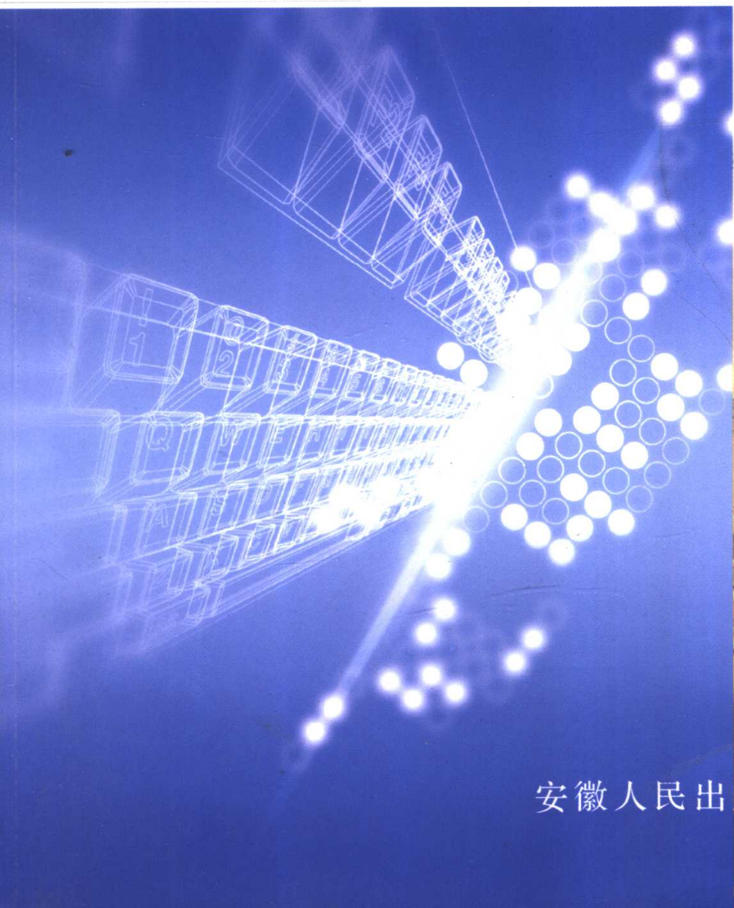
安徽省高校重点课程建设教材

JINDAI
WULI
SHIYAN

近代物理实验

崔执凤 主编



安徽人民出版社

近代
物理实验

崔执凤 主编

安徽人民出版社

图书在版编目（CIP）数据

近代物理实验/崔执凤主编．—合肥：安徽人民出版社，2006

ISBN 7－212－02925－4

Ⅰ．近…　Ⅱ．崔…　Ⅲ．物理学—实验—高等学校—教材　Ⅳ．041－33

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第093461号

近 代 物 理 实 验

崔执凤　主编

出版发行：安徽人民出版社
地　　址：安徽合肥市金寨路381号九州大厦　　邮编：230063
发 行 部：0551－2833066　0551－2833099（传真）　0553－3937079
组　　编：安徽师范大学编辑部　　电话：0553－3883578　3883579
经　　销：新华书店
印　　制：安徽芜湖新华印务有限责任公司
开　　本：787×1092　1/16　　印张：21　　字数：435千
版　　次：2006年8月第1版　　2006年8月第1次印刷
标准书号：ISBN 7－212－02925－4
定　　价：31.50元

前　言

“近代物理实验”是为物理及相关专业高年级学生开设的一门重要的基础实验课程，本课程所涉及的物理知识面广，并具有较强的综合性和技术性。

本课程的主要目标是通过近代物理实验丰富和活跃学生的物理思想，培养学生对物理现象的洞察能力和分析能力，理解物理实验在物理概念的产生、形成和发展过程中的作用；学习近代科学技术中的一些重要物理方法、技术、仪器和相关知识，进一步培养学生良好的实验习惯和严谨的科学作风，使学生获得一定程度的用实验方法和技术研究物理现象和规律的独立工作能力。

基于本课程在物理教学中的作用和地位，我们在选题时注意了以下几点：

1. 配合课堂的理论教学，编写了部分在物理学发展史上有重要地位的著名实验。通过这些实验加深学生对近代物理的基本现象和规律的理解，了解物理实验对推动物理学发展的重要作用和意义。

2. 在部分近代物理发展的重要领域（如核物理、低温物理、真空技术等）里，结合专业设置的特点，编写了一些在内容上能反映该领域在实验方法和技术上有代表性的实验。对于这方面的选题，尽量做到切合学生实际水平，不要求有太深的专业知识。

3. 注意介绍近代物理实验研究中常用的一些实验技术，如激光技术、微波技术、磁共振技术等，并结合一些近代实验技术，如单光子记数、锁相放大器和多道脉冲分析器等，让学生有机会接触到一些现代实验技术，扩大知识面。

4. 作为一种尝试，我们结合时代特征，设计了部分新型实验，如物理环境测试、纳米测量技术等，其中大部分实验是我们通过实践自行设计的，目的是让学生感受到时代的脉搏，了解最新科学技术成就。客观地说，这些内容目前尚不够成熟，但是我们相信通过实践，它会得到不断地丰富与提高。

在本书的编写过程中，考虑到各校课程设置和条件的差异，为了方便学生的学习，在每一单元开始部分编写了一节引言，介绍各个领域的概况、选题的原则、教学的目的和要求以及该单元实验必备的预备知识，供学生在接触本单元实验前预习参考。在各个实验的原理部分，尽量避免繁琐的数学推导，力求简明扼要、物理图像清晰，使学生能通过预习，初步掌握实验的原理和方法，尽可能在理解的基础上做好实验。在实验的操作部分，除了一些技术性较强的操作和某些特殊的实验外，一般不罗列操作步骤，而让学生在掌握了实验原理和方法的基础上，根据实验要求

和仪器说明书自行设计实验步骤，以期培养学生的实际工作能力和创造力，并鼓励学生亲自动手，变化实验条件来验证自己的各种想法，培养自己的想象力和创新精神。

本书由崔执凤教授主编，参加编写工作的有杜先智、凤尔银、许新胜、季学韩、张先燚、刘广菊、征洋、柳文玄等，全书由杜先智教授负责统稿，刘广菊担任校对。

本书在编写过程中，参考了部分文献和兄弟院校的教材，各个部分已一一列出，编者在此向这些资料的作者们表示衷心的感谢。

进入新世纪以来，高校的课程设置面临着新的改革形势。作为综合性、研究性、技术性都较强的《近代物理实验》，更应当体现这种时代精神。我们希望通过今后的不断努力，能把本教材建设得更好些。

由于时间的仓促和我们的水平所限，本书不足之处在所难免，恳请读者们提出宝贵意见，我们一定会在不断的努力中求得完善和提高。

编　者

2006 年 1 月

目　录

实验误差和数据处理

引　言

物理学是一门实验科学，而实验离不开对物理量的测量，测量的目的是为了获得最接近客观真值的测量结果。但是由于各种因素的影响，测量结果总是或多或少地偏离真值，测量值与真值之差称为误差。

误差按其性质可分为系统误差和偶然误差（随机误差）。系统误差总是使测量结果向一个方向偏离，其数值一定或按确定的规律变化。系统误差来源于仪器的不准确、测量条件的偏离及测量者的固有习惯等。多次重复的测量并不能消除系统误差，但可以从大量的工作中通过误差的分析对测量结果进行修正。

在测量中还会发现，即使系统误差很小或几乎被消除，在一定的条件下重复同一测量时，每次测量结果也并不一样，这种差别时大时小，时正时负，带有偶然性或随机性，这就是偶然误差或随机误差。这种随机性可能来自两个方面：一方面是测量中受到实验技术水平的限制，总是存在着观察者尚不能完全控制的某些偶然因素，如测量环境的变化、仪器性能的起伏、外界微小的干扰等等，使测量结果出现随机性；另一方面是物理现象的本身可能存在固有的随机性质，致使物理量的实际数值出现随机起伏，在后一种的情况下，测量值的离散程度往往大大超过随机误差可能造成的离散程度。

不论是随机误差还是物理量本身实际数值的统计涨落，它们都服从统计规律，因此可以采用概率论和数理统计方法来处理。误差理论实质上就是一门以概率论和数理统计为基础的学科，内容十分丰富。在本书中我们只能扼要地介绍一些与测量数据分析和处理有关的概率论与数理统计的基本概念和方法。

一、随机事件的概率分布

在一定的条件下，对某一个物理量进行测量，由于测量中存在着一些无法控制的偶然因素或被测对象的随机性，使得某一测量值 A 可能出现也可能不出现，我们称 A 为随机事件。

譬如在一定的条件下的试验，共进行 N 次，其中事件 A 发生了 N_A 次，比值 N_A/N 称为事件 A 发生的频率。如果随着试验次数 N 的增加，频率 N_A/N 越来越趋近于某

个确定值，那么，当 $N\to\infty$ 时，频率的极限值称为事件 A 的概率，记作 $P_r(A)$，即

$$\frac{N_A}{N}\xrightarrow[N\to\infty]{}P_r(A)$$

如果某个随机事件可以用一个数来表示，这个数就是随机事件的函数，称为随机变量。在一定的条件下，对某个物理量的测量，每一次的测量值便是随机变量的取值。

随机变量的全部可能取值的集合称为母体或总体。如果测试共进行了 N 次，所得的 N 个随机数（x_1，x_2，…，x_N）称为子样或样本。

随机数仅可取有限个或可数的一列数值的随机变量称为离散随机变量。随机数可取某个区间内的任何数值的随机变量称为连续随机变量。

对于随机变量，我们关心的不只是随机变量的全部可能取值，还必须了解各种可能取值的概率，即随机变量的概率分布。无论是离散型还是连续型的随机变量，其可能的全部取值都可以排列在实数轴上，亦即是实数轴上的一个子集合，因此可以定义随机变量 X 的分布函数 $P(x)$ 为

$$P(x)=P_r(X\leqslant x)$$

根据定义，它必须满足

$$P(-\infty)=0 \tag{0-1}$$

$$P(\infty)=1 \tag{0-2}$$

对于离散型变量 X，它只能取可数的数值 x_1，x_2，…

除了用分布函数外，还常用概率函数 $P(x)$ 来描写它的概率分布。概率函数在某一点 x 处的值等于随机变量 X 取值 x 的概率，即

$$P(x)=P_r(X=x)$$

根据分布函数和概率函数的定义，有

$$P(x)=\sum_{x_i<x}p(x_i)$$

$$\sum_{1}^{x}P(x_i)=P(x=\infty)=1$$

离散型随机变量的概率函数和分布函数的形状如图 0－1 所示。

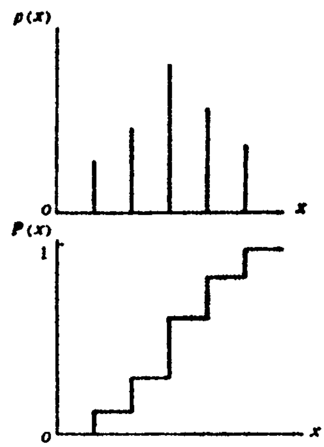


图 0－1　离散型随机变量的概率函数及分布函数

对于连续型随机变量，定义概率密度函数

$$p(x)=\frac{dP(x)}{dx}$$

即随机变量的值落入某一点附近一无限小区间 dx 内的概率，等于该点的概率密度与此无限小区间的乘积。因此有

$$\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\,dx=1 \tag{0-3}$$

这就是归一化条件。

随机变量在某一区间〔a，b〕内取值的概率为

$$Pr(a \leqslant x \leqslant b) = \int_a^b p(x)\,dx$$

用图形表示，概率密度函数是一条连续的曲线，分布函数是一条单调上升到1的曲线（见图0-2）。概率密度函数曲线在横轴上任一点x'左边曲线下的面积，就是分布函数曲线在该点的值。

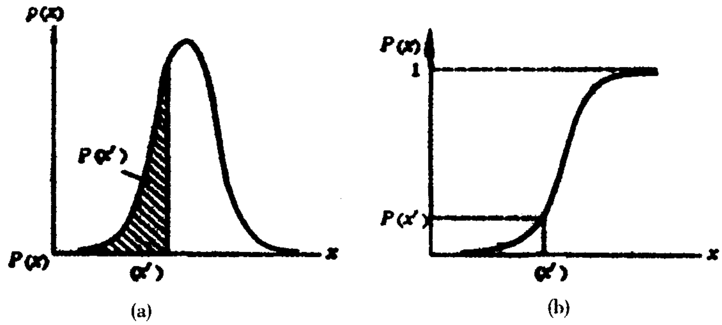


图0-2　连续型随机变量X的概率密度函数（a）和分布函数（b）

由概率密度函数或分布函数可求得随机变量X在区间〔a，b〕内取值的概率

$$Pr(a \leqslant x \leqslant b) = P(b) - P(a) = \int_a^b p(x)\,dx$$

二、概率分布的数字特征量

如果一个随机变量的概率密度函数的形式已知，那么只要给出函数式中的各个参量（称为分布参量）的数值，则随机变量的分布将完全确定。在物理实验中，这种分布参数往往就是需要研究的物理量，在不同形式的分布中，常用几个数字特征量来表示，其中最重要的是随机变量的期望值和方差。

1. 随机变量的期望值

随机变量的期望值定义为

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx \tag{0-4}$$

它的物理意义是作无穷多次重复测量时，测量结果的平均值。它是随机变量概率密度分布曲线的重心位置，随机变量则围绕着期望值取值。对于单峰对称的分布曲线，期望值就是曲线的峰值位置，习惯上用尖括号来表示期望值。

离散型随机变量的期望值为

$$\langle x \rangle = \sum_i x_i p(x_i) \tag{0-5}$$

2. 方差

随机变量的方差定义为

$$V_{ar}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - <x>)^2 p(x)\, dx$$
$$= \langle (x - <x>)^2 \rangle \quad (0-6)$$

方差描述随机变量围绕期望值分布的离散程度，亦即随机变量取值偏离期望值起伏的大小。通常把随机变量 x 的方差记为

$$V_{ar}(x) = \sigma^2(x) \quad (0-7)$$

方差的平方根 $\sigma(x)$ 称为随机变量的根方差或标准差。方差越小，随机变量的数值在期望值附近分布得越集中；反之，方差越大则数值越分散。根据方差的定义，不难证明

$$\sigma^2(x) = <x^2> - <x>^2 \quad (0-8)$$

为了描述两个随机变量的相关程度，还可以引入它们的协方差，这里不再介绍。

三、物理实验中常见的几种分布

由于影响随机变量的因素各不相同，因此随机变量的概率分布规律也多种多样，其中有些直接来源于物理量本身的统计性质。这里只介绍几种在物理量测量中常见的以及数据分析处理中常用的统计分布。

1. 二项式分布

若随机事件 A 发生的概率为 p，不发生的概率为 $(1-p)$，则在 N 次独立试验中，A 发生 k 次的概率为

$$p(k) = \frac{N!}{k!\,(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} \quad (0-9)$$

其中因子 $\frac{N!}{k!\,(N-k)!}$ 代表 N 次试验中事件 A 发生 k 次，而 $(N-k)$ 次不发生的各种可能的组合，由于这个概率表达式是二项式展开式

$$[p + (1-p)]^N = \sum_{k=0}^{N} \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k}$$

中的项，因此 (0-9) 表示的概率分布称为二项式分布。这里随机变量 k 是离散型的变量，k 的取值只能是 $k=0, 1, 2, \cdots, N$。

利用二项式定理可以求出遵从二项式分布的随机变量 k 的期望值和方差分别为

$$\langle k \rangle = \sum_{k=0}^{N} k \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} = Np \quad (0-10)$$

$$\sigma^2(k) = <k^2> - <k>^2 = <k^2> - N^2p^2$$
$$= \sum_{k=0}^{N} k^2 \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} - N^2p^2$$
$$= Np(1-p) \quad (0-11)$$

二项式分布中的 p 和 N 是两个独立的参数。

二项式分布有许多实际的应用。例如，穿过仪器的 N 个粒子被仪器探测到 k 个的概率，或 N 个放射性核经过一段时间后衰变 k 个的概率等，这些问题的随机变量 k

都服从二项式分布。再如，在产品质量检验中，以抽样试验方式来确定其合乎条件结果的概率，也服从二项式分布。

2. 泊松分布

泊松分布是二项式分布的极限情况，它是无穷多次独立试验的总结果。

由二项式分布的概率函数式

$$p(k)=\frac{1}{k!}\cdot\frac{N!}{(N-k)!}p^k(1-p)^{N-k}$$

考虑 $N\to\infty$ 的情况，每次试验中 A 发生的概率 $p\to 0$，但期望值 $\langle k\rangle=Np$ 趋于有限值 m，则二项式分布可改写为

$$\begin{aligned}p(k)&=\frac{N!}{k!(N-k)!}p^k(1-p)^{N-k}\\&=\frac{(Np)^k}{k!}\left(1-\frac{Np}{N}\right)^{N-k}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{N}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{N}\right)\end{aligned}$$

当 $N\to\infty$ 时，注意到

$$\lim_{N\to\infty}Np=m,\qquad \lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{Np}{N}\right)^{N-k}=e^{-m}$$

$$\lim_{N\to\infty}1\cdot\left(1-\frac{1}{N}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{N}\right)=1$$

由此得到

$$p(k)=\frac{m^k}{k!}e^{-m}\tag{0-12}$$

这里的概率分布即为泊松分布。k 也是离散型的随机变量，$k=1，2，3，\cdots$

注意到 $p\to 0$ 时 $Np\to m$，利用式（0-10）和（0-11）可以得到遵从泊松分布的随机变量 k 的期望值、方差和标准差分别为

$$\langle k\rangle=m,\ \sigma^2(k)=m,\ \sigma(k)=\sqrt{m}$$

可见泊松分布只有一个参数 m，它同时是分布的方差又是数学期望值。

在物理实验中，泊松分布是一种常见的分布。例如放射性物质在一定时间间隔 T 内放射性衰变的粒子数 k，便服从泊松分布。在此情况中，可把时间间隔 T 内每一个原子是否衰变看作一次试验，放射性物质的总原子数为 N，则测得衰变的粒子数可以看作是 N 次测量的总结果，而每个原子的衰变都是互相独立进行的。

3. 均匀分布

连续随机变量 x 取某一区间〔a，b〕内的任一值有相同的概率密度，其概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{当 } a\leqslant x\leqslant b\\ 0 & x \text{ 为其它值}\end{cases}$$

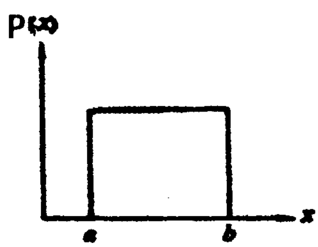


图 0-3　均匀分布概率密度函数曲线

则 x 服从均匀分布，其概率密度函数曲线如图 0－3 所示。

均匀分布的期望值和方差分别为

$$<x>=\frac{a+b}{2},\quad \sigma^2(x)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

数字仪表的读数是一种典型的均匀分布，设仪表的最小单位为 Δx，被测量值在 $\left(x_i-\frac{\Delta x}{2}\right)$ 到 $\left(x_i+\frac{\Delta x}{2}\right)$ 之间时，仪表显示的数值都是 x_i，其误差可能取 $-\frac{\Delta x}{2}$ 到 $+\frac{\Delta x}{2}$ 间的任一数值，且各个取值出现的概率均相等。此外，某些仪表使用的刻度盘或传动齿轮的回差等所产生的误差均属于均匀分布。

4. 正态分布

正态分布又称为高斯（Gauss）分布，是误差理论中最重要的分布，它是一种连续型分布，其概率密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \tag{0-13}$$

式中 x 为随机变量，μ 和 σ 为分布参数，而且 $\sigma>0$。通常用 $n(x,\mu,\sigma^2)$ 表示正态分布的概率密度函数，用 $N(x,\sigma^2,\mu)$ 表示正态分布的分布函数，即

$$n(x,\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$N(x,\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dx$$

服从正态分布的随机变量简称为正态变量，正态变量 x 的期望值、方差和标准差分别为

$$\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}xn(x,\mu,\sigma^2)dx=\mu$$

$$\sigma^2(x)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2n(x,\mu,\sigma^2)dx=\sigma^2$$

$$\sigma(x)=[\sigma^2(x)]^{1/2}=\sigma$$

参数 μ 就是正态变量的期望值，如果消除了测量时的系统误差，μ 通常就是待测物理量的真值，它决定分布的位置；σ 就是分布的标准差，它决定概率密度函数曲线的“胖”和“瘦”，即分布偏离期望值的离散程度。图 0－4 为不同参数值的正态分布概率密度函数曲线。正态密度曲线是单峰对称的，对称轴所在处（$x=\mu$）同时也是期望值和概率密度极大值所在处。

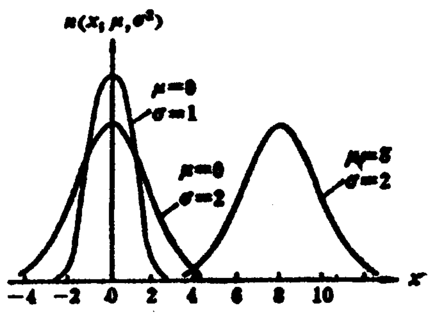


图 0－4　不同参数值的正态概率密度曲线

通常可应用正态密度函数计算随机变量 x

在某一区间（x_1，x_2）内的概率，并可由积分 $P(x_1,x_2)=\int_{x_1}^{x_2} n(x_1,\mu,\sigma^2)dx$ 求得。

为了计算的方便，往往进行变量代换。令

$$u=\frac{x-\mu}{\sigma} \tag{0-14}$$

则正态密度函数变化

$$P(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

这时随机变量 u 服从标准化正态分布，记为 n（u，0，1），它的期望值 $\mu=0$，方差 $\sigma^2=1$，相应的标准正态分布函数为

$$N(u,0,1)=P(u)=\int_{-\infty}^{u}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)du \tag{0-15}$$

正态分布之所以重要可以从以下两个定理看出，它们都可以用概率论加以证明。

定理 1　若 x_i（$i=1$，2，…，N）是互相独立的随机变量，而随机变量 $x=\sum_{i=1}^{N}x_i$，如果每一个 x_i 对总和 x 的影响都不大，则当 $N\to\infty$ 时，x 渐近地服从正态分布。

定理 2　如果随机变量 x 有期望值 $M\langle x\rangle=\mu$，方差 $\sigma^2(x)=\sigma^2$，而 $x_i=$（$i=1$，2，…，N）是随机变量 x 的 N 次独立测量值，则当 $N\to\infty$ 时，平均值 $\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$ 渐近地服从正态分布 n（$\bar{x}$，μ，σ^2/N）。

正态分布之所以重要的另一个原因是许多其它的分布在极限的条件下都趋近于正态分布。以泊松分布为例，如果期望值 m 足够大，可以证明它趋近于形式为

$$\begin{aligned}p(k)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi m}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{k-m}{\sqrt{m}}\right)^2\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi m}}\exp\left[-\frac{(k-m)^2}{2m}\right]\end{aligned} \tag{0-16}$$

的分布。如果注意到泊松分布的标准差为 $\sigma=\sqrt{m}$，那么可以看出上式与正态分布的概率密度函数公式在形式上是一样的。

5. x^2 分布

x^2 分布和下面的 t 分布是从正态分布派生出来的。在数据处理工作中，当由试验得到的随机子样对随机变量的分布参数、分布规律作分析推断时，x^2 分布和 t 分布将有重要的应用。

随机变量 x^2 的概率密度函数为

$$p(x^2,v)=\frac{1}{2^{2/v}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}(x^2)^{\frac{v}{2}-1}e^{-\frac{x^2}{2}}\quad(x^2\geqslant 0) \tag{0-17}$$

时，随机变量 x^2 服从自由度为 v 的 x^2 分布，并记作 $x^2\ (v)$，式中的 $\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)$ 是变量为 $\frac{v}{2}$ 的 Γ 函数。

随机变量 x^2 的期望值和方差分别为

$$<x^2> = v, \qquad \sigma^2\ (x^2)\ = 2v$$

可以证明，当 $v\to\infty$ 时，x^2 分布趋近于正态分布，即

$$p\ (x^2,\ v)\ \to n\ (x^2,\ v,\ 2v)$$

一般 $v>30$ 时，就可以用正态分布代替 x^2 分布。图 0－5 画出了 $\nu=6$ 的 x^2 分布概率密度曲线，图中的斜线部分的面积 $\zeta = P[x^2 \leqslant x_\zeta^2(v)] = \int_0^{x^2\zeta} x^2(\nu)dx^2$。

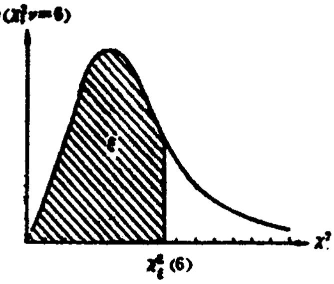


图 0－5　x^2 的概率密度曲线

ζ 值与 x_ζ^2 及 v 有关，其值可由 x^2 分布的 $x_\zeta^2\ (v)$ 数值表直接查出。

(6) t 分布

当随机变量 t 的概率密度函数为

$$p\ (t,\ v)\ = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} \quad (-\infty < t < \infty) \qquad (0-18)$$

时，随机变量 t 服从自由度为 v 的 t 分布，t 的期望值及方差分别为

$$<t> = 0,\ \sigma^2\ (t)\ = \frac{v}{v-2}\ (v>2)$$

自由度为 1 或 2 的 t 分布不存在有限的方差（方差为无穷大）。

t 分布的概率密度对于 $t=0$ 为对称分布，$v=4$ 的 t 分布概率密度曲线如图 0－6 所示。由图可见 t 分布曲线与标准正态分布曲线很相似，但 t 分布比较分散，线形较宽，当 v 增大时它们的差别变小，可以证明当 $v\to\infty$ 时，t 分布趋于标准正态分布

$$p\ (t,\ v)\ \underset{v\to\infty}{\longrightarrow} n\ (t,\ 0,\ 1)$$

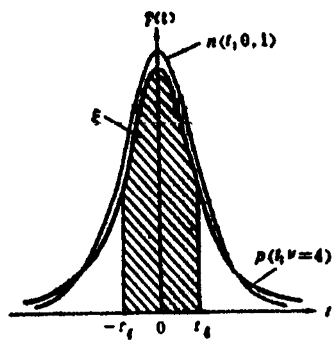


图 0－6　t 分布概率密度曲线与标准正态分布曲线

图 0－6 中带有斜线的面积在数值上等于区间 $[-t_\zeta,\ t_\zeta]$ 内的概率积分

$$\zeta = \int_{-\zeta}^{\zeta} p(t,v)dt \qquad (0-19)$$

即 t 分布在区间 $[-t_\zeta,\ t_\zeta]$ 内的概率含量为 ζ，ζ 的数值与 t_ζ 及 v 有关，ζ 值可由 t 分布的 t_ζ 数值表查得。

四、曲线拟合

在物理实验中经常要观测两个有确定关系的物理量，设

$$y=f(x_i;c_1,c_2,\cdots,c_m) \tag{0-20}$$

其中c_1，c_2，…，c_m是m个要通过实验确定的参数。进行N次测量可以得到$x-y$平面上N个数据点(x_i,y_i)，$i=1,2,\cdots,N$。在函数形式已知的情形下，如果不存在测量误差，$x-y$平面上的所有数据点都应准确地落在理论曲线上，因此我们只需从中选取m对测量值，利用它们解方程组

$$y_i=f(x_i;c_1,c_2,\cdots,c_m),\ i=1,2,3,\cdots \tag{0-21}$$

即可求出m个参数，当$N<m$时，参数是不确定的。

因观测值总有误差，使得数据点并不能准确地落在式（0-21）确定的理论曲线上，当$N>m$时，方程组（0-21）成为矛盾方程组，不能用解方程的方法求出c_1，c_2，…，c_n，只能用曲线拟合的方法，曲线拟合的任务就是要从这些带有误差的观测点求得理论曲线中参数的估计值。拟合的方法很多，下面介绍最小二乘法拟合。

1. 最小二乘法原理

设y和x两个物理量有函数关系

$$y=f(x;a_1,a_2,\cdots,a_k) \tag{0-22}$$

其中a_1，a_2，…，a_k等参数有待确定。现在欲从一批测量到的数据(x_i,y_i)（$i=1,2,\cdots,n$），按一定法则作出对这些参数a_1，a_2，…，a_k的估计。

为给出a_1，a_2，…，a_k的估计值$\hat{a}_1$，$\hat{a}_2$，…，$\hat{a}_k$，可以使用最小二乘法。其法则是：所选取的参数估值$\hat{a}_1$，$\hat{a}_2$，…，$\hat{a}_k$应使变量y的诸测量值y_i与其真值的估值（拟合值）$\hat{y}_i$即$f(x_i;\hat{a}_1,\hat{a}_2,\cdots,\hat{a}_k)$之差的平方和为最小。最小二乘法原理的数学表示形式

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i-f(x_i;\hat{a}_1,\hat{a}_2,\cdots,\hat{a}_k)]^2 \tag{0-23}$$

为最小。

2. 直线方程的参数估计

曲线拟合中最基本和最常用的是直线拟合，设Y和X二变量之间的函数关系由直线方程

$$Y=a+bX \tag{0-24}$$

给出，其中a、b是两个待定的参数。现在由X和Y的n组测量值(x_i,y_i)（$i=1,2,\cdots,n$）进行对a、b参数的估计。

设X和Y两个量中X的误差相对很小可忽略，而Y有测量误差，且是等精度测量。

按照最小二乘法原理，由式（0-23）可知，参数a、b的估计值$\hat{a}$、$\hat{b}$应使下式