Xianxing Daishu Fudao Yu Tigao

线性代数辅导与提高

主　编　胡建华
副主编　魏琦瑛　韩　超　芮文娟

同步学习辅导　考研复习指南

中国矿业大学出版社
China University of Mining and Technology Press

线性代数辅导与提高

主　编　胡建华
副主编　魏琦瑛　韩　超　芮文娟

中国矿业大学出版社

内容提要

本书是学习线性代数的辅导书，编写过程中主要参考了同济大学应用数学系编写的《线性代数》(第四版)等教材。全书章节的安排与同济大学教材基本相同。共分七章：行列式、矩阵、初等变换、向量、线性方程组、特征值、二次型。每章内容包括：学习指导、内容提要、疑难解答、典型例题和自测题与参考答案五个部分。

本书适用于同步学习、复习应试和备考硕士研究生(工科)，也可作为教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数辅导与提高/胡建华主编.—徐州：中国矿业大学出版社，2005.9

ISBN 7-81107-142-8

Ⅰ.线… Ⅱ.胡… Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 088124 号

书　　名 线性代数辅导与提高
主　　编 胡建华
责任编辑 杨传良
责任校对 周俊平
出版发行 中国矿业大学出版社
(江苏省徐州市中国矿业大学内　邮编 221008)
网　　址 http://www.cumtp.com　**E-mail** cumtpvip@cumtp.com
排　　版 中国矿业大学出版社排版中心
印　　刷 江苏淮阴新华印刷厂
经　　销 新华书店
开　　本 787×960　1/16　**印张** 9.75　**字数** 183 千字
版次印次 2005 年 9 月第 1 版　2005 年 9 月第 1 次印刷
定　　价 14.00 元
(图书出现印装质量问题，本社负责调换)

前　言

本书是学习线性代数的辅导书，适用于同步学习、复习应试、备考硕士研究生（工科），也可作为教师的教学参考书。编写的主要参考书有同济大学应用数学系编写的《线性代数》（第四版，高等教育出版社），江龙、魏兵编写的《线性代数》（中国矿业大学出版社）以及 2003 年全国硕士研究生入学考试大纲。

全书章节的安排与同济大学教材基本相同。其理论体系大致为：

第一章“行列式”：主要介绍行列式的概念和性质，重点解决行列式的计算问题，为行列式的应用做准备。

第二章“矩阵”：主要介绍矩阵的概念和运算，为矩阵的应用做准备。本章引入了方阵的行列式、可逆矩阵、伴随矩阵等重要概念，借助行列式的概念刻画了矩阵的一些重要性质，体现了行列式在理论上的重要价值。

矩阵与行列式是线性代数最重要的两个工具，第一章和第二章重点是这两个工具的介绍和使用，以后各章是它们的应用。

第三章“初等变换”：主要介绍初等变换的知识和应用。用初等变换的方法可以方便地求矩阵的秩、矩阵的逆和解线性方程组。矩阵的秩也是借助于行列式来定义的，它是矩阵最本质的特征。借助于矩阵的秩，在理论上建立了线性方程组有无解的判别定理，它和第五章线性方程组解的结构定理一起构成线性代数重要的基础理论，称之为方程组的求解理论。本章还介绍了等价关系这一重要概念。

矩阵秩的概念、初等变换的思想和方程组的求解理论以及等价关系将贯穿以后各章内容。

第四章“向量”：主要介绍向量的线性关系及向量空间的基本概念，其中线性相关性的判别主要依据第三章方程组解的存在定理。本章也是为第五章描述线性方程组解的结构做必要的准备。

本章属于线性代数的几何部分，主要概念是几何概念的推广。研究的方法主要是代数的方法，即把几何问题转化为代数问题来研究。

第五章“线性方程组”：主要介绍线性方程组解的结构，即解与解之间的关系、通解的表示。方程组解的结构是用几何语言来描述的。

第三章关于方程组的内容主要是解决有无解的判别及如何求解的问题，而

本章的重点是讨论方程解的结构问题，是方程组求解理论的进一步深化。这两部分的内容构成了方程组求解理论的统一整体。

第六章“特征值”：主要介绍矩阵特征值与特征向量的概念以及矩阵相似对角化的内容，其中重点是实对称矩阵的正交对角化。本章是前面几章知识的综合应用。

第七章“二次型”：主要介绍二次型化标准形的理论，是第六章实对称矩阵正交对角化的直接应用。

每章内容又包括五个部分，即学习指导、内容提要、疑难解答、典型例题、自测题与参考答案。

一、学习指导：提纲挈领地概括了该章的内容，突出了重要定理，强调了学习重点，建议了学习方法。这部分内容是每一章的“总纲”，建议读者在学习每章前先阅读“学习指导”，对本章的知识有一个总体轮廓，然后按照“学习指导”的要求进行学习，学习结束后，再回过来对照“学习指导”的要求，检查自己掌握的情况。

二、内容提要：不仅简明扼要地对本章内容作了归纳总结，而且对教材内容作了进一步剖析、讲解，并作了适当的深化和扩充，以期达到“辅导”与“提高”这两个效果。

三、疑难解答：针对读者在学习中不易理解和掌握的一些概念、方法，选编了若干个问题予以分析、解答，以帮助读者释疑解难并加深对教材的理解，这也是对第二部分“内容提要”的进一步阐释。

四、典型例题：每章列举了若干典型例题予以分析解答。例题紧扣本章内容，由浅到深排列，有最基本的概念题、计算题和证明题，也有有一定深度的综合题（包括部分历年考研题）。很多例题在求解之前有分析，在求解之后有评注，注重归纳总结解题思路，使读者可以举一反三、触类旁通。

五、自测题与参考答案：围绕本章内容选编了若干习题，并附有答案或提示，供读者作为自测练习之用，以检验所学知识的掌握程度。

由于编者水平所限，难免有缺点、错误，欢迎读者及同行批评指正。

编者

2005 年 7 月

目　录

第一章　行列式 …… 1

一、学习指导 …… 1

二、内容提要 …… 1

三、疑难解答 …… 6

四、典型例题 …… 8

自测题 …… 18

参考答案或提示 …… 19

第二章　矩阵 …… 21

一、学习指导 …… 21

二、内容提要 …… 22

三、疑难解答 …… 29

四、典型例题 …… 32

自测题 …… 41

参考答案或提示 …… 43

第三章　初等变换 …… 45

一、学习指导 …… 45

二、内容提要 …… 46

三、疑难解答 …… 50

四、典型例题 …… 52

自测题 …… 65

参考答案或提示 …… 68

第四章　向量 …… 69

一、学习指导 …… 69

二、内容提要 …… 70

三、疑难解答 …… 76

四、典型例题 …… 80
自测题 …… 90
参考答案或提示 …… 92

第五章 线性方程组 …… 94
一、学习指导 …… 94
二、内容提要 …… 94
三、疑难解答 …… 95
四、典型例题 …… 96
自测题 …… 108
参考答案或提示 …… 109

第六章 特征值 …… 111
一、学习指导 …… 111
二、内容提要 …… 112
三、疑难解答 …… 114
四、典型例题 …… 115
自测题 …… 130
参考答案或提示 …… 133

第七章 二次型 …… 135
一、学习指导 …… 135
二、内容提要 …… 136
三、疑难解答 …… 138
四、典型例题 …… 139
自测题 …… 147
参考答案或提示 …… 149

第一章 行 列 式

一、学习指导

本章内容包括：

(1) 行列式的定义；

(2) 行列式的性质；

(3) 克莱姆法则；

(4) 行列式的计算。

行列式起源于线性方程组求解，它与矩阵一起构成了线性代数两个最重要的基本工具。现在求解线性方程组几乎不用行列式的方法，而被矩阵的方法所取代。行列式的价值主要体现在理论推导上。

行列式有两种常见的等价的定义，即递归定义法和逆序数定义法。对行列式的定义只需粗略地了解。

本章主要学习行列式的计算。行列式的重要应用将在下一章学习。为了简化行列式的计算就必须研究行列式的性质。对行列式的性质重点是要学会应用，不必太多地关注其证明过程。在计算技巧上重点掌握化三角形法和递推法。不要过分地追求行列式的计算技巧。

重要定理：

(1) 行列式的展开定理；

(2) 克莱姆法则；

(3) 行列式的乘法定理。

本章只学习前两个定理，第三个定理放在下一章学习。这三个定理在以后的章节中都有等价的矩阵表示形式。

二、内容提要

1. 行列式的定义

定义 1（n 阶行列式的递归定义）

记 n 阶行列式为 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，定义 D 的值如下：

当 $n=1$ 时，定义 $D=a_{11}$；

当 $n\geqslant 2$ 时，假设对 $n-1$ 阶的行列式已有定义，记 M_{ij} 为行列式 D 中划掉第 i 行第 j 列元素而剩下的元素按原来的相对位置不变所构成的 $n-1$ 阶行列式，称为 (i,j) 元素的**余子式**，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 (i,j) 元素的**代数余子式**，定义 n 阶行列式的值为

$$D=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1}=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}A_{i1}$$

定义 2（n 阶行列式的逆序数定义）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_n)}(-1)^{\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

其中，$i_1,i_2,\cdots,i_n$ 是自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列；$\sum\limits_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$ 是对所有这样的排列求和，共有 $n!$ 项；$\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 是排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 的逆序数，其定义为：在一个排列 $i_1,\cdots,i_t,\cdots,i_s,\cdots,i_n$ 中，如果 $i_t>i_s$，则称出现一个逆序，一个排列中出现逆序的总数称为这个排列的逆序数。

注 1　定义 2 指出：n 阶行列式的值等于取自不同行不同列的 n 个元素乘积项的代数和，每项的符号由列下标排列的逆序数决定，正负号各占一半。

注 2　以上两个定义等价。（关于定义 1 的产生参阅疑难解答问题 2）

2. 行列式的性质

(1) 行列式的展开定理

记 $D=|a_{ij}|_n$，A_{ij} 为 D 的 (i,j) 元素的代数余子式，则

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}D & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases},\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}D & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases},(i,j=1,2,\cdots,n)$$

即：行列式任一行（或列）元素与其代数余子式乘积之和等于行列式的值，而与其他行（或列）元素的代数余子式乘积之和等于零。

(2) 行列式 D 与其转置行列式 D^{T} 的值相等。如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(3) 对调行列式的两行(或两列),其行列式的值变号。如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_3} - \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

(4) 行列式中如有两行(或两列)相同,则行列式的值为零。如

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

(5) 行列式中如某行(或某列)有公因子,则可把公因子提到行列式外。如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(6) 行列式中如有一行(或一列)为零,则行列式的值为零。如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

(7) 行列式中如有两行(或两列)元素对应成比例,则行列式的值为零。如

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka & kb & kc \end{vmatrix} = 0$$

(8) 把行列式的某行(或某列)的 k 倍加到另一行(或另一列)上去,行列式的值不变。如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 + kr_1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ka_{11} & a_{32} + ka_{12} & a_{33} + ka_{13} \end{vmatrix}$$

(9) 行列式中如某一行(或某一列)的元素均为两个数之和,则可把这两个数拆开,其他元素不变写成两个行列式的和。如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + a'_{21} & a_{22} + a'_{22} & a_{23} + a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3. 克莱姆法则

克莱姆(Cramer)法则 设 n 个方程的 n 元线性方程组(简称 $n\times n$ 的线性方程组)

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

的系数行列式

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0
$$

则该方程组有惟一解且解为

$$
x_1 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, x_2 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \cdots,
$$

$$
x_n = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & b_n \end{vmatrix}
$$

推论 设 $n\times n$ 的齐次线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\
\qquad\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0
\end{cases}
$$

的系数行列式 $D\neq 0$,则方程组只有零解。等价地,如果 $n\times n$ 的齐次线性方程组有非零解,则其系数行列式必等于零。

注 克莱姆法则的逆命题也成立(见第三章)。

4. 行列式的计算

(1) 对角线法则

$$
\begin{array}{cc} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ - \qquad + \end{array}, \quad
\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} a_{11} \quad a_{12} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} a_{21} \quad a_{22} \\ \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} a_{31} \quad a_{32} \\ - \quad - \quad - + \quad + \quad + \end{array}
$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

注 对角线法则只适用于二阶和三阶行列式，对四阶以上的行列式不再适用(参阅疑难解答问题 3)。

(2) 三角行列式

$$\begin{vmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & * & & d_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & & * & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{vmatrix} = d_1d_2\cdots d_n,$$

$$\begin{vmatrix} & * & & d_1 \\ & & d_2 & \\ & \iddots & & \\ d_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & d_1 \\ & & d_2 & \\ & \iddots & & \\ d_n & & * & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & d_1 \\ & & d_2 & \\ & \iddots & & \\ d_n & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} d_1d_2\cdots d_n$$

(3) 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)$$

(4) 爪形行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_2 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ y_n & & & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_n & & & x_n \\ & \ddots & & \vdots \\ & & a_2 & x_2 \\ y_n & \cdots & y_2 & a_1 \end{vmatrix} = a_2a_3\cdots a_n\left(a_1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{x_ky_k}{a_k}\right),$$

$$\begin{vmatrix} x_n & \cdots & x_2 & a_1 \\ & & a_2 & y_2 \\ & \iddots & & \vdots \\ a_n & & & y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_n & & & a_n \\ \vdots & & \iddots & \\ y_2 & a_2 & & \\ a_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} a_2a_3\cdots a_n\left(a_1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{x_ky_k}{a_k}\right)$$

(5) 分块行列式

$$\begin{vmatrix} A_m & O \\ C & B_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_m & D \\ O & B_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_m & \\ & B_n \end{vmatrix} = |A|\,|B|$$

$$\begin{vmatrix} O & A_m \\ B_n & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D & A_m \\ B_n & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & A_m \\ B_n & \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A|\,|B|$$

注 以上是用分块矩阵写的行列式,参见第二章。

三、疑难解答

问题 1 行列式与行列式的值有区别吗?

答 严格讲是有区别的,但习惯上不作区分。这类似于函数 $f(x)$ 既表示一个函数关系 f,又表示函数的值。以二阶行列式为例,行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 就是把四个数 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 映射为一个实数 $ad-bc$ 的"函数",同时也当作这个"函数"的值 $ad-bc$,即行列式的值。

问题 2 行列式的递归定义是如何产生的?

答 克莱姆求解线性方程组的思想是对每个方程乘上一个适当的数,然后把所有方程相加,希望只剩下一个未知数而其余的未知数全消掉。这就直接导出行列式的递归定义和克莱姆法则。下面以 3×3 线性方程组为例来说明(假设已有二阶行列式的定义和 2×2 方程组的克莱姆法则):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & (3) \end{cases}$$

将(1),(2),(3)式分别乘以待定常数 A_{11}, A_{21}, A_{31} 后相加,并令 x_2, x_3 的系数全为零,从而解出这三个待定常数并求出 x_1。

$$\begin{cases} a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} = 0 \\ a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$x_1 = \frac{b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}}{a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}} \quad (5)$$

为决定 A_{11}, A_{21}, A_{31},把(4)式改为

$$\begin{cases} a_{22}\dfrac{A_{21}}{A_{11}} + a_{32}\dfrac{A_{31}}{A_{11}} = -a_{12} \\ a_{23}\dfrac{A_{21}}{A_{11}} + a_{33}\dfrac{A_{31}}{A_{11}} = -a_{13} \end{cases}$$

用二阶行列式解得

$$\frac{A_{21}}{A_{11}}=\frac{\begin{vmatrix}-a_{12} & a_{32}\\ -a_{13} & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{22} & a_{32}\\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}}=\frac{-\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}},$$

$$\frac{A_{31}}{A_{11}}=\frac{\begin{vmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ a_{23} & -a_{13}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{22} & a_{32}\\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}$$

不妨令

$$A_{11}=\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},A_{21}=-\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},A_{31}=\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}$$

则 A_{11},A_{21},A_{31}满足(4)式。如果定义三阶行列式的值为

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31} \tag{6}$$

由(5)式得

$$x_1=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

如果我们能够进一步证明按(6)式所定义的行列式又满足:

$$D=\sum_{i=1}^{3}a_{i2}A_{i2}=\sum_{i=1}^{3}a_{i3}A_{i3},\sum_{i=1}^{3}a_{ij}A_{ik}=0(j\neq k)$$

实际上它们是成立的,这是行列式定义成功的关键。用与上面类似的方法可求得

$$x_2=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},x_3=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}$$

从以上分析知行列式的递归定义、行列式的展开定理以及克莱姆法则之间有着密切的联系。

问题 3 是否可按对角线法则计算高阶行列式?

答 对于二阶和三阶行列式可以用对角线法则来计算,结果与我们的定义恰好一致,此时克莱姆法则有着非常工整的表示形式。引入高阶(四阶以上)行列式的目的是推广克莱姆法则,使克莱姆法则也有如此工整的表示形式。按我们对高阶行列式的定义正好达到了这个目的。对于四阶以上的行列式如果按照对角线法则来计算,则克莱姆法则不再成立,这就没有意义了。实际上对于四阶行列

式如按对角线法则计算只有 8 项，而按行列式的定义计算有 24 项。因此，对于四阶以上的行列式不能用对角线法则来计算。

四、典型例题

1. 行列式的计算

(1) 用行列式的定义和展开定理计算

例 1 计算下面行列式

① $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$ ② $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

解 ① 连续用定义 1(即按第 1 列展开)计算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

② 按第 3 行展开计算

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= -13 - 3 \times (-11) = 20$$

例 2 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & x-2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ x & 1 & 2x & 3 \end{vmatrix}$，问 $f(x)$ 中 x^4, x^3 的系数分别是多少？

解 根据行列式的定义 2，能够出现 x^4, x^3 的项只有

$$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} \text{ 和 } - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$$

故 $f(x)=a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}-a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}+\cdots=x^3(x-2)-2x^2(x-2)+\cdots=x^4-4x^3+\cdots$，所以，$x^4, x^3$ 的系数分别是 $1, -4$。

(2) 化三角形法

例 3 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&-2&-1&4\\-1&2&-1&0\\1&-1&0&2\\2&1&1&0\end{vmatrix}$$

解

$$D\xlongequal[r_4-2r_1]{\substack{r_2+r_1\\r_3-r_1}}\begin{vmatrix}1&-2&-1&4\\0&0&-2&4\\0&1&1&-2\\0&5&3&-8\end{vmatrix}\xlongequal{r_2+r_3}\begin{vmatrix}1&-2&-1&4\\0&1&-1&2\\0&1&1&-2\\0&5&3&-8\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-5r_2]{r_3-r_2}\begin{vmatrix}1&-2&-1&4\\0&1&-1&2\\0&0&2&-4\\0&0&8&-18\end{vmatrix}\xlongequal{r_4-4r_3}\begin{vmatrix}1&-2&-1&4\\0&1&-1&6\\0&0&2&-4\\0&0&0&-2\end{vmatrix}=-4$$

注 通过此例可看出,对于任意阶的行列式只用 r_i+kr_j 类型的变换(此时行列式的值不变)就可化为三角形。这种方法具有很强的规律性,对计算阶数较高的数字行列式很方便,稍加改进就是计算机中常用的方法。

例 4 计算爪形行列式 $\begin{vmatrix}a_1&x_2&\cdots&x_n\\y_2&a_2&&\\\vdots&&\ddots&\\y_n&&&a_n\end{vmatrix}$

解 假设 $a_2a_3\cdots a_n\neq0$,化三角形

$$D\xlongequal[k=2,\cdots,n]{c_1-\frac{y_k}{a_k}c_k}\begin{vmatrix}a_1-\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{x_ky_k}{a_k}&x_2&\cdots&x_n\\0&a_2&&\\\vdots&&\ddots&\\0&&&a_n\end{vmatrix}$$

$$=a_2a_3\cdots a_n\left(a_1-\sum_{k=2}^{n}\frac{x_ky_k}{a_k}\right)$$

注 上面结果如果把 $a_2a_3\cdots a_n$ 乘到括号中可把分母 $a_2,a_2,\cdots,a_n$ 约掉,这样去掉 $a_2a_3\cdots a_n\neq0$ 的假设也成立。实际上,只需把 a_i 换成 $a_i+\varepsilon(\varepsilon\neq0)$,$\varepsilon$ 充分小时 $a_i+\varepsilon\neq0$,按上面方法推导,再令 $\varepsilon\to0$ 即可。以后对于类似情况不再说明。

例 5 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

分析 这个行列式的特点是每列除对角元不同外其他元素都相同，从第 2 列起每列减第 1 列就得到爪形行列式。

解

$$D \xlongequal[j=2,\cdots,n]{c_j - c_1} \begin{vmatrix} 1+a_1 & -a_1 & \cdots & -a_1 \\ 1 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & a_n \end{vmatrix} = a_2a_3\cdots a_n\left(1+a_1+\sum_{k=2}^{n}\frac{a_1}{a_k}\right)$$

$$= a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)$$

例 6 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

分析 此行列式的特点是所有列相加，每个元素都相等。因此第 1 列加后面各列就可以提取公因子。

解

$$D_n \xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_1 + c_i} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i - r_1} [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ & x-a & & \\ & & \ddots & \\ & & & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$