

中国古典数学名著

九章算术 今解

肖作政 编译



中国古典数学名著

《九章算术》今解

肖作政 编译

辽宁人民出版社

1990年·大连

九章算术今解

Jiu Zhang suan shu Jin jie

肖作政 编译

辽宁人民出版社出版发行(沈阳市南京街6段1里2号)
大连印刷工业总厂印刷

字数: 151,4千 开本: $787 \times 1092 \frac{1}{4}$ 印张: $7 \frac{1}{4}$
印数: 1—10,000

1990年5月第1版 1990年5月第1次印刷

责任编辑: 李文章

版式设计: 吴世贤

封面设计: 管 兴

责任校对: 王 莉

ISBN 7-205-01347-X/O·2

定价: 3.10元

前 言

传本《九章算术》约成书于纪元前后，距今已有两千多年的历史，是集春秋至秦汉间几百年中国古算之大成，编撰者不详。全书共有“方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程、勾股”九章，故名《九章算术》，计246道题。

中国科学院学部委员、著名数学家吴文俊先生说：“《九章算术》是我国古代流传下来的一部数学巨著，不仅指导着我国数学的发展达两千余年之久，而且对世界数学的发展也有不可估量的巨大影响。……我国古代数学有它自己的体系与形式，与西方之以欧几里得几何为代表的所谓公理化体系者旨趣既异，途径亦殊。《九章》与《几何原本》东西辉映，无疑是数学史上的两大传世名著，也是现代数学的两大源泉。”

《九章算术》古文意深术奥，两千年来注释考证甚多，注上加注越注越多，释中有释越释越繁，非专业工作者实难阅读，为使广大青少年朋友及数学爱好者、教育工作者能一览《九章算术》的历史概貌，本书试将《九章算术》全文今译，并做古题今解。对原文中的“术曰”亦浅予例释，以图明示读者。将《九章算术》古题今解，是一次大胆尝试，以期达到“古为今用，推陈出新”的目的。诚望读者不吝赐教。

本书编译格式是：原题（包括原答案、术曰），注释（对古文字意、名词的解释），今译（原题的白话译文），

今解（用现代数学形式解答），术释（古解、公式、法则的今译），按语（对具体问题的说明）。

为言简意赅，方便阅读，书中对魏晋时代数学家刘徽（约225~295年）及唐代数学家李淳风（602~670年）的注文均未录编。刘、李注《九章算术》于唐朝显庆元年（656年）唐高宗令为国子监算学教科书《算经十书》之一。现传有北宋元丰七年（1084年）秘书省刻本，南宋嘉定六年（1213年）鲍澹之刻本，明代永乐三年（1405年）始著《永乐大典》依据九章名义分类抄录本，清乾隆三十八年（1773年）始著《四库全书》有戴震（1724~1777年）从《永乐大典》中抄集本，1794年刊行武英殿聚珍本，商务印书馆刊行《丛书集成》本是依据武英殿本排印的，孔继涵（1737~1784年）刻微波榭丛书《算经十书》本，屈曾发于乾隆四十一年（1776年）刻《九章算术》本，还有梅启照《算经十书》本，商务印书馆的《万有文库》本，《四部丛刊》本，1932年故宫博物院影印《天禄琳琅丛书》中有影宋残本《九章算书》五卷，1963年钱宝琮校点《算经十书》本等，均可供读者深入研究阅读。

书末附文“宛田非球冠形”，译者论证了《九章算术》方田章中“宛田”的形状是优扇形田地。刘徽误注为“上径圆旁”而被中算史家据此理解为“球冠形田地”是不妥的。从而纠正了一千七百多年的历史误解（详见附文）。

本书编译过程中，承蒙全国科技史学会副理事长辽宁师范大学教授梁宗巨先生提出宝贵意见。谨致衷心感谢。

中国科学院自然科学史研究所郭书春先生，《自然科学史研究》编辑部副主任赵慧芝女士，大连数学会理事长辽宁师范大学教授王鸿钧先生，辽宁师范大学王玉阁先生，东北

地区中学数学教育教学研究会秘书长辽宁省教育学院魏超群先生，大连教育学院吕品先生，《大连教育学院院刊》编辑部主任汪文溪先生，大连教育科学研究所《大连教育》主编薛殿会先生，大连市古旧书店曲德贵先生及所有关心我对中算史研究的朋友们，都给予我很多帮助与鼓励。

中国民主促进会大连市委的领导对本书的出版也寄予热情关注。

谨此鸣谢。

肖作政

1988年2月于大连

各章题型简介

卷一方田 (共38个问题) 整数运算, 求最大公约数, 分数约分、平分及四则运算。八种平面图形土地面积的计算。

卷二粟米 (共46个问题) 二十余种粮农作物的兑换比例计算等问题。

卷三衰分 (共20个问题) 配分比例, 等比数列问题。

卷四少广 (共24个问题) 田亩面积计算。开平方、开立方问题。

卷五商功 (共28个问题) 十余种棱锥、棱柱、棱台、拟柱体及旋转体体积的计算。

卷六均输 (共28个问题) 行程、佣工及分派徭役问题。等差数列问题。

卷七盈不足 (共20个问题) 盈亏类问题 (今解做二元一次方程组)。等比数列, 等差数列问题。

卷八方程 (共18个问题) 二元至五元一次方程组及不定方程问题。

卷九勾股 (共24个问题) 应用勾股定理及相似三角形进行有关测量计算。

目 录

前 言	(1)
各章题型简介	(4)
九章算术卷第一 方田	(1)
九章算术卷第二 粟米	(28)
九章算术卷第三 衰分	(54)
九章算术卷第四 少广	(70)
九章算术卷第五 商功	(95)
九章算术卷第六 均输	(123)
九章算术卷第七 盈不足	(155)
九章算术卷第八 方程	(175)
九章算术卷第九 勾股	(197)
附文：“宛田”非球冠形	肖作政 (217)
参考文献	(221)

九章算术卷第一 方田^①

〔一〕今有田广^②十五步，从^③十六步^④。问为田几何^⑤。

答曰：一亩^⑥。

注释：① 方田。指正方形或长方形田地。《墨经》“方，柱隅四澁也。（经上）”是指几何学中的正方形或长方形之理。方形的四边名柱，四角名隅。澁假为权。〈大取篇〉谓：“权，正也。”引申为正直之义。四柱指四边为直边，四隅指四角为直角，故谓“柱隅四澁也。”李籍《音义》：“田者，围周之以为疆，横从之以为理，平夷著见，与作利养之地也。方田者，田之正也。诸田不等，以方为正，故曰方田。”

② 广。长方形的宽。李籍《音义》：“广，阔也。”

③ 从(zǒng)。长方形的长。李籍《音义》：“从，长也。”

④ 步。古时计量长度和土地面积的单位名称。古代测量土地时边长用步，面积也用步。但由于历代尺寸长短不同，一步所合尺数也各有不同。如，《史记·秦始皇本纪》中记载：“六尺为步。”唐司马贞《索隐》中记载：“《管子》《司马法》皆云六尺为步。……《王制》曰：‘古者八尺为步’。今（唐代）以周尺六尺四寸为步。”唐以后，则以五尺为步。一般说来，六尺为步的制度，周代以后一直沿用下来，唐代以后才改为五尺。《九章算术》所指的步均为1步=6尺。

⑤ 几何。李籍《音义》：“几何，数之疑也。”即，数之多少的意思。

⑥ 亩。计量土地面积的单位名称。周代的制度，一亩是一百平方步，这是小亩。秦孝公时，商鞅废井田，开阡陌，制定亩制是二百四十平方步，这是中亩。《旧唐书·食货志》有二百四十平方步为亩的记载。吴承洛著《中国度量衡史》引窦俨说：“小亩步百，周制也；中亩二百四十，汉制也；大亩三百六十，齐制也。今所用者，汉之中亩。”二百四十平方步为一亩的中亩制度，从汉至清一直没有改变。李籍《音义》：“司马法六尺为步，步百为亩。秦孝公之制，二百四十步为亩。”《九章算术》中的亩，均指1亩=240平方步。

（今译）已知长方形田地，宽15步，长16步。问这块田地的面积是多少？

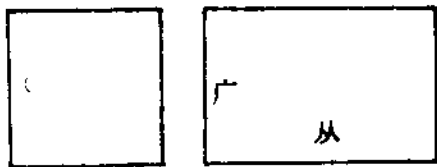


图1 方田示意图

解：1亩=240平方步

广田面积=15×16=240（平方步）=1亩

答：这块长方形田地的面积为1亩。

〔二〕今有田广十二步，从十四步。问为田几何。

答曰：一百六十八步。

方田术①曰：广从相乘得积步^{〔1〕}。以亩法②二百四十步除之，即亩数^{〔2〕}。百亩为一顷^{〔3〕}。

注释：① 术。古算书中的“术”相当于现今题的解法或解题法则、公式。

② 法。除数。“以亩为法”是以1亩的平方步数240

做除数。

（今译）已知长方形田地，宽12步，长14步。问这块田地的面积是多少？

解：广田面积 = $12 \times 14 = 168$ （平方步）

答：这块长方形田地的面积为 168 平方步。

术释：〔1〕 广田面积 = 长 $\times$ 宽。“积步”：面积的平方步数。

〔2〕 面积 + 240 平方步 = 亩数。

〔3〕 1 顷 = 100 亩。

〔三〕 今有田广一里①，从一里。问为田几何。

答曰：三顷七十五亩。

注释：① 里。计量长度和土地面积的单位名称。《大戴礼记》中记载：“三百步为里。”周代六尺为步，里是一百八十丈。唐以后五尺为步，直至宋、明，里都是三百六十步，也是等于一百八十丈。清代规定，里是长度系统中的单位，它的长度也定为一百八十丈。

里做为地积单位，叫做平方里，清代称为方里。周代制度是一井等于一平方里，合九百亩；唐以后由于五尺为一步，所以一平方里合五百四十亩。清《数理精蕴》中记载：“方里，积五百四十亩。”《九章算术》中所指的里为 300 步，1 亩 = 240 平方步，所以一平方里为三百七十五亩。

（今译）已知长方形田地，宽 1 里，长 1 里。问这块田地的面积是多少？

解：1 里 = 300 步 1 亩 = 240 平方步 1 顷 = 100 亩

广田面积 = $(300 \times 300) + 240 = 375$ （亩） = 3 顷 75 亩

答：这块长方形田地的面积是 3 顷 75 亩。

（按）由此题解可知：1 平方里 = 375 亩。

〔四〕 又有田广二里，从三里。问为田几何。

答曰：二十二顷五十亩。

里田^① 术曰：广从里数相乘得积里^{〔1〕}。以三百七十五乘之，即亩数^{〔2〕}。

注释：① 里田。边长以里做单位计算的长方形田地。

1 平方里 = 375 亩。

〔今译〕 已知长方形田地，宽 2 里，长 3 里。问这块田地的面积是多少？

解：1 平方里 = 375 亩

广田面积 = $2 \times 3 \times 375 = 2250$ (亩) = 22 顷 50 亩

答：这块长方形田地的面积为 22 顷 50 亩。

术释：〔1〕 边长以里做单位的长方形田地面积 = 长 × 宽，所得以平方里为单位的面积。

〔2〕 将所得平方里为单位的面积乘 375 亩，即为所求的亩数。

〔五〕 今有十八分之十二。问约之^① 得几何。

答曰：三分之二。

注释：① 约之。约分，约成既约分数。

〔今译〕 将 $\frac{12}{18}$ 约分，所得既约分数是多少？

解：
$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 12, \underline{18}} \\ 3 \overline{) 6, \underline{9}} \\ 2, \underline{3} \end{array}$$
 $2 \times 3 = 6, 6 \text{ 是 } 12 \text{ 与 } 18 \text{ 的最大公约数, 所以 } \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

答： $\frac{12}{18}$ 的既约分数是 $\frac{2}{3}$ 。

〔六〕 又有九十分之四十九。问约之得几何。

答曰：十三分之七。

约分术曰：可半者半之^{〔1〕}，不可半者，副置^① 分母于

之数，以少减多，更相减损，求其等也⁽²⁾。以等数^③约之⁽³⁾。

注释：① 置。中国古代的计算工具叫“算筹”。算筹一般是用一些小竹棍或骨棍等制做的。计算时，将算筹摆放在计算的盘子上，叫“置”。“副置”是在运算过程中，需要插算，为不打乱原筹算的列式，而另摆算筹计数或演算。李籍《音义》：“副置，设也。别设算位，有所分也。”

② 等数。最大公约数的古称。

(今译) 将 $\frac{49}{91}$ 约分，所得既约分数是多少？

解： $7 \overline{) 49, 91}$ 7 是 49 与 91 的最大公约数，所以 $\frac{49}{91} = \frac{7}{13}$
7, 13

答： $\frac{49}{91}$ 的既约分数是 $\frac{7}{13}$ 。

约分术例释：（以卷一〔六〕题为例）

〔1〕 可半者半之：若分子、分母均为偶数时，可先被 2 除。

〔2〕 不可半者，……更相减损，求其等也。

$ \begin{array}{r} 91 \quad 49 \\ (91 - 49 =) 42 \\ (42 - 7 =) 35 \\ (35 - 7 =) 28 \\ (28 - 7 =) 21 \\ (21 - 7 =) 14 \\ (14 - 7 =) 7 \end{array} $	$7 (= 49 - 42)$ 欲求 49 与 91 的最大公约数，将两数分列左右，先由 91 减 49 余 42，再由 42 减 42 余 7，更由 42 减 7 五次余 7，则左右所余相等。这相等的余数 7 就是 49 与 91 的最大公约数。
--	---

〔3〕 以等数约之：用7对 $\frac{49}{91}$ 进行约分，所得 $\frac{7}{13}$ 为既约分数。

（按）“更相减损术”（见〔2〕）是中国古代求最大公约数的一个伟大创举。这种辗转相减求最大公约数的方法，与欧几里得《几何原本》卷7第1题所论相同，但确系各自独创。

〔七〕 今有三分之一，五分之二。问合之得几何。

答曰：十五分之十一。

（今译）今有 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{2}{5}$ 。问相加得多少？

$$\text{解：} \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}$$

答：和为 $\frac{11}{15}$ 。

〔八〕 又有三分之二，七分之四，九分之五。问合之得几何。

答曰：得一、六十三分之五十。

（今译）今有 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{4}{7}$ 、 $\frac{5}{9}$ 。问相加得多少？

$$\text{解：} \frac{2}{3} + \frac{4}{7} + \frac{5}{9} = 1\frac{50}{63}$$

答：和为 $1\frac{50}{63}$ 。

〔九〕 又有二分之一，三分之二，四分之三，五分之四。问合之得几何。

答曰：得二、六十分之四十三。

合分术①曰：母互乘子，并以为实〔1〕，母相乘为法〔2〕，

实如法而一〔3〕。不满法者，以法命之〔4〕，其母同者，直相从之〔5〕。

注释：① 合分术。分数加法运算法则。

（今译）今有 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{4}{5}$ 。问相加得多少？

$$\text{解：} \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} = 2\frac{43}{60}$$

答：和为 $2\frac{43}{60}$ 。

合分术例释：（以卷一〔八〕题为例）

〔1〕 母互乘子： $2 \times 7 \times 9 = 126$ ， $4 \times 3 \times 9 = 108$ ， $5 \times 3 \times 7 = 105$ ，并以为实： $126 + 108 + 105 = 339$ 实：指被除数，即，以 339 为被除数。

〔2〕 母相乘为法： $3 \times 7 \times 9 = 189$ 为除数。

〔3〕 实如法而一，在被除数中，凡够等于除数的部分，则进为整数 1（如 339 中就可提出一个 189）。亦说为商。

〔4〕 不满法者，以法命之：在被除数中把 $339 - 189 = 150$ 做为余数，150 又做分子，189 做分母，组成真分数部分，约分后为 $\frac{50}{63}$ 。于是，该题运算结果为 $1\frac{50}{63}$ 。

〔5〕 其母同者，直相从之：同分母时分子相加即可。

〔十〕 今有九分之八，减其五分之一。问余几何。

答曰：四十五分之三十一。

（今译）今有 $\frac{8}{9}$ ，减去 $\frac{1}{5}$ 。问差是多少？

$$\text{解：} \frac{8}{9} - \frac{1}{5} = \frac{31}{45}$$

答：差为 $\frac{31}{45}$ 。

〔十一〕 又有四分之三，减其三分之一。问余几何。

答曰：十二分之五。

减分术^①曰：母互乘子，以少减多，余为实⁽¹⁾，母相乘为法⁽²⁾，实如法而一⁽³⁾。

注释：① 减分术。分数减法运算法则。

（今译）今有 $\frac{3}{4}$ ，减去 $\frac{1}{3}$ 。问差是多少？

$$\text{解：} \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

答：差为 $\frac{5}{12}$ 。

减分术例释：（以卷一〔十〕题为例）

〔1〕 母互乘子：分母与分子交叉相乘。即 $5 \times 8 = 40$ ， $1 \times 9 = 9$ 。

以少减多：从多的数里减去少的。即， $40 - 9 = 31$ 。余为实：即31为被除数（分子）。

〔2〕 母相乘为法：分母相乘为除数。即， $9 \times 5 = 45$ 为除数（分母）。

〔3〕 实如法而一：所得的商。即 $\frac{31}{45}$ 。

〔十二〕 今有八分之五，二十五分之十六。问孰多，多几何。

答曰：二十五分之十六多，多二百分之三。

（今译）比较 $\frac{5}{8}$ 与 $\frac{16}{25}$ 。问哪个分数多？多多少？

$$\text{解：} \frac{16}{25} = \frac{16 \times 8}{25 \times 8} = \frac{128}{200} \quad \frac{5}{8} = \frac{5 \times 25}{8 \times 25} = \frac{125}{200}$$

$$\text{因为 } \frac{128}{200} > \frac{125}{200} \quad \text{所以 } \frac{16}{25} > \frac{5}{8} \quad \frac{16}{25} - \frac{5}{8} = \frac{3}{200}$$

答：\$\frac{16}{25}\$ 比 \$\frac{5}{8}\$ 多，多 \$\frac{3}{200}\$。

〔十三〕 又有九分之八，七分之六。问孰多，多几何。

答曰：九分之八多，多六十三分之二。

（今译）比较 \$\frac{8}{9}\$ 与 \$\frac{6}{7}\$。问哪个分数多？多多少？

$$\text{解：} \frac{8}{9} = \frac{56}{63} \quad \frac{6}{7} = \frac{54}{63} \quad \frac{8}{9} - \frac{6}{7} = \frac{2}{63}$$

$$\text{因为 } \frac{56}{63} > \frac{54}{63} \quad \text{所以 } \frac{8}{9} > \frac{6}{7}$$

答：\$\frac{8}{9}\$ 比 \$\frac{6}{7}\$ 多，多 \$\frac{2}{63}\$。

〔十四〕 又有二十一分之八，五十分之十七。问孰多，多几何。

答曰：二十一分之八多，多一千五十分之四十三。

课分术^①曰：母互乘子，以少减多，余为实^{〔1〕}，母相乘为法^{〔2〕}，实如法而一。即相多也^{〔3〕}。

注释：① 课分术。比较分数大小的运算法则。李籍《音义》：“课分，校也。欲知其相多，分各异名，理不齐一，校其多之数，故曰课分。”

（今译）比较 \$\frac{8}{21}\$ 与 \$\frac{17}{50}\$。问哪个数多，多多少？

$$\text{解：} \frac{8}{21} = \frac{400}{1050} \quad \frac{17}{50} = \frac{357}{1050}$$

$$\text{因为 } \frac{400}{1050} > \frac{357}{1050} \quad \text{所以 } \frac{8}{21} > \frac{17}{50}$$