概率论内容提要及题解

福建省宁德师专数学科编

前　　言

为了响应党的十一届三中全会关于全党工作的着重点转移到四个现代化上来的伟大号召，我们着手教材建设工作，借以提高业务水平和教学质量；也为部分青年教师提供教学参考资料；同时考虑到能对业余自学者和中学教师有所裨益，我们编写了数学分析、高等代数、概率论的内容提要及题解.

本书系概率论部分，内容包括事件与概率，随机变量及其分布函数，随机变量的数字特征，大数定律与中心极限定理等. 本书习题主要选自王梓坤："概率论基础及其应用"，林少宫："基础概率与数理统计"，肯杰尔："高等数学习题集第三卷"，上海师大数学系应用数学组："概率初步"等书.

本书由刘卓雄、苏步萱老师编写，何师贤老师绘图.

由于我们水平不高且业余时间有限，所以不论在选题上或解题过程中都一定存在不少缺点以至错误，恳望同志们随时给予批评指教.

宁德师专数学系概率统计教研组

1980年4月

目　　录

第一章　事件与概率

§1　事件及其运算

一、内容提要：

（一）随机事件：在一定条件下必然会发生的现象称为必然事件，在一定条件下必然不发生的现象称为不可能事件．在一定条件下可能发生也可能不发生的现象称为随机事件．

（二）概率的统计定义．

1．频率：在同样条件下，把某一随机试验重复 n 次，如果在这 n 次试验中，事件 A 出现 m 次，那么我们就说，在这一随机试验中事件 A 出现的频率为 $\frac{m}{n}$．

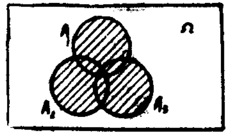
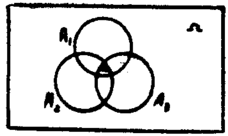
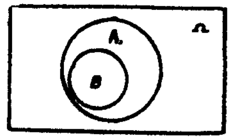
2．频率的稳定性与概率的统计定义：一个随机事件虽然有其不确定性一面，即在一次试验中，它可能发生也可能不发生，但如果我们在同样条件下重复做多次试验，将会发现随机事件出现的频率具有稳定性，即一个随机事件 A 出现的频率徘徊在某个数 $P(A)$ 附近，我们称 $P(A)$ 为事件 A 出现的概率．例如，扔一次钱币，试验结果可能出现正面，也可能不是出现正面，因此："试验结果是正面"是一随机事件，如果我们重复扔多次，将会发现正面出现的频率稳定在 $\frac{1}{2}$ 附近，因此扔一次钱币"正面"出现的概率等于 $\frac{1}{2}$．

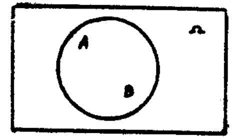
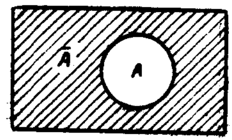
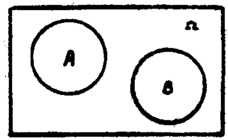
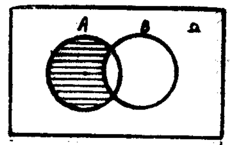
（三）随机事件运算

1．基本事件与基本事件空间：我们常常通过随机试验来

观察随机事件，以ω表示随机试验的一个可能结果，称ω为随机试验的一个基本事件，全部基本事件所组成的集合称为基本事件空间，记作Ω.

2.事件的运算：对基本事件空间中的随机事件，定义如下运算.

运算名称	符号	定义	直观图
事件之和	$A+B$ $\sum_{i=1}^{\infty}A_i$	事件A与事件B至少有一个发生. 事件$A_1, A_2, \cdots, A_n\cdots$，至少有一个发生.	
事件之积	$A\cdot B$ $\prod_{i=1}^{\infty}A_i$	事件A与事件B同时发生. 事件$A_1, A_2, \cdots, A_n\cdots$，同时发生.	
A包含B	$A\supset B$ 或 $B\subset A$	事件B发生，必然导致事件A发生.	

事件相等 （事件等价）	$A = B$	$A \subset B$ 且 $B \subset A$，即 A 发生则 B 一定发生，反之 B 发生则 A 也一定发生.	
对立事件	$\overline{A} = B$ 或 $\overline{B} = A$	A、B 两事件中必有一个出现，但不能同时出现，即 $A + B = \Omega$，$A \cdot B = \phi$（Ω 表示必然事件，ϕ 表示不可能事件）.	
互不相容	$A \cdot B = \phi$	A，B 两事件不可能同时出现.	
事件的差	$A - B$	事件 A 发生，但事件 B 不发生.	

3.事件运算的一些公式.

①$A+B=B+A$，$AB=BA$，$A-B=A\cdot\overline{B}$

②$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$

$$一般地 A\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}Bi\right)=\sum_{i=1}^{\infty}(ABi)$$

③$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$

$$一般地 \overline{\left(\sum_{i=1}^{\infty}Ai\right)}=\prod_{i=1}^{\infty}\overline{A}i$$

④$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$

$$一般地 \overline{\left(\prod_{i=1}^{\infty}Ai\right)}=\sum_{i=1}^{\infty}\overline{A}i$$

⑤$A(B-C)=AB-AC$

⑥$A+A=A$

⑦$A\cdot A=A$

⑧$A\cdot\Omega=A$

⑨$A\cdot\overline{A}=\phi$

⑩$\overline{(\overline{A})}=A$

⑪$A+\phi=A$

⑫$A\cdot\phi=\phi$

4.证明二个事件等价的三种方法.

①当A，B是由具体元素构成时，可通过写出具体元素进行比较，如例6.

②用事件相互包含方法证，如例11—例13.

③利用事件运算的一系列公式来证明，如例11—例13.

二、习题选解：

例1 如何理解下列事件是随机事件：

(1)“某民兵打靶，打中6环”；

(2) 某民兵打靶，至少打中 5 环”；

(3) “明天是阴天”；

(4) “早上 8 点至 9 点宁德师专电话机至少接到二次呼唤”；

(5) “明年夏天金涵水库的最高水位是1.05米”.

解 (1) 民兵打靶打中多少环虽然有一定必然性，但也有一定的偶然性，某民兵在一次射击中，可能恰好打中 6 环，也可能不是打中 6 环（如打中 7 环），因此“打中 6 环”这一事件可能发生，也可能不发生，故是一随机事件.

(2) “一次射击中，至少打中 5 环”这一事件可能发生也可能不发生，故也是一随机事件.

(3) 明天可能是阴天，也可能不是阴天，谁也没有绝对的把握，即“明天是阴天”这一事情可能发生，也可能不发生，故是一随机事件.

(4) 早上 8 点至 9 点宁德师专的电话机可能至少接到二次呼唤，也可能不是（例如，可能没有接到呼唤），故“早上 8 点至 9 点宁德师专的电话机至少接到二次呼唤”是一随随机事件.

(5) 明年夏天金涵水库的最高水位可能恰好是1.05米，也可能不是（例如，可能是 1 米）. 故“最高水位是1.05米”是随机事件.

例 2 试举出随机事件的几个实例.

解 以下是随机事件的几个例子.

(1) “买电影票排队等候时间是 2 分钟”.

(2) “明年我国出生的男孩子数是 1 万人”.

(3) “现在去图书馆能借到概率论的参考书”.

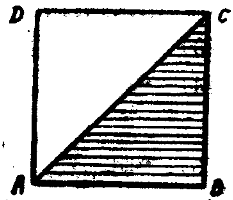
(4) “试种的某100粒种籽，全部都发芽”.

例 3 根据概率的直观意义，试指出下列随机事件出现

的概率是多大？

(1) 掷一次骰子，出现“3点”的概率是多大？

(2) 向正方形 $ABCD$ 内任意投一质点，问点子落入 $\triangle ABC$ 内的概率是多大？（图 1）



（图 1）

(3) 贫下中农从一批种籽中取出 200 粒种子进行发芽试验，测定其发芽频率．来估计一批种籽的发芽率，如已知种子的发芽率是 0.9，那么任取一粒种籽，“这粒种籽能够发芽”的概率多大？

解 (1) $P=\frac{1}{6}$ (2) $P=\frac{1}{2}$ (3) $P=0.9$

例 4 试举出事件和，事件积，…的实例.

解 三粒种籽发芽试验，以 A 表示“有种籽发芽”，A_i 表示“第 i 粒种籽发芽”（$i=1, 2, 3$）.

则 $A=A_1+A_2+A_3$

炼制某合金过程中要加入两种稀有金属：铯、铬，以 C 表示“加好了稀有金属”，A 表示“加了铯”，B 表示“加了铬”，则 $C=A\cdot B$.

以 A 表示“买到数学书”，B 表示“买到高等代数的书”则 $B\subset A$

三粒种籽试验，以 A 表示“有种籽发芽”，B 表示“三粒种籽都不发芽”则 $\overline{A}=B$

掷一次骰子，以 A 表示出现“3点”，B 表示出现“5点”，则 A 与 B 是互不相容事件.

电影院共有20排座位，A 表示“买到前 10 排的票”，B 表示“买到前 8 排的票”，C 表示“买到 9 排或10排的票”则 $C=A-B$.

例5 相互对立事件一定是互不相容事件吗？互不相容事件一定是相互对立的事件吗？

答 相互对立的事件一定是互不相容的，反之，互不相容的事件不一定是对立事件，例如，一民兵打靶，A表示"打中5环" B表示"打中3环"，A、B是互不相容事件，但不是对立事件.

例6 设有十张电影票，它们的座位分别在1排，2排…10排，"任取一张是奇数排座位"记为事件A，则A可简写为$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$，依这样写法，若

$$\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. 10\}$$
$$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$$
$$B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$C=\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

①试写出事件B、C的实际含意；写出②$A+B$；③$A-B$与$B-A$；④$A\cdot B$；⑤$\overline{A}$；⑥$\overline{\Omega}$；⑦$A\cdot(B\cdot C)$；⑧$\overline{A+B}$；⑨$A+B+C$；⑩$A+\overline{A}$；⑪$\overline{B}\cdot\overline{C}$.

解 B表示"任取一张票是前6排座位"，C表示"任取一张票是后6排座位".

$$A+B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$$
$$A-B=\{7, 9\}$$
$$B-A=\{2, 4, 6\}$$
$$A\cdot B=\{1, 3, 5\}$$
$$\overline{A}=\{2, 4, 6, 8, 10\}$$
$$\overline{\Omega}=\phi$$
$$A\cdot(B\cdot C)=\{5\}$$
$$\overline{A+B}=\{8, 10\}$$
$$A+B+C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}=$$
$$A+\overline{A}=\Omega$$

$\overline{B}\cdot\overline{C}=\phi$

例7 设 A、B、C 是基本事件空间 Ω 中的事件，它们规定如下：

$\Omega=\{x: 0\leqslant x\leqslant 20\}$ $\quad$ $A=\{x: 0\leqslant x\leqslant 5\}$

$B=\{x: 3\leqslant x\leqslant 10\}$ $\quad$ $C=\{x: 7\leqslant x\leqslant 15\}$

试求下列各事件：

(1) $A+B$ (2) $\overline{A}$ (3) $A\overline{B}$ (4) $A+(B-C)$ (5) $\overline{A+C}$ (6) $\overline{B}$

解 $A+B=\{x: 0\leqslant x\leqslant 10\}$

$\overline{A}=\{x: 5< x\leqslant 20\}$

$A\overline{B}=\{x: 0\leqslant x<3\}$

$A+(B-C)=\{x: 0\leqslant x<7\}$

$\overline{A+C}=\{x: 5<x<7$ 或 $15<x\leqslant 20\}$

$\overline{B}=\{x: 0\leqslant x<3$ 或 $10<x\leqslant 20\}$

例8 设 A、B 是基本事件空间 Ω 中的事件，它们规定如下：

$\Omega=\{(x, y): x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$

$A=\{(x, y): x\geqslant 0, 0\leqslant y\leqslant 5\}$

$B=\{(x, y): x\geqslant 0, 5\leqslant y\leqslant 10\}$

试求下列事件：

(1) $\overline{A}$ (2) $\overline{B}$ (3) $A-B$ (4) $\overline{A\cdot B}$ (5) $\overline{A}\cdot\overline{B}$ (6) $\overline{A}\cdot B$ (7) $A+\overline{B}$

解 $\overline{A}\{(x, y): x\geqslant 0, y>5\}$

$\overline{B}=\{(x, y): x\geqslant 0, 0\leqslant y<5$ 或 $x\geqslant 0, y>10\}$

$A-B=\{(x, y): x\geqslant 0, 0\leqslant y<5\}$

$\overline{A\cdot B}=\{(x, y): x\geqslant 0, 0\leqslant y<5$ 或 $y>5\}$

$\overline{A}\cdot\overline{B}=\{(x, y): x\geqslant 0, y>10\}$

$\overline{A}\cdot B=\{(x,\ y):\ x\geqslant 0,\ 5<y\leqslant 10\}$

$A+\overline{B}=\{(x,y):\ x\geqslant 0,\ 0\leqslant y\leqslant 5$ 或 $x\geqslant 0,\ y>10\}$

例 9 设 A，B 是基本事件空间 Ω 中的事件，用文字表达下列每个事件的意思.

(1) $A\cdot B$ (2) $\overline{A}B$ (3) $\overline{A}\cdot\overline{B}$ (4) $\overline{A}+\overline{B}$ (5) $\overline{A}+B$ (6) $\overline{A}\cdot A$

解 (1) 事件 A 与事件 B 同时发生；(2) 事件 B 发生，但事件 A 不发生；(3) 事件 A 与事件 B 都不发生；(4) 事件 A 与事件 B 中至少有一个不发生；(5) 事件 B 发生或事件 A 不发生；(6) 不可能事件.

例10 设 A，B，C 为任意三个事件，试写出下列关于 A，B，C 的事件表达式.

(1) 仅仅 A 发生；(2) A 和 B 都不发生但 C 发生；(3) 至少一个事件发生；(4) 至少两个事件发生；(5) 仅仅一个事件发生；(6) 仅仅两个事件发生；(7) 三个事件都不发生；(8) 不多于两个事件发生.

解 (1) $A\overline{B}\,\overline{C}$； (2) $\overline{A}\,\overline{B}C$； (3) $A+B+C$；
(4) $AB+AC+BC$； (5) $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$；
(6) $\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}$； (7) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$； (8) $\overline{ABC}$.

例11 化简下列各式

(1) $(A+C)(A+B)$； (2) $(A+B)(A+\overline{B})$；
(3) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$.

解

(1) $(A+C)(A+B)=A\cdot A+C\cdot A+A\cdot B+C\cdot B$
$=(A+CA+AB)+C\cdot B$
$=A+CB$

(2) $(A+B)(A+\overline{B})=A\cdot A+B\cdot A+A\cdot\overline{B}+B\cdot\overline{B}$
$=A+B\cdot A+A\cdot\overline{B}=A$

(3) $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$

$=A(\overline{A}+B)=A\cdot\overline{A}+A\cdot B=AB$

例12 试证明 $(A+B)(B+C)=AC+B$

证一 用事件包含方法证

$\omega\in(A+B)(B+C)\Longleftrightarrow\omega\in(A+B)$

且 $\omega\in(B+C)\Longleftrightarrow\omega\in B$，或 $\omega\in A$ 且 $\omega\in C\Longleftrightarrow\omega\in B$ 或 $\omega\in AC\Longleftrightarrow\omega\in AC+B$ 故 $(A+B)(B+C)=AC+B$.

证二 用事件运算公式证

$$
\begin{aligned}
(A+B)(B+C)&=AB+AC+B\cdot B+BC\\
&=AB+AC+B+BC\\
&=(AB+B+BC)+AC\\
&=B+AC=AC+B
\end{aligned}
$$

例13 试证 $(A+B)-AB=A\overline{B}+\overline{A}B$

证一 用事件包含方法证

$\omega\in(A+B)-AB\Longleftrightarrow\omega\in(A+B)$ 且 $\omega\overline{\in}AB\Longleftrightarrow\omega\in A$ 且 $\omega\overline{\in}B$，或 $\omega\in B$ 且 $\omega\overline{\in}A\Longleftrightarrow\omega\in A\overline{B}$ 或 $\omega\in B\overline{A}\Longleftrightarrow\omega\in A\overline{B}+B\overline{A}$ 故 $(A+B)-AB=A\overline{B}+\overline{A}B$

证二 用事件运算公式证

$$
\begin{aligned}
(A+B)-AB&=(A+B)\overline{AB}\\
&=(A+B)(\overline{A}+\overline{B})\\
&=A\cdot\overline{A}+A\overline{B}+B\overline{A}+B\overline{B}\\
&=A\overline{B}+B\overline{A}
\end{aligned}
$$

例14 试证 $(A-AB)+B=A+B$

证一 用事件包含方法证

$\omega\in(A-AB)+B\Longleftrightarrow\omega\in(A-AB)$ 或 $\omega\in B\Longleftrightarrow\omega\in A$ 且 $\omega\overline{\in}AB$，或 $\omega\in B\Longleftrightarrow\omega\in A$ 且 $\omega\overline{\in}B$，或 $\omega\in B\Longleftrightarrow\omega\in A$ 或 $\omega\in B\Longleftrightarrow\omega\in A+B$.

故 $(A-AB)+B=A+B$

证Ⅱ 用事件运算公式证

$$(A-AB)+B=A\overline{AB}+B=A\cdot(\overline{A}+\overline{B})+B$$
$$=A\overline{B}+B=A\overline{B}+(AB+B)$$
$$=A(\overline{B}+B)+B=A+B$$

例15 试证明下列各式

(1) $\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n}=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdots\overline{A_n}$

证明 用数学归纳法证

当 $n=2$时，因$\overline{A_1+A_2}=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}$，故原命题成立

假设 $n=k-1$时，命题成立，往证 $n=k$时

$\overline{A_1+A_2+\cdots+A_k}=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdots\overline{A_k}$成立.

$$\overline{A_1+A_2+\cdots+A_k}=\overline{(A_1+A_2+\cdots+A_{k-1})+A_k}$$
$$=\overline{(A_1+A_2+\cdots+A_{k-1})}\cdot\overline{A_k}$$
$$=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdots\overline{A_{k-1}}\cdot\overline{A_k}$$

故对一切自然数n，命题成立.

(2) $\overline{A_1A_2\cdots A_n}=\overline{A_1}+\overline{A_2}+\cdots+\overline{A_n}$

证明，类似（1）用数学归纳法证．（证略）

§2 古典概型

一．内容提要：

（一）古典概型的定义：

在各种随机现象中，有一类最简单但却常见的随机现象，这类随机现象有如下特征：

（1）它的所有可能的试验结果的个数是有限个，即基本事件空间Ω只包含有限个基本事件ω_1，ω_2，$\cdots\omega_n$，亦即$\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n\}$

（2）一切基本事件都是等可能性的，即$P(\omega_1)=P(\omega_2)$

$=\cdots=P(\omega_n)$ 数学上把这类随机现象称为古典型的随机现象，简称古典概型，在古典概型下，若基本事件空间包含 n 个基本事件，而一事件 A 包含 m 个基本事件，此时定义事件 A 出现的概率为：

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

（二）古典概型的概率性质.

1.对任一事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$

2.必然事件的概率为1，即 $P(\Omega)=1$

3.设事件 A_1，A_2，…，A_n 互不相容，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}Ai\right)=\sum_{i=1}^{n}P(Ai)$$

4. $P(\overline{A})=1-P(A)\qquad P(A)=1-P(\overline{A})$

（三）概率计算中“粗分”与“细分”的技巧（见例21至例24）

二、习题选解：

例16 一部四卷的文集，按任意次序放到书架上，问各卷自左向右或自右向左的卷号次序恰为1，2，3，4的概率是多少？

解 四卷书的任意一种安放次序构成一基本事件 ω，共有4！种安放次序，故基本事件空间 Ω 含有4！个基本事件.各种安放次序是等可能出现的．故 $n=4!$

“各卷自左向右或自右向左的次序恰为1，2，3，4”这一事件，由二个基本事件构成，故所求概率

$$P=\frac{2}{4!}=\frac{1}{12}$$

例17 连续掷钱币二回，求出现两次正面的概率，以下两种解法，得出不同的答案，想一想哪一个错，为什么？

解一 连续抛钱币二回，共有三种可能结果：ω_1——两次全是正面；ω_2——两次全是反面；ω_3——一正、一反，$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$，故 $n=3$，"出现两次正面"这个事件仅包含一个基本事件，所以"出现两次正面"的概率是 $\frac{1}{3}$

解二 连续抛钱币二回，共有四种可能结果：

ω_1——正正，ω_2——正反，ω_3——反正，ω_4——反反.

$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$，设$A$表示"出现二次正面"，

$A=\{\omega_1\}$，故 $P(A)=\frac{1}{4}$.

结论，解法一是错误的，因为解法一中三个事件 ω_1，ω_2，ω_3 不是等概的，如 $P(\omega_1)\neq P(\omega_3)$，这时解法一用古典概型解就不对了.

例18 一付扑克牌有红桃、黑桃、梅花、方块四种花色，每种13张，共52张，从一付洗好的牌中任取四张，求四张中至少有三张黑桃的概率.

以下二种解法，求得的答案不一样，哪一种对，为什么？

解一 从52张牌中，任取 4 张，共有C_{52}^4种取法，

$n=C_{52}^4=270,725$

"至少有三张黑桃"这一事件意味着或者有三张黑桃，或者有四张黑桃，手中四张牌恰好包含三张黑桃的取法共$C_{13}^3\cdot C_{39}^1=11,154$种，手中四张牌恰好四张全是黑桃的取法共$C_{13}^4=715$种.

因此所求概率 $P=\dfrac{11,154+715}{270,725}=\dfrac{11,869}{270,725}$

解二 所求概率的分子，按如下方法计算，先取三张黑桃的组合是$C_{13}^3=286$，第四张可以是黑桃，也可以不是黑桃，在抽取了 3 张牌以后，第 4 张可以从剩余的49张牌中选

取．于是抽四张牌至少有三张黑桃的取法共$286\times49=14,014$种．

故　所求概率$P=\dfrac{14,014}{270,725}$

结论，解法二是错误的，因为按解法二，手中有四张黑桃的情形每一种被重复计算了四次．例如，先取三张黑桃AKQ，然后从剩余的49张中刚好抽出一张黑桃J，那么就得组合AKQJ，但当先有AQJ，再从剩下的49张中抽到黑桃K，那么仍有组合AQJK，从组合观点看AKQJ与AQJK是一样的，但我们计算时重复了四次．

例19　箱中有N个产品，其中正品a个，次品$N-a$个，从箱中任取n个产品，试求"这n个产品中恰有α个正品，β个次品"的概率．（$\alpha\leqslant a$，$\beta\leqslant N-a$）．

解　这里的随机试验是自N个产品中任取n个产品，每n个产品构成一个基本事件ω，共有$\binom{N}{n}$个不同的ω，事件A"恰好有α个正品，β个次品"共含$\binom{a}{\alpha}\binom{N-a}{\beta}$个不同的$\omega$，故所求概率．

$$P(A)=\frac{\binom{a}{\alpha}\binom{N-a}{\beta}}{\binom{N}{n}}$$

例20　如果在100粒大豆中，有10粒虫豆，从这100粒大豆中随机抽取5粒．求："恰有3粒虫豆"（A）的概率是多少？"没有虫豆"（B）的概率是多少？

解　这是与例18同类型习题

$$P(A)=\frac{C_{10}^{3}\cdot C_{90}^{2}}{C_{100}^{5}}\qquad P(B)=\frac{C_{90}^{5}}{C_{100}^{5}}$$

例21　如果在100件产品中，含有2件次品．从这100件