地理》系列魔法图书。

“享受学习每一刻！”是魔法系列图书最基本的理念，我们希望把魔法系列图书这一成功的理念推广到中学教育的每一个学科、每一个年级、每一个领域。

一千多位教育专家及知名特高级教师联手缔造的魔法系列图书，已经走在中学教辅图书的最前沿，成为一个全新的中学教辅品牌！一个真正由专家打造的具有国际品质的中学教辅品牌！

我们希望给中学生提供一个崭新的学习平台，为每位读者付出的时间和殷切的期待提供丰厚的回报。我们力求通过不懈的努力，让魔法系列图书解放中学生的学习，解放中学生的考试，让学习变得“轻松、快乐、高效”的思想光芒照耀每位读者！

我们与读者的心是相通的，同广大一线教师的心是相通的。现在，我们付出的每一份努力，都得到了广大教师和读者的支持和肯定。面对这些勉励和关怀，我们将会以百倍的努力来报答。未来我们会做得更好，这是我们的目标，也是我们不变的承诺。

魔法系列图书愿做中学生学习的最佳助手，最贴心的朋友！让魔法系列图书伴随着我们的幸福、快乐和回忆，一起成长！

魔法教育发展研究中心
2004.6

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

Magic

魔法数学

前　言

Preface

根据教育专家多年的研究发现，几乎每位学生在学习过程当中都有薄弱的学科，每一学科中都有薄弱的专题，而正是这些薄弱学科、薄弱的专题阻碍了学生的成功。“亡羊补牢，未为迟也。”为了帮助更多中学生在高考中走向成功，我们组织了全国数十名有多年教学和研究经验的特高级教师、教研员，在张定远、薄冰、蔡上鹤、张同恂、程耀尧、刘真、杨启楠、臧嵘、刘淑梅等中学教育界权威、教材专家的悉心指导下，在北京四中、黄冈中学、华东师大附中、清华大学附中、北大附中等国内百余所重点中学的鼎力协助下，精心编写了本系列图书。

本丛书在编写过程中秉承“科学划分、高效实用”的编写理念，尊重现行教材体系，依据教学大纲与考试大纲，结合近几年数学命题实践及课堂教学实际，将高中数学专题科学地设置为：《集合与简易逻辑》《函数》《数列》《三角函数》《平面向量》《不等式》《直线与圆的方程》《圆锥曲线方程》《空间直线与平面》《空间向量与简单几何体》《排列、组合、二项式定理》《概率统计（理）》《概率统计、导数（文）》《极限、导数、复数（理）》《高中数学思想方法》十五个分册。

本书具备如下特点：

细分专题，针对性强：适合高中不同年级的学生对自己的薄弱学科、薄弱专题集中复习，不受年级、教材限制。

内容详尽，重点突出：以大纲为面，考纲为线，所有该专题的内容全面详尽，重点难点内容突出。

表述灵活，直观高效：本书灵活使用图、表、眉批、旁注等多种表达方式进行内容阐述，使平常枯燥的学习过程变得直观、具体、高效。

信息敏锐，材料新颖：本书采用了大量的前沿性、趣味性、现实性资料，结合最新的高考信息和命题趋势，从最新的角度组织学习和复习，具有很强的实用性和超前性。

Magic

前　言

Preface

丛书栏目功能定位如下：

【教考动态】紧扣教学大纲和考试大纲，总结分析中学教学教材改革的新趋势、新动向，突出最新考试信息和对未来高考命题走向的预测，有很强的指向性。

【知识精讲】对所涉及科目的知识点，高度集中地作全面、详尽地分析，以利学生在有限的时间里，集中补差、补弱，系统有效地提高自己的知识能力，补上自己知识木桶上最短的那一块。

【经典例题】针对【知识精讲】中的内容，重点精选一线教师多年积累的最典型例题进行分析，与知识精讲栏目形成互动，总结规律，点拨技巧，使学生融会贯通，举一反三，触类旁通。

【思维跨越】对重点、难点和热点延伸，使学生既从点上把握，又能够纵横扩展，最终对所学知识能够达到点面结合，灵活运用。

【范例剖析】针对【思维跨越】中的内容，对综合性强的拓展题作解析，结合最新的《考试大纲》，评价每道题的命题角度和能力层级要求，分析解题过程，点拨解题技巧。

【高考连线】收集了与本节内容相关的近几年的高考题并进行简要解析，使学生了解高考，感受高考，为决胜高考做准备。

【专题训练】专题训练由三个层次组成，第一层次的基础训练，重在基础；第二层次的拓展训练，重在提高；第三层次的综合训练，重在运用。通过这三个层次的练习从而使知识的训练由浅入深，阶梯形提高，最终达到把握基础知识，培养和提高学生的综合素质和应考能力。

尽管我们在编写过程中，本着对学生高度负责的态度，处处把关，但如果还有疏漏，诚请读者指正。

编　者

2004年6月于北京

Magic

目 录

Contents

Magic

目　录

Contents

第一讲 配方法、待定系数法与换元法

教考动态

1. 教考要求：

(1) 配方法是指将一代数式变形成一个(或几个)代数式平方的形式. 其基本形式是：$ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}(a\neq 0)$. 考纲要求较高

(2) 待定系数法是把具有某种确定形式的数学问题，通过引入一些待定的系数，转化为方程组来解决. 考纲要求较高

(3) 换元法是指引入一个或几个新的变量代替原来的某些变量(或代数式)，对新的变量求出结果之后，返回去再求出原变量的结果. 换元法通过引入新的元素将分散的条件联系起来，或者把隐含的条件显示出来，或者把条件与结论联系起来，或者变为熟悉的问题. 其理论根据是等量代换. 考纲要求较高

2. 命题动向：

配方法、待定系数法、换元法是高考考查的重点对象，渗透在选择题、填空题以及解答题中.

知识精讲

1. 高考中常见的基本配方形式有：

(1)$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

(2)$a^2+ab+b^2=(a+\frac{1}{2}b)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}b)^2$

(3)$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2ab-2bc-2ac$

(4)$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

(5)$x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$

(6)$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\cdot\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

2. 待定系数法的主要理论依据是：

(1) 多项式 $f(x)=g(x)$ 的充要条件是：对于任意一个值 a，都有 $f(a)=g(a)$；

(2) 多项式 $f(x)=g(x)$ 的充要条件是两个多项式各同类项的系数对应相等.

运用待定系数法的步骤是：(1) 确定所求问题含待定系数的解析式（或曲线方程等）；

(2) 根据恒等条件，列出一组含待定系数的方程；

(3) 解方程或消去待定系数，从而使问题得到解决.

3. 高中数学中主要换元法有下列两类：

(1) 整体换元：以“元”换“式”.

(2) 三角换元：以“式”换“元”.

此外，还有对称换元，均值换元，万能换元等.

换元法应用比较广泛. 如解方程，解不等式，证明不等式，求函数的值域，求数列的通项与和等，另外在解析几何中也有广泛的应用.

例 1 已知 $f(\frac{x+1}{x})=\frac{x^2+x+1}{x^2}$ 则 $f(x)$ 的表达式是(　　)

$f(x)=x^2+x+1$　　$f(x)=x^2-x+1$

$f(x)=x^2-x-1$　　$f(x)=x^2+x-1$

分析：将右边配成含 $\frac{x+1}{x}$ 的代数式.

解析：$\because f(\frac{x+1}{x})=\frac{x^2+x+1}{x^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1=(\frac{1}{x}+1)^2-(\frac{1}{x}+1)+1$

$\therefore f(x)=x^2-x+1$. 故答案选 B.

例 2 已知函数 $f(x)=a^x+k$ 的图像过点(1,7)，它的反函数 $f^{-1}(x)$ 的图像过点(4,0)，则 $f(x)$ 的表达式是(　　)

$f(x)=4^x+3$　　$f(x)=2^x+5$

$f(x)=5^x+2$　　$f(x)=3^x+4$

解析：由点(1,7)在函数 $f(x)=a^x+k$ 的图像上得：$7=a+k$　①

由点(4,0)在 $f^{-1}(x)$ 的图像上得：$4=1+k$　②

故解 ①② 得：$\begin{cases}a=4\\k=3\end{cases}$　$\therefore f(x)=4^x+3$.　故答案选 A.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

例 3 函数 $y=x+\sqrt{2x-1}$ 的值域是(　　)

A $[0,+\infty)$　　B $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

C $(-\infty,+\infty)$　　D 以上答案都不对

解析:令 $\sqrt{2x-1}=t$,则 $t\geqslant 0$,且 $x=\frac{t^2+1}{2}$,代入原函数得:

$y=\frac{t^2+1}{2}+t=\frac{1}{2}(t+1)^2$　$\because t\geqslant 0$　$\therefore y\geqslant\frac{1}{2}$. 故答案是 B.

思维跨越

1. 配方法主要适用于二次项有关的函数、方程、等式、不等式的讨论,求解与证明及二次曲线的讨论.

2. 待定系数法主要适用于:求函数的解析式,求曲线的方程,因式分解等.

3. 运用换元法解题要注意新元的约束条件和整体置换的策略.

范例剖析

例 1 (1) 已知函数 $f(x)=\log_a(x^2-2mx+2m^2-3)$ 的定义域是一切实数,则 m 的取值范围是________.

(2) 函数 $y=\frac{x^2-2x+2}{2x-2}$,$x\in(-\infty,1)$ 的最大值是________.

分析:(1) 要使定义域是一切实数,需真数对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒大于零,用配方法可得.

(2) 配成一个平方加上一个常数,或配成使用基本不等式.

解析:(1) $\because x^2-2mx+2m^2-3=(x-m)^2+m^2-3$,

$\therefore$ 要使定义域为一切实数,只要 $m^2-3>0$,

所以 $m\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$.

也可转化为:$y=x^2-2mx+2m^2-3$ 图象与 x 轴无交点,利用 $\Delta<0$ 来解

(2)$y=\frac{x^2-2x+2}{2x-2}$

$=\frac{x(x-1)-(x-1)+1}{2(x-1)}=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2(x-1)}$

$=\frac{1}{2}\left[(x-1)+\frac{1}{x-1}\right]=-\frac{1}{2}\left[(1-x)+\frac{1}{1-x}\right]$

$=-\frac{1}{2}\left[(\sqrt{1-x}-\frac{1}{\sqrt{1-x}})^2+2\right]\leqslant-1,$

$\because x\in(-\infty,1)$

$\therefore 1-x>0$ 也可以这样解：

$\because 1-x>0,\frac{1}{1-x}>0$

$\therefore (1-x)+\frac{1}{1-x}\geqslant 2,$

$\therefore y\leqslant -1.$

$\therefore$ 函数 $y=\frac{x^2-2x+2x}{2x-2}[x\in(-\infty,1)]$ 的最大值是 -1.

$\because x<1,\therefore 1-x>0$，可以利用基本不等式求最值

探究提升

利用配方法求函数的极值是常用方法之一，利用不等式求极值常常需要配定值.其实这也是一种“配方”技巧.

变式题：已知函数 $y=4^x-3\times2^x+3$，当其值域为$[1,7]$时，自变量 x 的取值范围是(　　)

A $[2,4]$　　B $(-\infty,0]$

C $(0,1)\cup[2,4]$　　D $(-\infty,0)\cup[1,2]$

分析：令 $t=2^x$ 后，对关于 t 的二次函数进行配方求解.

例 2　已知当 $x\in[0,1]$时，不等式 $x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta>0$ 恒成立.试求 θ 的取值范围.

分析：将不等式的左边配方，变形为：

$$[x\sqrt{\cos\theta}-\sqrt{\sin\theta}\cdot(1-x)]^2+2(-\frac{1}{2}+\sqrt{\sin\theta\cdot\cos\theta})x\cdot(1-x),$$

上式平方项大于 0，故只要 $-\frac{1}{2}+\sqrt{\sin\theta\cdot\cos\theta}>0$ 即可.

解析:∵ 对一切 $x \in [0,1]$ 恒有 $f(x) = x^2\cos\theta - x(1-x) + (1-x)^2\sin\theta > 0$,

$\therefore f(1) = \cos\theta > 0, f(0) = \sin\theta > 0$

$\therefore f(x) = x^2\cos\theta - x(1-x) + (1-x)^2\sin\theta$

$= [x\sqrt{\cos\theta} - \sqrt{\sin\theta}\cdot(1-x)]^2 + 2(-\frac{1}{2} + \sqrt{\sin\theta\cdot\cos\theta})$

$\cdot x(1-x)$

当 $x_0 = \dfrac{\sqrt{\sin\theta}}{\sqrt{\cos\theta} + \sqrt{\sin\theta}} \in (0,1)$,则 $\sqrt{\cos\theta}x_0 - \sqrt{\sin\theta}(1-x_0) = 0$

$\therefore [x\sqrt{\sin\theta} - \sqrt{\sin\theta}(1-x)]^2 \geqslant 0$

$\therefore f(x_0) = 2(-\frac{1}{2} + \sqrt{\sin\theta\cdot\cos\theta})x_0\cdot(1-x_0) > 0$

$\therefore -\frac{1}{2} + \sqrt{\cos\theta\cdot\sin\theta} > 0.$ (*)

反之(*)成立,则 $2(-\frac{1}{2} + \sqrt{\cos\theta\cdot\sin\theta})\cdot x\cdot(1-x) > 0, x \in (0,1)$ 成立.

$f(x) \geqslant 2(-\frac{1}{2} + \sqrt{\sin\theta\cdot\cos\theta})x(1-x) > 0.$

由此可得:

$$\begin{cases} \sin\theta > 0 & (1) \\ \cos\theta > 0 & (2) \\ -\frac{1}{2} + \sqrt{\sin\theta\cdot\cos\theta} > 0 & (3) \end{cases}$$

转化成关于 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 的不等式组

先在 $[0,2\pi]$ 中解(1)与(2)得:$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

又 $-\frac{1}{2} + \sqrt{\cos\theta\cdot\sin\theta} > 0$, $\sqrt{\cos\theta\cdot\sin\theta} > \frac{1}{2}$, $\sin 2\theta > \frac{1}{2}$,

$\because 0 < 2\theta < \pi$,故 $\frac{\pi}{6} < 2\theta < \frac{5\pi}{6}$

所以 $\frac{\pi}{12} < \theta < \frac{5\pi}{12}$.

因此,原题中的 θ 取值范围是:$2k\pi + \frac{\pi}{12} < \theta < 2k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}$.

探究提升

在综合题中,对哪两项施行配方法是解题的关键所在.本题中因为 $x\cdot(1-x) \geqslant 0$,故对 $x^2\cos\theta$, $(1-x)^2\sin\theta$ 配方是解本题的关键也是难点.

例 3 (1) 已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=1$，$f(x+1)-f(x)=2x-3$，则 $f(x)=$ ________.

(2) 已知将直线 l 向下平移3单位，再向右平移2单位，所得到的直线与原来直线 l 重合，则直线 l 的斜率是________.

分析：用待定系数法分别将二次函数与直线方程设出，然后根据条件求出结论.

解析：(1) 设所 25 求的二次函数是：$f(x)=ax^2+bx+c$，

$\because f(0)=1$，

$\therefore c=1$

又 $\because f(x+1)-f(x)=a(x+1)^2+b(x+1)+c-ax^2-bx-c=2ax+a+b=2x-3$

多项式恒等对应项系数相等

比较两边系数得：$a=1, b=-4$.

故 $f(x)=x^2-4x+1$.

(2) 设直线 l 的方程为 $y=kx+b$，

将 l 向下平移三个单位得 l'：$y=kx+b-3$；

将 l' 右平移 2 个单位得 l''：$y=k(x-2)+b-3$. 与直线 l 重合，故 $b=-2k+b-3$

$\therefore k=-\dfrac{3}{2}$.

即直线 l 的斜率是 $-\dfrac{3}{2}$.

探究提升

利用待定系数法解题，要熟悉基本函数，基本曲线的形式. 这样才能正确设参数. 例如：对于二次函数，我们常可设为以下三种形式：

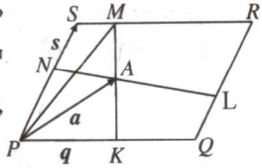
(1) $y=ax^2+bx+c$；

(2) $y=a(x-x_1)(x-x_2)$；

(3) $y=a(x-x_0)^2+m$.

变式题：已知二次函数的图像的对称轴方程为 $x=-1$，图像最低点的纵坐标是 -4，且在 x 轴上截得线段为 4，则其解析式是.

分析：可设二次函数解析式为：$y=a(x+1)^2-4$.



例 4 如图，在平行四边形 $PQRS$ 中，在 PQ、QR、RS、SP 上分别取点 K、L、M、N，其中 K 与 N 分别为 PQ 与 PS 的中点，$QL=\frac{1}{3}QR$，$SM=\frac{1}{4}SR$，且设 KM 与 LN 交于 A 点，$\overrightarrow{PA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{q}$，$\overrightarrow{PS}=\boldsymbol{s}$，试用 $\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{s}$ 表示 $\boldsymbol{a}$.

分析：由于 $\overrightarrow{PA}$ 与 $\overrightarrow{KM}$ 共线，可得一个 $\overrightarrow{KA}$ 关于 $\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{s}$ 的分解式(含待定常数)，同样，利用 $\overrightarrow{PN}$、$\overrightarrow{NL}$ 还可求得 $\overrightarrow{PA}$ 关于 $\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{s}$ 的另一个解析式(也含待定常数)，由于 $\overrightarrow{PA}$ 关于两个基底的分解式的惟一性，可得待定常数的两个方程.

解析：连结 PL、PM：

$\because$ $\overrightarrow{KA}$ 与 $\overrightarrow{KM}$ 与共线 $\therefore$ 存在实数 λ_1，使 $\overrightarrow{KA}=\lambda_1\overrightarrow{KM}$

$\because$ $\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{KQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RM}$，$K$ 为 $\overrightarrow{PQ}$ 的中点，$\overrightarrow{QL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{QR}$，$\overrightarrow{RM}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PS}$

$$\therefore \overrightarrow{KM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PS}+(-\frac{3}{4}\overrightarrow{PQ})$$

$$=-\frac{1}{4}\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PS}$$

即 $$\overrightarrow{KM}=-\frac{1}{4}\boldsymbol{q}+\boldsymbol{s}$$

$$\therefore \overrightarrow{KA}=-\frac{\lambda_1}{4}\boldsymbol{q}+\lambda_1\boldsymbol{s}$$

$\because$ $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PK}+\overrightarrow{KA}$，而 K 为 $\overrightarrow{PQ}$ 中点

$$\therefore \overrightarrow{PA}=\frac{1}{2}\boldsymbol{q}-\frac{\lambda_1}{4}\boldsymbol{q}+\lambda_1\boldsymbol{s}$$

即 $$\overrightarrow{PA}=(\frac{1}{2}-\frac{\lambda_1}{4})\boldsymbol{q}+\lambda_1\boldsymbol{s} \qquad ①$$

同样 $$\overrightarrow{NA}=\lambda_2\overrightarrow{NL}$$

$$\overrightarrow{NL}=\overrightarrow{NS}+\overrightarrow{SR}+\overrightarrow{RL}$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{PQ}-\frac{2}{3}\overrightarrow{PS}$$

$$=\overrightarrow{PQ}-\frac{1}{6}\overrightarrow{PS}=\boldsymbol{q}-\frac{1}{6}\boldsymbol{s}$$

平面向量的相等，平面向量的基本定理是解决此题的关键

$\therefore \overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{PN}+\lambda_2\overrightarrow{NL}$

$$=\frac{1}{2}\boldsymbol{s}+\lambda_2\boldsymbol{q}-\frac{\lambda_2\boldsymbol{s}}{6}=(\frac{1}{2}-\frac{\lambda_2}{6})\boldsymbol{s}+\lambda_2\boldsymbol{q} \qquad ②$$

∵ 向量$\overrightarrow{PA}$以$\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{s}$为基底的线性分解是惟一的

据 ①② 可得$\begin{cases}\lambda_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\lambda_2\\ \lambda_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\lambda_1\end{cases}$

解得$\begin{cases}\lambda_1=\frac{10}{23}\\ \lambda_2=\frac{9}{23}\end{cases}$

$\therefore \overrightarrow{PA}=\frac{9}{23}\boldsymbol{q}+\frac{10}{23}\boldsymbol{s}$

探究提升

两向量共线，常用待定常数给出它们的关系.

例 5 (1) 函数 $y=\frac{x-x^3}{(1+x^2)^2}$ 的值域是________.

(2) 方程 $\log_2(2^x+1)\cdot\log_2(2^{x+1}+2)=2$ 的解集是________.

解析：(1) 令 $x=\tan\theta,\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，则

$$y=\frac{\tan\theta-\sin^3\theta}{(1+\tan^2\theta)^2}=\cos^3\theta\cdot(1-\tan^2\theta)\sin\theta$$
$$=\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$
$$=\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot\cos2\theta$$
$$=\frac{1}{4}\sin4\theta$$

$\therefore y\in\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$

超越方程要通过换元转化为初等方程求解

(2) 令 $\log_2(2^x+1)=t$，则原方程化为：$t\cdot(1+t)=2$

解之得：$t=1$ 或 $t=-2$

当 $t=1$ 时，$\log_2(2^x+1)=1\Rightarrow x=0$；

当 $t=-2$ 时，$\log_2(2^x+1)=-2$ 舍去

故原方程的解集是$\{0\}$.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com