

沪科课标版

保护版权
抵制盗版
安徽教育出版社

资源型学案

zìyuánxíng xué'àn
(七年级·下)
初中数学

本套书被评为“全国优秀畅销书”



安徽教育出版社

(沪科课标版)

资源型学案

Signalling system

初中数学

(七年级 · 下)

主编：苏 扬

编者：李德山 张栋宇

梅 圣

姓名 _____

_____ 年级 _____ 班

我喜欢的名言:_____

■ 安徽教育出版社

电子信箱:yibs@ahep.cn

图书在版编目 (CIP) 数据

资源型学案. 初中数学. 七年级. 下: 沪教课标版/苏扬
主编. —合肥: 安徽教育出版社, 2005. 12
ISBN 7-5336-4589-8

I. 资... II. 苏... III. 数学课—初中—教学参考
资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 144372 号

责任编辑: 张静梅 装帧设计: 锁 钢 王为民
出版发行: 安徽教育出版社 (合肥市跃进路 1 号)
网 址: <http://www.ahep.com.cn>
经 销: 新华书店
排 版: 安徽飞腾彩色制版有限责任公司
印 刷: 合肥晓星印刷厂
开 本: 787×1092 1/16
印 张: 8.75
字 数: 185 000
版 次: 2006 年 1 月第 1 版 2006 年 1 月第 1 次印刷
定 价: 10.30 元

发现印装质量问题, 影响阅读, 请与我社发行部联系调换
电 话: (0551) 2822632 邮 编: 230063



写给同学们的话

本套书按照现行教材体系编写,力图贯彻《课程标准》精神,努力挖掘课程资源,提高学生的综合素质,主要栏目如下:

范例下载 典型例题讲解,分析解题思路,总结数学思想方法,突出重点,抓住难点,注意数学知识的拓展与延伸.

基础扫描 设计多道练习题供同学们训练,巩固所学知识点,以求达到拓展思维、提高解题技巧和能力,促进同学们主动地、有个性地学习.

能力拓展 在基础训练的基础上,设计几道具有创新意识的习题供同学们探索,以求达到培养同学们的探究能力,提高解题水平.

学生资源库 以生活、生产实践为主题,提供相关背景知识,丰富课程资源,扩大同学们的视野,培养同学们科学态度,提高同学们解决问题的能力.

总之,这套书一定会给你带来希望,带来成功.祝同学们在知识的攀登中更上一层楼.

同学们在使用中有什么想法和建议,请与我们联系.我们的邮箱地址是:yibs@ahep.cn.





目 录

<<<<<<<<

第六章 实数	1
总览全章	1
各个击破	1
§ 6.1 平方根、立方根(1)平方根	1
§ 6.1 平方根、立方根(2)立方根	3
§ 6.2 实数(1)	5
§ 6.2 实数(2)	7
融会贯通	9
本章过关测试卷	11
第七章 一元一次不等式与不等式组	13
总览全章	13
各个击破	13
§ 7.1 不等式及其基本性质	13
§ 7.2 一元一次不等式(1)	15
§ 7.2 一元一次不等式(2)	17
§ 7.2 一元一次不等式(3)	19
§ 7.3 一元一次不等式组(1)	21
§ 7.3 一元一次不等式组(2)	23
融会贯通	26
本章过关测试卷	29
第八章 整式乘除与因式分解	32
总览全章	32
各个击破	32
§ 8.1 幂的运算(1)同底数幂的乘法	32
§ 8.1 幂的运算(2)幂的乘方与积的乘方(1)	34
§ 8.1 幂的运算(2)幂的乘方与积的乘方(2)	36
§ 8.1 幂的运算(3)同底数幂的除法(1)	37
§ 8.1 幂的运算(3)同底数幂的除法(2)	38
§ 8.1 幂的运算(4)科学记数法	39
§ 8.2 整式乘法(1)单项式与单项式相乘	40



§ 8.2 整式乘法(2)单项式与多项式相乘	42
§ 8.2 整式乘法(3)多项式与多项式相乘	44
§ 8.3 平方差公式与完全平方公式(1)平方差公式	46
§ 8.3 平方差公式与完全平方公式(2)完全平方公式	48
§ 8.4 整式除法(1)单项式除以单项式	50
§ 8.4 整式除法(2)多项式除以单项式	52
§ 8.5 因式分解(1)提公因式法	54
§ 8.5 因式分解(2)公式法	55
§ 8.5 因式分解(3)	57
融会贯通	58
本章过关测试卷	62
第九章 分式	64
总览全章	64
各个击破	64
§ 9.1 分式及其基本性质(1)	64
§ 9.1 分式及其基本性质(2)	66
§ 9.2 分式的运算(1)	68
§ 9.2 分式的运算(2)	70
§ 9.3 分式方程(1)	72
§ 9.3 分式方程(2)	74
融会贯通	77
本章过关测试卷	78
第十章 相交线、平行线与平移	81
总览全章	81
各个击破	81
§ 10.1 相交线	81
§ 10.2 平行线的判定(1)	84
§ 10.2 平行线的判定(2)	86
§ 10.3 平行线的性质	89
§ 10.4 平移	91
融会贯通	93
本章过关测试卷	96
第十一章 数据的集中趋势	100
总览全章	100
各个击破	100
§ 11.1 平均数	100





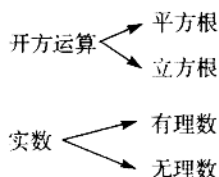
§ 11.2 中位数与众数	103
§ 11.3 从部分看总体	106
融会贯通	108
本章过关测试卷	112
参考答案或提示	116



第六章 实数



总览全章



各个击破

6.1.5 平方根、立方根 (1) 平方根



学标聚焦

1. 了解数的算术平方根的概念, 会用根号表示一个数的算术平方根; 了解数的平方根的概念, 会用根号表示一个数的平方根; 理解算术平方根与平方根的区别和联系.
2. 理解一个正数的平方根有两个、负数没有平方根; 了解开方与乘方是互逆运算关系, 会利用这个互逆运算关系求某些非负数的平方根.
3. 会用计算器求平方根.



范例下载

例1 下列表示正确的是().

- A. 4 是 16 的算术平方根, 即 $\pm\sqrt{16}=\pm 4$
- B. 8 是 $(-8)^2$ 的算术平方根, 即 $\sqrt{(-8)^2}=8$
- C. $\sqrt{6}$ 是 6 的算术平方根, 即 $\sqrt{6}=6$
- D. 25 的算术平方根是 5, 即 $\sqrt{25}=\sqrt{5}$

分析 一个非负数的算术平方根只有一个, 且仍然是非负数, 故 A 错误; “ $\sqrt{6}=6$ ”与“ $\sqrt{25}=\sqrt{5}$ ”显然是错误的, 不可能相等; $(-8)^2$ 是 64, 而 $8^2=64$.

算术平方根是一个很重要的概念, 能否用数学符号正确地表示一个数的算术平方根, 则反映了对概念的理解程度.



解 B.

例2 小林在求 169 的平方根时,这样写结论:“所以 169 的平方根是 ± 13 , 即 $\sqrt{169} = \pm 13$ ”.

他的结论写得对吗? 说说你的理由.

解 小林的结论写得不对, $\sqrt{169}$ 只表示 169 的算术平方根, 而不能表示 169 的平方根, 169 的平方根应用“ $\pm \sqrt{169}$ ”表示, 正确的写法是: 169 的平方根是 ± 13 表示为: $\pm \sqrt{169} = \pm 13$.

误用 $\sqrt{x}$ 表示 x 的平方根, 是不少同学易犯的错误, 应该避免.



课后冲浪

●基础扫描

1. 由 $(0.5)^2 = 0.25$ 可知, 下列说法中正确的是().

① 0.5 的平方是 0.25; ② 0.25 是 0.5 的算术平方根; ③ 0.5 是 0.25 的算术平方根

A. ①② B. ①③ C. ②③ D. ①②③

2. 下列表示错误的是().

A. 7 的平方是 49, 即 $7^2 = 49$ B. 36 的算术平方根是 6, 即 $\sqrt{36} = 6$
C. 64 的算术平方根是 8, 即 $\sqrt{64} = 8$ D. 81 的算术平方根是 9, 即 $\sqrt{81} = \sqrt{9}$

3. 平方根等于它本身的数是().

A. 0 B. 1, 0 C. 0, 1, -1 D. 0, -1

4. 填空: (1) $\sqrt{121} = \underline{\hspace{2cm}}$; (2) $\sqrt{0.81} = \underline{\hspace{2cm}}$; (3) $\sqrt{\frac{25}{196}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 求下列各数的算术平方根:

$81, \frac{9}{16}, 4\pi^2, 0.36, 0.0064$.

6. 求下列各数的平方根:

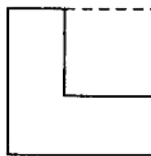
$49, 2, 25, \frac{25}{49}, 10^{-6}, 23$.

●能力拓展

7. 求满足下列各式的未知数 x :

(1) $x^2 = 1.21$; (2) $16x^2 - 81 = 0$.

8. 如图, 在一块正方形白铁皮的右上角剪去一个边长是 3 cm 的小正方形, 若余下的铁皮面积为 16 cm^2 , 求这块正方形铁皮原来的边长.



第 8 题图





6.1.5 平方根、立方根(2) 立方根



学标聚焦

1. 了解立方根的概念, 会用根号表示一个数的立方根; 能用立方运算求某些数的立方根, 了解开立方与立方互为逆运算.

2. 会用计算器求立方根.



范例下载

例1 求下列各式中 x 的值:

$$(1) x^3 = -0.125; (2) \sqrt[3]{x} = \frac{3}{4}; (3) \sqrt{x^2} = \sqrt{2}.$$

分析 本题主要考查立方根的概念, 因此解答时要紧扣立方根的概念: 如果 $x^3 = a$, 那么 x 是 a 的立方根.

解 (1) 因为 $(-0.5)^3 = -0.125$, 所以由 $x^3 = -0.125$ 得

$$x = \sqrt[3]{-0.125} = -0.5;$$

$$(2) \text{ 因为 } \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}, \text{ 所以由 } \sqrt[3]{x} = \frac{3}{4} \text{ 得 } x = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64};$$

$$(3) \text{ 由 } \sqrt{x^2} = \sqrt{2}, \text{ 得 } x^2 = (\sqrt{2})^2 = 2, \text{ 所以 } x = \pm\sqrt{2}.$$

例2 把一个棱长为 $10\sqrt{2}$ cm 的立方体金属块切割成体积相等的两部分, 然后把每一部分锻造成一个小立方体金属块且两金属块形状相同, 求这两个小立方体金属块的棱长.

解 设这两个小立方体金属块的棱长分别为 a cm、 b cm,

$$\text{由题意得 } a^3 = b^3 = \frac{1}{2} (10\sqrt{2})^3 = 1000,$$

$$\text{所以 } a = b = \sqrt[3]{1000} = 10(\text{cm}).$$

答: 这两个小立方体金属块的棱长为 10 cm.

如果说本题中的(1)是从正面直接考查立方根的概念, 那么(2)、(3)两小题则是从反面考查立方根的概念. 从本题的解答中我们不难得到下面的结论: 已知一个数的立方, 求这个数, 则开立方; 若已知一个数的立方根, 求这个数, 则应将这个数进行立方运算. 前者开方, 而后者乘方.

如果两个数相等, 那么这两个数的立方根也相等. 你知道这是为什么吗? 如果两个正数相等, 它们的平方根也相等吗? 它们的算术平方根呢? 你能用符号语言表述出来吗? 试试看.



课后冲浪

●基础扫描

1. 求下列各数的立方根:

$$729, \quad -27, \quad -\frac{64}{343}, \quad 0.216.$$

2. 下列说法正确的是().

A. 4 的平方根是 2

B. -8 没有立方根

C. 64 的立方根是 ± 4

D. -27 的立方根是 -3



3. 下列说法及表示方法中正确的有().

①6.4的立方根是0.4,即 $\sqrt[3]{6.4}=0.4$;②27的立方根是 ± 3 ,即 $\pm \sqrt[3]{27}=\pm 3$;

③-1的立方根是-1,即 $\sqrt[3]{-1}=-1$

A. 都不正确 B. 1个 C. 2个 D. 3个

4. 求下列各式的值:

(1) $\sqrt[3]{-\frac{8}{125}}$; (2) $\sqrt[3]{1000}$; (3) $\sqrt[3]{(0.064)^3}$; (4) $(\sqrt[3]{-\frac{3}{7}})^3$.

5. 分别求出下列各数的平方根和立方根:

(1)16; (2)0.064; (3) $-\frac{13}{17}$.

6. 根据下列表格中所给的信息填空:

被开方数	1				
平方根				0	
算术平方根		4			
立方根			-3		$\sqrt[3]{5}$

●能力拓展

7. 一个等边圆柱(高与底面直径相等)的体积为 $1458\pi \text{ cm}^3$,求它的表面积(圆柱体的体积=底面积 $\times$ 高,结果保留 π).

8. 小明买了一箱苹果,装苹果的纸箱的尺寸为 $50 \times 40 \times 30$ (单位:cm).现小明要将这箱苹果分装在两个大小一样的正方体纸箱内,问这两个正方体纸箱的棱长为多少厘米?





6.25 实数(1)



学标聚焦

了解实数的意义,能对实数按要求进行分类.



范例下载

例1 下列说法正确的是().

- A. 不循环小数是无理数
- B. 无限小数是无理数
- C. 小数都是无理数
- D. 小数既可能是有理数,也可能是无理数

分析 2.316 是不循环小数,它是无理数吗?显然不是,它是有限小数,是有理数;0.66...是无限小数,但它是无限循环小数,也是有理数;2.316 和 0.66...都是小数,却都不是无理数,显然 C 不成立.

解 D.

例2 (1)设面积为 17 的正方形的边长为 b , b 是有理数吗?说说你的理由.

(2)估计 b 的值(结果精确到十分位),并用计算器验证你的估计值.

(3)如果结果精确到百分位呢?

分析 想一想,正方形的面积如何计算?

解 (1) b 不是有理数,因为 $4^2=16$, $5^2=25$, 17 在 16 与 25 之间,而 4 与 5 之间已没有整数,所以 b 不可能是整数;若 b 是分数,相同的 2 个分数相乘,其结果仍然是分数,而不可能是整数 17,即 b 不可能是有理数.

(2)由计算器计算知, $2.0^3=8.0$, $2.1^3 \approx 9.26$, 因此,若结果精确到十分位, b 的值约为 2.0~2.1.

(3)同(2),因为 $2.08^3 \approx 8.999$, $2.09^3 \approx 9.130$, 因此,若结果精确到百分位, b 的值约为 2.08~2.09.

例3 现有四个无理数: $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, 其中在 $\sqrt{2}+1$ 和 $\sqrt{3}+1$ 之间的有().

- A. 1 个
- B. 2 个
- C. 3 个
- D. 4 个

分析 先将 $\sqrt{2}+1$, $\sqrt{3}+1$ 的值估算出来,再与 $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$ 比较:

$\sqrt{2}+1$ 的值在 2.4 与 2.42 之间,而 $2.4^2=5.76$, $2.46^2=6.0516$, 因此,

$\sqrt{2}+1$ 的值在 $\sqrt{5}$ 与 $\sqrt{6}$ 之间;

$\sqrt{3}+1$ 的值在 2.7 与 2.75 之间,而 $2.7^2=7.29$, $2.84^2=8.0656$, 因此,

$\sqrt{3}+1$ 的值在 $\sqrt{7}$ 与 $\sqrt{8}$ 之间;

无论是有限小数,还是无限循环小数,都可以化成分数形式,即有理数都可以写成分数形式,而无理数则不可以,因此能否化成分数形式可以用来作为判断一个数是否为有理数的标准.

这里的分析用了逐步逼近的方法,后面还要用到,注意体会.注意:

计算器是采用逐步逼近方法的好帮手.不要忘了哦!

估算带根号的无理数值的方法:依据题目要求的精确度,选择有理数,使其平方最接近要估算的无理数,即:用乘方估算开方.如要估算 $\sqrt{5}$ 的值,就可以考虑 5 在 4 与 9 之间亦即 2^2 与 3^2 之间;再考虑 2.1^2 与 2.2^2 ; 2.3^2 与 2.4^2 ...

通过计算,依据精确度要求而设定位数的小数的平方越来越接近 5,从而估算出 $\sqrt{5}$ 的近似值.



综上所述,比 $\sqrt{2}+1$ 大而比 $\sqrt{3}+1$ 小的数只有 $\sqrt{6}, \sqrt{7}$.

解 B.



课后冲浪

●基础扫描

1. 下列各数中,是无理数的有().

- ① 2π ; ② $\frac{3}{7}$; ③2.009; ④-6.11121314...192021... (小数部分由相继的正整数组成);

⑤1.209; ⑥ $-\frac{13}{27}$

A. ①④⑤

B. ②⑤⑥

C. ①④

D. ③⑥

2. 下列说法错误的是().

A. 面积为15的正方形的边长是无理数

B. 体积为27的正方体的棱长是无理数

C. 半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆的周长是无理数

D. 半径为1的圆的面积是无理数

3. 下列各数中,是无理数的是().

A. $\frac{3}{2}$

B. $\sqrt{16}$

C. 0.3

D. $\frac{\pi}{2}$

4. 下列各数中,哪些是有理数,哪些是无理数?

$\sqrt{5}, 3.1415926, \sqrt[3]{49}, 9.2\dot{0}7, \sqrt[3]{-64}, 0.2.353553555\cdots$ (每两个3之间的5的个数依次增加1个).

●能力拓展

5. 用计算器算一算, $\frac{17}{19}$ 精确到千分位是多少? 精确到亿分位呢? $\frac{17}{19}$ 是无限不循环小数吗? 为什么? 说说你的理由.

6. (1) 设面积为 15π 的圆的半径为 a , a 是有理数吗? 说说你的理由.

(2) 估计 a 的值(结果精确到百分位),并用计算器验证你的估计值.

(3) 若结果精确到千分位呢?





6.25 实数(2)



学标聚焦

1. 知道实数与数轴上的点一一对应.
2. 了解在有理数范围内的一些概念、运算以及运算法则、性质等在实数范围内仍然适用.
3. 会用不同的方法比较两个实数的大小.



范例下载

例1 计算并说出每一步运算所依据的运算律或运算法则:

$$(1) 5\sqrt{7} - \sqrt{7}; (2) 4\sqrt{5} - (\sqrt{6} + 2\sqrt{5}); (3) |-\sqrt[3]{9}| - \sqrt[3]{-9}.$$

分析 实数的运算法则没有学习,因此,必须也只能运用有关的运算律来进行计算.

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) 5\sqrt{7} - \sqrt{7} &= (5-1)\sqrt{7} \text{ (乘法分配律的逆应用)} \\ &= 4\sqrt{7}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) 4\sqrt{5} - (\sqrt{6} + 2\sqrt{5}) \\ &= 4\sqrt{5} - \sqrt{6} - 2\sqrt{5} \text{ (去括号)} \\ &= 4\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - \sqrt{6} \text{ (加法交换律)} \\ &= (4-2)\sqrt{5} - \sqrt{6} \text{ (乘法分配律的逆运用)} \\ &= 2\sqrt{5} - \sqrt{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) |-\sqrt[3]{9}| - \sqrt[3]{-9} \\ &= \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{-9} \text{ (绝对值意义)} \\ &= \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{9} \text{ (负数立方根的意义)} \\ &= 2\sqrt[3]{9}. \end{aligned}$$

例2 不计算,比较下列各组数的大小:

$$(1) \frac{1-\sqrt{5}}{3} \text{ 与 } \frac{1-\sqrt{3}}{3}; \quad (2) \frac{\sqrt{6}-1}{2} \text{ 与 } \frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

分析 (1) $\frac{1-\sqrt{5}}{3}$ 与 $\frac{1-\sqrt{3}}{3}$ 的分母都是3,要比较它们的大小,只需考虑 $1-\sqrt{5}$ 与 $1-\sqrt{3}$ 的大小; (2) $\frac{\sqrt{6}-1}{2}$ 与 $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ 的分母虽然相同,但是分子的情况与(1)不同:一个是 $\sqrt{6}-1$,而另一个是 $\sqrt{2}+1$,要比较它们的大小,首先考虑两数整数部分的大小.

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) \because \sqrt{5} > \sqrt{3}, \\ \therefore -\sqrt{5} < -\sqrt{3}, \text{ 即 } 1-\sqrt{5} < 1-\sqrt{3}, \end{aligned}$$

从小学数学学习的正数、零,到初中学习的有理数,加法交换律、乘法交换律及乘法结合律、加法对乘法的分配律等运算律都成立,那么,当数的范围扩大到实数时,这些运算律仍然是成立的.

计算中,每一步所依据的运算律必须十分清楚.

请注意左边分析中关于比较两个数的大小的方法.



$$\therefore \frac{1-\sqrt{5}}{3} < \frac{1-\sqrt{3}}{3}.$$

(2) $\because \sqrt{4} < \sqrt{6} < \sqrt{9}$, 而 $\sqrt{6}$ 的整数部分是 2,

$\therefore \sqrt{6}-1$ 的整数部分是 1.

而 $\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4}$, $\therefore \sqrt{2}$ 的整数部分是 1.

$\therefore \sqrt{2}+1$ 的整数部分是 2, $\therefore \frac{\sqrt{6}-1}{2} < \frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

请注意 $\sqrt{6}$ 的整数部分的确定方法: 夹在两个连续自然数的算术平方根之间! 通常情况下, 都是用这种方法确定一个带根号的无理数的整数部分.



课后冲浪

●基础扫描

1. 按要求填表:

			$\sqrt{\frac{3}{49}}$		$-\sqrt{3}$	
相反数	$\sqrt[3]{-0.5}$					-1.5
倒数		$\frac{4}{3}$				
绝对值				0		

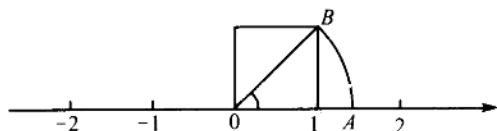
2. 下图是在学习“实数”时赵老师所画的图, 即“以数轴的单位长线段为边作一个正方形, 然后以 0 为圆心、以正方形的对角线的长为半径画弧, 交 x 轴于点 A”. 作这样的图是用来说明().

A. 无理数是存在的

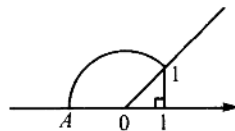
B. 实数是存在的

C. 有理数可以在数轴上表示出来

D. 无理数可以在数轴上表示出来



第 2 题图



第 3 题图

3. 如图, 数轴上点 A 表示的数是_____.

4. 计算下列各题, 并说出每一步运算所依据的运算法则或运算律:

(1) $-2\sqrt{6}+3\sqrt{6}$; (2) $\sqrt{8} \times (\sqrt{2}-\sqrt{8})$.

5. 比较下列各组数的大小:

(1) $-\sqrt{10}$ _____ $-3\frac{1}{3}$; (2) $-\sqrt{6}$ _____ $-2\sqrt{2}$; (3) $\sqrt[3]{27}$ _____ $\sqrt{8}$.

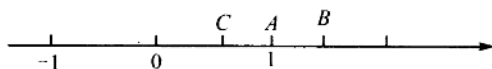
●能力拓展

6. 如图, 数轴上表示 1 、 $\sqrt{2}$ 的对应点分别为 A、B, 若点 B 关于点 A 的对称点为 C, 则





点C所表示的数是().



第6题图

- A. $\sqrt{2}-1$ B. $1-\sqrt{2}$ C. $2-\sqrt{2}$ D. $\sqrt{2}-2$

7. 若正数 m 是小于 $2+\sqrt{3}$ 的最大整数, 则 m 的值是 _____.



融会贯通



学生资源库

●名人与数学

无理数的发现——数学的第一次危机

社会经济中有危机,历史上数学也有三次危机.

第一次数学危机发生在公元前580年—公元前568年之间的古希腊,数学家毕达哥拉斯建立了毕达哥拉斯学派.这个学派集宗教、科学和哲学于一体,该学派人数固定,知识保密,所有发明创造都归于学派领袖.

当时人们对有理数的认识还很有限,对于无理数的概念更是一无所知,毕达哥拉斯学派所说的数,原来是指整数,他们不把分数看成一种数,而仅看作两个整数之比,他们错误地认为,宇宙间的一切现象都归结为整数或整数之比.

该学派的成员希伯索斯因根据勾股定理(西方称为毕达哥拉斯定理)通过逻辑推理发现,边长为1的正方形的对角线长度既不是整数,也不是整数的比所能表示.希伯索斯的发现被认为是“荒谬”和违反常识的.它不仅严重地违背了毕达哥拉斯学派的信条,也冲击了当时希腊人的传统见解,使当时希腊数学家们深感不安,导致了当时认识上的“危机”,从而产生了第一次数学危机.相传希伯索斯因为这一发现被投入海中淹死,这就是第一次数学危机.

第一次数学危机对古希腊的数学观点有极大冲击.这表明,几何学的某些真理与算术无关,几何量不能完全由整数及其比来表示,反之却可以由几何量来表示,整数的权威地位开始动摇,而几何学的身份升高了.危机也表明,直觉和经验不一定靠得住,推理证明才是可靠的,从此希腊人开始重视演绎推理,并由此建立了几何公理体系,这不能不说是数学思想上的一次巨大革命!

第一次数学危机产生的最大意义是导致了无理数的产生,第一次数学危机的真正解决是1872年德国数学家对无理数的严格定义,因为数学是很强调其严格的逻辑与推证性的.

●思想方法

逐步逼近——估算的重要方法

我们在前面估计 $\sqrt{5}$ 的值时,采用了下面的方法:首先考虑5在4与9之间,亦即 2^2 与 3^2 之间;再考虑 2.1^2 与 2.2^2 : $2.1^2=4.41$, $2.2^2=4.84$,均小于5,因此可尝试 2.3^2 ; 2.3^2



$=5.29$, 大于 5 , 因此 $\sqrt{5}$ 的值应在 2.2^2 与 2.3^2 之间; 接下来, 尝试 $2.21^2=4.8841$, $2.22^2=4.9284$, $2.23^2=4.9729$, $2.24^2=5.0176$, $\sqrt{5}$ 的值应在 2.23^2 与 2.24^2 之间; 考虑到 $2.24^2=5.0176$, 因此接下来尝试 $2.236^2=4.999696$, $2.237^2=5.004169$, $2.2365^2=5.00193225$, $2.2361^2=5.00011321$, 可知 $\sqrt{5}$ 的值在 2.2360^2 与 2.2361^2 之间; ……这样继续下去, 通过计算依据精确度要求而设定位数的小数的平方越来越接近 5 , 从而估算出 $\sqrt{5}$ 的近似值. 在用乘方估算开方的过程中, 小数的位数取得越多, 得到的近似值的精确度就越高. 我们注意到: 从 2.22 到 2.23 , 从 2.236 到 2.237 , 再从 2.2360 到 2.2361 , 如果把这些小数在数轴上表示出来, 我们会发现: 这些小数从左、右两个方向逐步逼近 $\sqrt{5}$, 这种逐步逼近的方法, 也称为数值逼近的方法, 是估算中常用的.

●思维拓展

例 1 用计算器探索:

已知按一定规律排列的一组数: $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{19}}, \frac{1}{\sqrt{20}}$.

如果从中选出若干个数, 使它们的和大于 3 , 那么至少要选出多少个?

解 用计算器将已知这组数依次化为小数:

$1, 0.7072, 0.5773, 0.5, 0.4472, \dots, 0.2236$.

这组数的特点是从 1 开始逐渐减小, 其中前 5 个数之和为:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = 1 + 0.7072 + 0.5773 + 0.5 + 0.4472 = 3.2317 > 3,$$

即至少选 5 个数.

例 2 如果要使一个正方形的面积缩小到原来的 $\frac{1}{6}$, 那么应怎样改变这个正方形的边长?

解 设这个正方形原来的边长为 a , 改变后的正方形的边长为 b ,

由题意得 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{6}$, 即 $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{1}{6}$, 因为 $a > 0, b > 0$, 所以 $\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{1}{6}} \approx \sqrt{0.1667}$.

由计算器得 $\sqrt{0.1667} \approx 0.408 = \frac{51}{125}$, $\frac{b}{a} = \frac{51}{125}$.

即把原来的正方形的边长缩小到原来的 $\frac{51}{125}$.

评注 把实际问题转化为数学问题, 即把文字语言转化为数学符号语言, 首要的问题是用字母表示问题中的一些关键的量. 本例中把改变前后的正方形的边长分别用字母 a, b 表示, 从而列出数学关系式, 最终解决问题.

例 3 在做浮力实验时, 小林用一根细线把一正方体铁块拴住后放入盛满水的圆柱形容器中, 水溢出容器外, 用量筒量得被铁块排开的水的体积为 50 cm^3 . 小林又把铁块从容器中提出来, 此时量得容器中水位下降了 1 cm . 这个容器内部的底面半径和铁块的边长各是多少? (用计算器计算, 结果精确到 0.1 cm)

分析 被铁块排开的水的体积与正方体铁块的体积是什么关系? 容器中下降的

