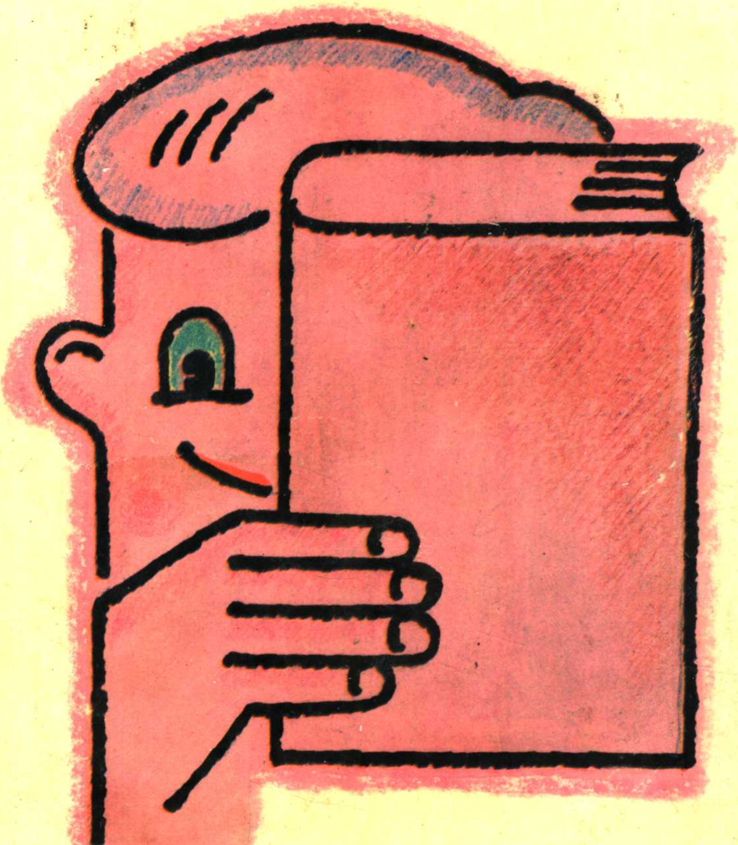
中学
数学解题精典



中学数学解题精典

三 角

人民日报出版社

(京)新登字 103 号

责任编辑：任　敏
封面设计：罗雪村

中学数学解题精典

三　角

烟学敏　刘玉翘　主编

人民日报出版社出版
天津市新华书店发行
天津北新印刷厂印刷
787×1092 毫米　32 开　31.25 印张　1045 千字
1993 年 3 月第一版　1993 年 3 月第一次印刷
印数：1—4500 册

ISBN 7-80002-563-2/G·148　定价：30.00 元

主　编　烟学敏　刘玉翘

副主编　余凤冈　王连笑　阚士刚

编　委（以下按姓氏笔划为序）

于大中	王培德	王连笑	王平梅
王毓筠	尹继民	刘玉翘	刘　勋
匡天椿	吕学林	余凤冈	李果民
李淑娟	张鼎言	张温慈	郁林生
郗昌盛	烟学敏	唐玉铎	高淑馨
徐学乾	梁汝芳	郭菊英	窦广生
阚士刚	蔡锡弟		

前　言

这套《中学数学解题精典》，是以现行中学数学教学大纲为依据，对涉及大纲中的必学内容按章、节顺序同步编纂的填补我国空白的一套大型工具书。是一大批特级、高级、一级教师多年心血的共同结晶。

为使广大中学、中专师生能够从中获益，这套大型工具书按内容分为初中代数、平面几何、高中代数（上、下）、三角、平面解析几何、立体几何共七卷。

这套大型工具书充分展现了以下几个特点：

类型全面：书中各单元均包括选择题、填空题、解答题等多种题型；

题目新颖：囊括了近十几年来国内外所见的各种最新题目；

筛选精心：在编纂过程中，精心研究了近些年全国各学校教学中和各类考试中所出现的各种题目，并从中精选出那些更具典型性、代表性、启发性的题目，使这套工具书成为当今中学数学优秀题目的精品库；

解法灵活：全书不少题给出一题多解，并注意点拨思路、启迪思维、揭示规律，使读者通过解题掌握方法和规律，从而不断提高自身的数学能力。

由于水平所限，虽经努力，但疏漏之处在所难免，欢迎读者批评指正。

编　者

1992 年 10 月

目　录

第一章 三角函数

〔知识要点〕

1. 角的概念的推广

(1) 任意角的形成：一条射线由原来的位置 OA，绕着它的端点，按逆(或顺)时针方向旋转到另一位置 OB，就形成了角 α. 射线 OA 叫做角 α 的始边，射线 OB 叫做角 α 的终边. 射线的端点 O 叫做角 α 的顶点.

(2) 正角、负角和零角：按逆时针方向旋转形成的角叫做正角. 按顺时针方向旋转形成的角叫做负角. 当一条射线没有做任何旋转，始边和终边重合时，这个角叫做零角.

(3) 任意角在直角坐标系中的放置：角的顶点与坐标原点重合，角的始边在 x 轴的正半轴上，角的终边落在第几象限就说这个角是第几象限的角，角的终边落在坐标轴上就不属于任何象限.

(4) 终边相同的角的表示：所有与 α 角终边相同的角，连同 α 角在内，用式子 $k\cdot 360^\circ+\alpha, k\in Z$ 来表示.

2. 弧度制

(1) 等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角.

(2) 用弧度制来量角，实际上是在角的集合与实数集 R 之间建立了一一对应关系.

(3) 正角的弧度数为正数，负角的弧度数为负数，零角的弧度数为零，任一已知角 α 的弧度数的绝对值 $|\alpha|=\dfrac{l}{R}$，其中 l 为以角 α 作为圆心角所对的弧长，r 为圆的半径.

(4) 角度制与弧度制之间的换算：

$1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$ 弧度 ≈ 0.01745 弧度；

1 弧度 $=\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ\approx 57.30^\circ=57^\circ18'$.

3. 任意角的三角函数.

(1) 任意角 α 终边上任意一点 P 的坐标是 (x,y)，它与原点的距离是 $r(r>0)$，那么角 α 的正弦，余弦，正切，余切，正割，余割分别是 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，$\mathrm{tg}\alpha=\frac{y}{x}$，$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{x}{y}$，$\sec\alpha=\frac{r}{x}$，$\mathrm{cse}\alpha=\frac{r}{y}$.

(2) 三角函数的定义域（见表一）.

(3) 三角函数的符号.

$\sin\alpha$、$\csc\alpha$ 第一、二象限正，第三、四象限负；

$\cos\alpha$、$\sec\alpha$ 第一、四象限正，第二、三象限负；

$\mathrm{tg}\alpha$、$\mathrm{ctg}\alpha$ 第一、三象限正，第二、四象限负.

(4) 终边相同的角的同名三角函数的值相等（公式一），

$\sin(k\cdot360^\circ+\alpha)=\sin\alpha$，$\cos(k\cdot360^\circ+\alpha)=\cos\alpha$，

$\mathrm{tg}(k\cdot360^\circ+\alpha)=\mathrm{tg}\alpha$，$\mathrm{ctg}(k\cdot360^\circ+\alpha)=\mathrm{ctg}\alpha$，$k\in Z$.

4. 同角三角函数间的基本关系式.

(1)倒数关系：$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$，$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$，$tg\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1$，

商数关系：$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$，

平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha$，$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\csc^2\alpha$.

(2)利用以上八个关系式解决有关求值，化简，证明等问题.

5. 诱导公式.

(1)（公式二）.

$\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$，　　$\cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha$，

$\mathrm{tg}(180^\circ+\alpha)=\mathrm{tg}\alpha$，　　$\mathrm{ctg}(180^\circ+\alpha)=\mathrm{ctg}\alpha$.

(2)（公式三）.

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$，　　$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$，

$\mathrm{tg}(-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha$，　　$\mathrm{ctg}(-\alpha)=-\mathrm{ctg}\alpha$.

(3)（公式四）.

$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$，　　$\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$，

$\mathrm{tg}(180^\circ-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha$，　　$\mathrm{ctg}(180^\circ-\alpha)=-\mathrm{ctg}\alpha$.

(4)（公式五）.

$\sin(360^\circ-\alpha)=-\sin\alpha$，　　$\cos(360^\circ-\alpha)=\cos\alpha$，

$\mathrm{tg}(360^\circ-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha$，　　$\mathrm{ctg}(360^\circ-\alpha)=-\mathrm{ctg}\alpha$.

6. 利用诱导公式求任意角的三角函数值的一般步骤.

(1)用公式三把任意负角的三角函数化为任意正角的三角函数.

(2)用公式一把大于360°角的三角函数化为0°到360°间的三角函数.

(3)用公式二、四、五把大于90°的角的三角函数化为0°到90°间的三角函数.

(4)得出0°到90°间的三角函数可利用特殊角的三角函数值或非特殊角的三角函数值查表即可求得.

7. 已知三角函数值求角:先根据已知三角函数值确定所求角在第几象限,再求出这个三角函数值的绝对值所对应的一个锐角,而后根据诱导公式写出符合条件的角.

8. 用单位圆中的线段表示三角函数值.

(1)角 α 的正弦线,余弦线,正切线的画法及根据.

(2)利用单位圆中的三角函数线解简单的三角不等式.

9. 三角函数的图象和性质.

(1)用几何法画 $y=\sin x, x\in[0,2\pi]$, 和 $y=\operatorname{tg}x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$的图象.

(2)用五点法即 $y=\sin x, x\in[0,2\pi]$ 的图象由五个关键点$(0,0)$; $\left(\frac{\pi}{2},1\right)(\pi,0),\left(\frac{3}{2}\pi,-1\right),(2\pi,0)$ 来确定其大致形状. 而 $y=\cos x, x\in[0,2\pi]$ 的图象由五个关键点$(0,1),\left(\frac{\pi}{2},0\right),(\pi,-1),\left(\frac{3\pi}{2},0\right),(2\pi,1)$. 来确定其大致形状,用平滑曲线连结这五个点可得到 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x, x\in[0,2\pi]$ 的简图.

(3)正弦函数和余弦函数图象间的关系,由诱导公式可知 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 图象间的关系.

(4)函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$,($A$、$\omega$、$\varphi$为常数,且 $A>0$、$\omega>0$、$\varphi\neq 0$)的图象与 $y=\sin x$ 的图象间的关系.

(5)周期函数及其周期:一般地,如果存在一个非零常数 T,使函数 $y=f(x)$ 当 x 取定义域内的每一个值时,$f(x+T)=f(x)$ 都成立,那么 $y=f(x)$ 叫做周期函数,T 叫做这个函数 $y=f(x)$ 的一个周期,如果在一个周期函数的所有周期中存在着一个最小的正数,那么这个正数叫做最小正周期.

(6) 正弦函数，余弦函数，正切函数，余切函数的性质和图象见下表一.

(7) 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$，$(A \neq 0, \omega \neq 0)$ 的周期为 $\frac{2\pi}{|\omega|}$，$y = A\cos(\omega x + \varphi)$ 的周期为 $\frac{2\pi}{|\omega|}$，$y = A\mathrm{tg}(\omega x + \varphi)$ 的周期为 $\frac{\pi}{|\omega|}$，$y = A\mathrm{ctg}(\omega x + \varphi)$ 的周期为 $\frac{\pi}{|\omega|}$.

(8) $y = |\sin x|$，$y = |\cos x|$，$y = |\mathrm{tg} x|$，$y = |\mathrm{ctg} x|$ 的周期都是 π.

表一

	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \mathrm{tg} x$	$y = \mathrm{ctg} x$
定义域	R	R	$\{x \mid x \in R$ 且 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z\}$	$\{x \mid x \in R$ 且 $x \neq k\pi, k \in Z\}$
值　域	$[-1,1]$ $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, y = 1$; $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, y = -1$	$[-1,1]$ $x = 2k\pi$, $y = 1$; $x = 2k\pi + \pi$, $y = -1$	R 无最大、最小值	R 无最大、最小值
周期性	$T = 2\pi$	$T = 2\pi$	$T = \pi$	$T = \pi$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	奇函数
单调性	在 $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ 上是增函数. 在 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$ 上是减函数 $(k \in Z)$	在 $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ 上是增函数. 在 $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ 上是减函数 $(k \in Z)$	在 $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi,)$ 上是增函数 $(k \in Z)$	在 $(k\pi, (k+1)\pi)$ 上是减函数 $(k \in Z)$

§1　角的概念的推广

选择题

1. 在直角坐标系中，若 α 与 β 的终边互为反向延长线，则 α 与 β 之间的关系一定是(　　)

$(A)\alpha=-\beta.$　　$(B)\alpha=-2k\pi+\beta(k\in Z).$

$(C)\alpha=\pi+\beta.$　　$(D)\alpha=2k\pi+\pi+\beta(k\in Z).$

〔解〕(D).

2. 如果角 α 与角 $x+\frac{\pi}{4}$ 具有同一条终边，角 β 与角 $x-\frac{\pi}{4}$ 具有同一条终边，那么 α 与 β 之间的关系是(　　)

$(A)\alpha+\beta=0.$　　$(B)\alpha-\beta=0.$

$(C)\alpha+\beta=2k\pi(\kappa\in Z).$　　$(D)\alpha-\beta=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z).$

〔解〕(D).

依题意 $\alpha=2n\pi+x+\frac{\pi}{4}(n\in Z),\beta=2m\pi+x-\frac{\pi}{4}(m\in Z)$，那么 $\alpha-\beta=2(n-m)\pi+\frac{\pi}{2}$，因为 $n-m$ 也是整数，故可用 $k(k\in Z)$ 表示，所以 $\alpha-\beta=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 故选(D).

3. 若集合 $M=\{\alpha|\alpha=4k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z\},N=\{\beta|\beta=4k\pi-\frac{3\pi}{2},k\in Z\}$，那么下列关系正确的是(　　)

$(A)M\cup N=M.$　　$(B)M=N.$

$(C)M\cap N=\phi.$　　$(D)M\cap N=N.$

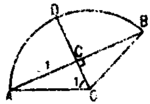
〔解〕(C).

由 $\beta=4k\pi-\frac{3\pi}{2}=4k\pi-2\pi+\frac{\pi}{2}=(2k-1)\cdot 2\pi+\frac{\pi}{2},(k\in Z)$，而 $\alpha=4k\pi+\frac{\pi}{2}=2k\cdot 2\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，显然 $M\cap N=\phi$，故选(C).

4. 已知两个弧度的圆心角所对的弦长为 2，那么这个圆心角所对的弧度是(　　)

(A)2.　　(B)sin2.　　(C) $\frac{2}{\sin 1}$.　　(D)2sin1.

【解】(C).



如图所示，$\overset{\frown}{AB}$ 含 2 弧度，过 0 点作 $OC \perp AB$ 并延长 OC 交 $\overset{\frown}{AB}$ 于 D，则 $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB} = 1$ 弧度，且 $AC = \frac{1}{2}AB = 1$. 在 $Rt\triangle AOC$ 中 $OA = \frac{AC}{\sin\angle AOC} = \frac{1}{\sin 1}$，而 $\overset{\frown}{AB}$ 的长 $l = |\alpha| \cdot R = 2 \cdot \frac{1}{\sin 1} = \frac{2}{\sin 1}$，故选(C).

填空题

5. 若集合 $A = \left\{\alpha \mid \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in Z\right\}$.
$B = \left\{\alpha \mid \alpha = k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in Z\right\}$, $C = \left\{\alpha \mid \alpha = 4k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in Z\right\}$，则 A、B、C 三个集合之间的关系是________.

【解】$B \supset A \supset C$.

因为当 B 中的 k 为偶数时，就表示集合 A，而当 A 中的 k 为偶数时，又表示集合 C，所以 $B \supset A \supset C$.

6. 角的顶点在坐标系的原点，始边与 x 轴的正半轴重合，那么终边在下列位置时角的集合分别是：

(1) 第一象限____________.

(2) 第二象限____________.

(3) 第三象限____________.

(4) 第四象限____________.

(5) x 轴正半轴____________.

(6) x 轴负半轴____________.

(7) y 轴正半轴____________.

(8) y 轴负半轴____________.

(9) x 轴____________.

(10) y 轴____________.

(11) 两坐标轴____________.

(12) 直线 $y = x$ ____________.

(13) 直线 $y = -x$ ____________.

(14) 两坐标轴及 $y = \pm x$ ____________.

〔解〕(1)$\left\{\alpha \mid 2k\pi < \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$.

(2)$\left\{\alpha \mid 2k\pi + \frac{\pi}{2} < \alpha < 2k\pi + \pi, k \in Z\right\}$.

(3)$\left\{\alpha \mid 2k\pi + \pi < \alpha < 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in Z\right\}$.

(4)$\left\{\alpha \mid 2k\pi - \frac{\pi}{2} < \alpha < 2k\pi, k \in Z\right\}$或$\{\alpha \mid 2k\pi + \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2k\pi + 2\pi, k \in Z\}$.

(5)$\{\alpha \mid \alpha = 2k\pi, k \in Z\}$.

(6)$\{\alpha \mid \alpha = (2k + 1)\pi, k \in Z\}$ 或$\{\alpha \mid \alpha = (2k - 1)\pi, k \in Z\}$.

(7)$\{\alpha \mid \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z\}$.

(8)$\{\alpha \mid \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in Z\}$,或$\{\alpha \mid \alpha = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in Z\}$.

(9)$\{\alpha \mid \alpha = k\pi, k \in Z\}$.

(10)$\{\alpha \mid \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z\}$ 或$\{\alpha \mid \alpha = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}, k \in Z\}$.

(11)$\{\alpha \mid \alpha = \frac{k\pi}{2}, k \in Z\}$.

(12)$\{\alpha \mid \alpha = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in Z\}$.

(13)$\{\alpha \mid \alpha = k\pi - \frac{\pi}{4}, k \in Z\}$.

(14)$\{\alpha \mid \alpha = \frac{k\pi}{4}, k \in Z\}$.

7. 若角α终边适合下列条件,那么角α的集合分别是:

(1) 终边在右半平面并包括 y 轴及 x 轴正半轴的一切角________.

(2) 终边在上半平面并包括y轴正半轴而不包括x轴________.

(3) 终边落在第一、三象限.

(4) 终边落在直线 $y = x$ 的上方,但不包括这条直线.

〔解〕(1)$\{\alpha \mid 2\pi k - \frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z\}$.

(2)$\{\alpha \mid 2k\pi < \alpha < 2k\pi + \pi, k \in Z\}$.

(3)$\{\alpha \mid k\pi < \alpha < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z\}$.

(4) $\{\alpha \mid 2k\pi + \frac{\pi}{4} < \alpha < 2k\pi + \frac{5\pi}{4}, k \in Z\}$.

8. (1) 若三角形三内角之比是 3 : 5 : 7，则三内角的度数分别是__________，换算成弧度数是__________.

(2) 若圆内接四边形 $ABCD$ 的四个顶点 A、B、C、D 分圆周成 $\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} : \overset{\frown}{CD} : \overset{\frown}{DA} = 4 : 3 : 8 : 5$，则四边形 $ABCD$ 的四个内角的弧度数分别是__________.

(3) 求下列各正多边形每一个内角的弧度数.

正三角形每一个内角 = __________.

正方形每一个内角 = __________.

正五边形每一个内角 = __________.

正六边形每一个内角 = __________.

正十边形每一个内角 = __________.

正 n 边形每一个内角 = __________，$(n \in Z, n \geqslant 3)$.

〔**解**〕(1) $36°, 60°, 84°, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{15}$.

(2) $\frac{11\pi}{20}, \frac{13\pi}{20}, \frac{9\pi}{20}, \frac{7\pi}{20}$.

(3) $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{5}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{5}, \frac{(n-2)\pi}{n}$.

9. 自行车大链轮有 48 齿，小链轮有 20 齿，当大链轮转过一周时，小链轮转过的角度是______度，合多少弧度______.

〔**解**〕$864°, \frac{24\pi}{5}$ **弧度**.

因为大链轮与小链轮在同一时间内转过的齿数是相同的，当大链轮转过一周时就转过了 48 个齿，小链轮同时也转过了 48 齿，是 $\frac{48}{20} = 2.4$ 周，所以小链轮转过的角度是 $360° \times 2.4 = 864°$，$\frac{\pi}{180} \times 864 = \frac{24\pi}{5}$.

10. 有小于 2π 的正角，这个角的 7 倍角的终边与该角的终边重合，则这个角是__________.

〔**解**〕$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

设这个角为 α，则

$$7\alpha = 2k\pi + \alpha, k \in Z,$$

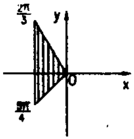
因此 $$\alpha = \frac{1}{3}k\pi, k \in Z.$$

又 ∵ $\alpha \in (0, 2\pi)$.

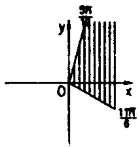
∴ 令 $k = 1, 2, 3, 4, 5$,

得 $$\alpha = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}.$$

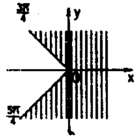
11. 用弧度制（含 π）表示顶点在原点，始边重合于 x 轴正向，终边落在阴影部分内的角的集合.



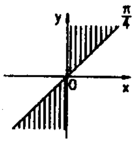
（1）



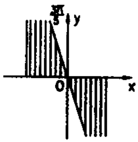
（2）



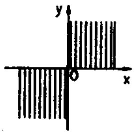
（3）



（4）



（5）



（6）

（1）__________. （2）__________. （3）__________.

（4）__________. （5）__________. （6）__________.

〔**解**〕（1）$\left\{\beta \mid 2k\pi + \frac{2\pi}{3} < \beta < 2k\pi + \frac{5\pi}{4},\quad k \in Z\right\}$.

（2）$\left\{\beta \mid 2k\pi - \frac{\pi}{6} < \beta < 2k\pi + \frac{5\pi}{12},\quad k \in Z\right\}$.

（3）$\left\{\beta \mid 2k\pi - \frac{3\pi}{4} < \beta < 2k\pi + \frac{3\pi}{4},\quad k \in Z\right\}$.

（4）$\left\{\beta \mid k\pi + \frac{\pi}{4} < \beta < k\pi + \frac{\pi}{2},\quad k \in Z\right\}$.