理工教材

计算机数学基础(下册)

——数值分析与组合数学

(第二版)

任现淼　主编　吴裕树　副主编

中央广播电视大学出版社

理工教材

计算机数学基础(下册)
——数值分析与组合数学

(第二版)

任现森 主编 吴裕树 副主编

图书在版编目(CIP)数据

计算机数学基础:下册 数值分析与组合数学/任现森主编.-2版.-北京:中央广播电视大学出版社,2000.10

ISBN 7-304-01855-0

Ⅰ.计… Ⅱ.任… Ⅲ.①数值计算-计算方法-电视大学-教材 ②组合数学-电视大学-教材 Ⅳ.TP301.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第01753号

理工教材

计算机数学基础(下册)

——数值分析与组合数学

(第二版)

任现森 主编 吴裕树 副主编

出版·发行/中央广播电视大学出版社

经销/新华书店北京发行所

印刷/北京密云胶印厂

开本/787×1092 1/16 **印张**/22.75 **字数**/565千字

版本/2000年10月第2版 2003年7月第6次印刷

印数/32501~39500

社址/北京市复兴门内大街160号 **邮编**/100031

电话/66419791 68519502 **(本书如有缺页或倒装,本社负责退换)**

书号:ISBN 7-304-01855-0/O·100

定价:29.00元

前 言

《计算机数学基础》是广播电视大学计算工程类计算机科学与技术专业的一门专业基础课。本教材分上、下册，上册为《计算机数学基础(上册)——离散数学》，本册是下册《计算机数学基础(下册)——数值分析与组合数学》。

计算机科学和技术是研究信息和知识的表示、处理、储存、控制和应用的学科。它已渗透到国民经济的各个领域，包括人类生活的各个方面。计算机技术的发展已成为科技进步的重要标志，成为知识经济社会的重要组成部分。随着计算机科学技术的发展，需要研究的课题越来越广泛、越深入，这些课题的研究，涉及到一定深度的数学知识。如离散数学、数值分析、组合数学、概率论和语言设计等。只有高等专科教育中的高等数学和线性代数的知识是不够的。

计算机的广泛使用，离不开计算机算法的研究。习惯上，将计算机算法分成两大类：数值分析和组合算法。数值分析主要解决数值计算问题，如求解方程(组)、函数逼近和计算积分等。研究适合于计算机使用的数值计算方法。它已成为与科学理论、科学试验并列的第三种科学方法，解决生产和科学实验中提出的各种计算问题。组合算法解决搜索、排序和组合优化问题，它的基础是组合数学。主要研究组合计数的各种方法和技巧。因此，数值分析和组合数学也是学习计算机科学与技术专业的学生必须掌握的课程，也是学习后续课程，如数据结构、数据库原理及其应用、操作系统等不可缺少的基础课程。

根据成人业余学习的特点和专业的需要，本教材力求保留数值分析和组合数学基本知识的基础上，做到深入浅出，通俗易懂。在内容的选取上以计算机科学与技术专业的"必需、够用"为度，突出实用性。

本教材采用主教材和辅助教材(学习指导书)合一式。但是在内容的安排上又采用分离式。每章的基本内容在前面各节中，紧跟其后的是本章内容小结和复习思考题，学习指导的内容集中于每章的末节。

版式设计上采取正文分主、辅栏的形式。主栏为教材的文字叙述；辅栏为学习者提供学习媒体信息，如点明重要概念、引导和注释等。如：

$\boxed{\text{录像}_{62}}$ —表示此章或节有录像，是第 62 本录像。

$\boxed{\text{跟我练习例 3}}$ —学习指导部分的例 3 是与此处内容相关的例题。

！—表示引导注释。

每编设单独一页。正面有编名、主要内容、学习安排；反面为本编学习目标、学习方法导引。

学习指导内容的编排主要是结合例题进行学习方法和解题方法的指导。

与上册一样，正文部分重要内容的例题，在学习指导部分再配例题或综合例题，以达到重要知识点反复练习，熟练掌握的程度。正文与学习指导部分的例题形成三段式：即正文中某一例题(不一定每个例题都有)，在学习指导部分再配一相关的例题，在详细解答过程中，留出一

些空白，让学生自己填写。这样的练习称为[跟我练习]。紧跟其后，给出一个相近的[自我练习]，由学生自己完成。

[跟我练习]的填空内容和[自我练习]的答案或提示，附在每章末尾。

本教材节末有练习，章末有习题。练习分 A，B，其中 A 是计算、证明等传统题型；B 是选择、填空等题型。目的在于加强选择、填空题的练习。习题是本章综合性练习。练习或习题中带“※”符号者为必作题目。

书中打“*”号的内容，可供电大学生选用。

参加《计算机数学基础（下册）——数值分析与组合数学》审定的有北京大学张立昂教授、清华大学王泽毅教授、北京大学耿素云教授和中央电大孙天正教授，张立昂教授任主审，他们对教材书稿进行了认真详尽地审阅，提出了不少中肯宝贵的意见。

上海电大的李国莹教授仔细阅读了本册初稿的第 5 编，提出了许多宝贵意见。李国莹教授在上海电大九八级试用初稿的第 11～14 章，反映良好。

在本教材的编写过程中，得到了中央电大教务处长李林曙教授、电大系统教材共建办公室主任高松海教授和基础部副主任周永胜的大力支持和帮助；中央电大出版社常务副社长钱辉镜副编审为本教材的顺利出版付出了辛勤的劳动，在此一并致谢。

本书可以作为计算机科学与技术专业本科学生的教材。也可作为相关专业的工作者学习有关基础知识的参考书。

本教材由任现淼教授任主编，吴裕树教授任副主编。参加本册编写的有冯泰（第 5 编），任现淼（第 6 编）。

由于时间仓促，水平有限，必有不够完善和错误之处，恳请读者批评指正。

编　者

1999 年 10 月于北京

目　　录

第5编　数值分析

第6编　组合数学

第5编　数值分析

主要内容

1. 数值计算中的误差

误差概念　数值计算中的若干准则

2. 线性方程组解法

高斯消去法与高斯主元消去法 高斯消去法的变形　迭代法

3. 函数插值与最小二乘拟合

拉格朗日插值公式　均差　牛顿插值公式　分段线性插值　三次样条插值函数　最小二乘拟合

4. 数值积分与微分

牛顿—科茨求积公式　高斯求积公式　数值微分

5. 方程求根

二分法　迭代法　牛顿法　弦截法　非线性方程组的牛顿解法

6. 常微分方程的数值解法

欧拉法　改进欧拉法　龙格—库塔法　亚当斯法　一阶微分方程组和高阶微分方程的数值解法

学习安排

课内学时	录像学时	辅导(习题)课学时	作业次数	自习学时
36	9	18	9	72

学习目标

通过这一编的学习，达到

了解误差理论．

熟练掌握高斯消去法，掌握几个简单迭代法．

了解插值概念，掌握拉格朗日插值公式和牛顿插值公式，掌握曲线拟合的最小二乘法．

知道数值积分的思想和代数精度概念．掌握牛顿—科茨求积分公式，重点是梯形公式和抛物线公式，知道高斯求积公式．

掌握几个微分公式．

掌握求非线性方程的根的方法．

掌握一阶微分方程初值问题的数值解法的欧拉法和龙格——库塔法．

学习方法导引

数值分析亦称为计算方法，它是专门研究求解各种数学问题的数值计算方法的．

计算机的出现和发展，为数学问题的近似计算提供了良好的条件．由于计算机是数值计算的主要工具，所以计算方法的主要内容是研究在计算机上用于求解数学问题的数值近似解的方法和过程．

随着计算机的迅速发展和日益普及，工科的许多专业普遍开设了数值计算方法课程，尤其是计算机有关的专业．对于一般的工科专业大学生需要数值计算方法，但并不需要在计算数学理论上花费过多的时间，我们正是从这一点出发，来编写这一编内容的．

本编从实用角度出发，介绍了计算机数值计算的基本理论和基本方法．主要有求解线性方程组、非线性方程求根、函数插值、数值积分和数值微分以及常微分方程的数值解法等．

数值计算方法是一门实践性很强的课程．因此在每一章给出了实习作业，并配有计算框图，但没有针对哪一种语言，供学生选用．本编主要介绍了几种常见的数值计算方法，有的给出了简单误差分析．要掌握这些方法，理解这些方法的基本道理是重要的，但更重要的是在于实践，由于学时原因，不可能要求更多的实践作业，这方面的工作只能由学生自觉地完成．以便于学好这一编的内容．

第 9 章　数值分析中的误差

运用数学方法解决科学技术和工程技术问题，一般按如下次序进行：

实际问题 → 模型设计 → 算法设计 → 上机计算 → 分析结果

其中算法设计是数值分析的主要内容.

数值分析课程研究基本数学问题的数值解法. 包括了数值代数(线性方程组的解法、非线性方程的解法等)、数值逼近、数值微分与数值积分和常微分方程的数值解法等. 它的基本理论和研究方法是建立在数学理论之上，研究对象是数学问题，因此它是数学的分支之一.

但它又与计算机科学有密切的关系，我们在考虑算法时往往同时要考虑计算机的特性，如计算速度、存储量、字长等，因此有了一定的计算机知识，会使学习数值分析的理论和方法更深刻、更实际，设计的算法就更合理、更实用.

在科学研究、工程技术和经济管理等工作中，存在大量的科学计算和数据处理问题，应用计算机解决数值计算问题是大学生应当具备的基本能力.

有人认为用先进的计算工具进行计算，所得结果一定可靠，没有必要对误差进行分析研究，事实如何?请看例.

例 1　$y = \arctan 5\,430 - \arctan 5\,429$ 的准确值为 0.000 000 033 921 91…，但是，若用具有舍入功能的八位计算器，直接按下面过程计算，得到

$$y = 1.570\,612\,2 - 1.570\,612\,1 = 0.000\,000\,1$$

所得近似值很不可靠.

例 2　设一元二次方程

$$x^2 - (10^9 + 1)x + 10^9 = 0$$

该方程有两个互异实根 $x_1 = 10^9, x_2 = 1$. 但是，若直接引用求根公式

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

用十字相乘法求根

在尾数八位的浮点计算机上进行计算，则得到

$$x_1 = 10^9 \qquad x_2 = 0$$

其中一个根明显是错误的.

在以上二例中，虽然都使用了正确无误的公式进行计算，却都得到了错误的结果. 要找出发生这种情况的原因，采取相应措施确保计算结果的可靠性，必须进行误差分析.

9.1　误差的来源和基本概念

9.1.1　误差的来源

在运用数学方法解决实际问题的过程中，每一步都有可能带来误差．

1．模型误差　在建立数学模型时，往往要忽略很多次要因素，把模型“简单化”、“理想化”，这时模型就与实际背景产生差距，即带入了误差．

2．测量误差　数学模型中的已知参数，多数是通过测量得到的．而测量过程受工具、方法、观测者的主观因素、不可预料的随机干扰等影响，必然带入误差．

3．截断误差　数学模型常难于直接求解．往往要近似替代，简化为易于求解的问题，这种简化带入的误差称为方法误差或截断误差．

4．舍入误差　计算机只能处理有限数位的小数运算，初始参数或中间结果都必须进行四舍五入运算，这必然产生舍入误差．

在数值分析课程中不分析讨论模型误差．截断误差是数值分析课程中的主要讨论对象，它往往是计算中误差的主要部分．在讲到各种算法时，通过数学方法可以推导出截断误差限的公式，舍入误差的产生往往带有很大的随机性，讨论比较困难．在问题本身呈现病态或方法的稳定性不好时，它可能成为计算中误差的主要部分．至于测量误差，我们把它作为初始的舍入误差看待．

误差分析是一门比较艰深的专门学科．在数值分析中主要讨论它的截断误差和舍入误差．但一个训练有素的计算工作者，当发现计算结果与实际不符时，应当能诊断出误差的来源，并采取一定的措施加以改进，直至建议对数学模型进行修改．

9.1.2　误差的基本概念

1．绝对误差与绝对误差限

定义 1　设 x^* 是精确值，x 是它的一个近似值，称 $e = x - x^*$ 为近似值 x 的**绝对误差，简称误差**．

绝对误差

绝对误差是有量纲的量，量纲同 x，它可正可负．

绝对误差一般无法准确计算，只能根据测量或计算情况估计出它的绝对值的一个上界，这个上界称为近似值 x 的**绝对误差限**，记作 ε，即

误差限

$$|x - x^*| \leqslant \varepsilon \tag{1.1}$$

其意义是 $x - \varepsilon \leqslant x^* \leqslant x + \varepsilon$

在工程中常记作：

$$x = x^* \pm \varepsilon \tag{1.2}$$

如 $l = 10.0 \pm 0.05\text{mm}$，$R = 1\,500 \pm 100\Omega$ 等．

2．相对误差与相对误差限　误差不能完全刻划近似值的精确程度，例如测量 100m 跑道，出现 10cm 的误差，测量一个计算机台桌产生 1cm 的误差，后

者的误差只有 1cm，就简单地认为后者更精确显然是错误的．测量的精度，不仅与绝对误差有关，还应考虑被测值的大小．下面给出定义．

定义 2　绝对误差 e 与精确值 x^* 的比值

$$\frac{e}{x^*}=\frac{x-x^*}{x^*}$$

称为近似值 x 的**相对误差**，记作 e_r．即

相对误差

跟我练习例 1

$$e_r=\frac{e}{x^*}=\frac{x-x^*}{x^*} \tag{1.3}$$

相对误差是一个没有量纲的量，常用百分数表示，它也可正可负．

相对误差也常常不能准确计算，而是用相对误差限估计．

相对误差限：用 ε_r 表示，

$$\varepsilon_r=\frac{\varepsilon}{|x^*|}\geqslant\frac{|x-x^*|}{|x^*|}=|e_r|$$

实际上，由于 x^* 不知道，用上式无法确定 ε_r，常用 x 代替 x^* 作分母，此时有

$$\left|\frac{\varepsilon}{|x^*|}-\frac{\varepsilon}{|x|}\right|=\frac{|\varepsilon(|x|-|x^*|)|}{|x^*x|}\leqslant\frac{\varepsilon^2}{|x^*x|}=\frac{\left|\frac{\varepsilon}{x^*}\right|^2}{\left|\frac{x}{x^*}\right|}=O(\varepsilon_r^2)$$

可见此时产生的影响是 ε_r^2 的量级，当 ε_r 较小时，可以忽略不计．以后我们常用 $\frac{x-x^*}{x}$ 计算相对误差，用 $\frac{\varepsilon}{|x|}$ 表示相对误差限．

9.1.3　有效数字

定义 3　如果近似值 x 的绝对误差限 ε 是它某一个数位的半个单位，我们就说 x 准确到该位．从这一位起到前面第一个非 0 数字为止的所有数字称为 x 的**有效数字**．

有效数字

当

$$x=\pm 0.a_1a_2\cdots a_n\times 10^m \tag{1.4}$$

时，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $0\sim 9$ 之中的自然数，且 $a_1\neq 0$，

$$|x-x^*|\leqslant\varepsilon=0.5\times 10^{m-l}(1\leqslant l\leqslant n) \tag{1.5}$$

则称 x 有 l 位有效数字．

如 $\pi=3.141\,592\,65\cdots$，则 3.14 和 3.1416 分别有 3 位和 5 位有效数字．而 3.143 相对于 π 也只能有 3 位有效数字．

在更多的情况下，我们不知道准确值 x^*，如果我们认为计算结果各位数可靠，将它四舍五入到某一位，这时从这一位起到前面第 1 个非 0 数字共 l 位，它与计算结果之差相比小于该位的半个单位，我们习惯上说将计算结果保留 l 位有效数字．

如计算机上得到方程 $x^3-x-1=0$ 的一个正根 $x=1.324\,72$，保留 4 位有效数字的结果为 1.325；保留 5 位有效数字的结果为 1.324 7．

相对误差与有效数字的关系十分密切，定性地讲，相对误差越小，有效位

数越多,反之也对．定量地讲,有下面两个定理．

【定理 1】　设近似值 $x=\pm 0.a_1a_2\cdots a_n\times 10^m$ 有 l 位有效数字($a_1\neq 0$),则其相对误差限

$$\varepsilon_r\leqslant\frac{1}{2a_1}\times 10^{-l+1} \tag{1.6}$$

证明　因为

$$x=\pm 0.a_1a_2\cdots a_n\times 10^m$$

可得

$$a_1\times 10^{m-1}\leqslant|x|<(a_1+1)\times 10^{m-1} \tag{1.7}$$

结合(1.5) 式,得到

$$\varepsilon_r=\frac{|x-x^*|}{|x|}\leqslant\frac{0.5\times 10^{m-l}}{a_1\times 10^{m-1}}=\frac{1}{2a_1}\times 10^{-l+1}$$

【定理 2】　设近似值 $x=\pm 0.a_1a_2\cdots a_n\times 10^m$ 的相对误差限不大于

$$\frac{1}{2(a_1+1)}\times 10^{-l+1}$$

则它至少有 l 位有效数字．

证明

$$|x|<(a_1+1)\times 10^{m-1}$$

$$\begin{aligned}|x-x^*|&=\frac{|x-x^*|}{|x|}\times|x|\\&\leqslant\frac{1}{2(a_1+1)}\times 10^{-l+1}\times(a_1+1)\times 10^{m-1}\\&=0.5\times 10^{m-l}\end{aligned}$$

由定义 3 可知,x 的有效数字至少 l 位．

例 1　按四舍五入原则写出下列各数具有 5 位有效数字的近似数:187.9325,0.037 855551, 8.000033,2.71818

跟我练习例 2

解　按照定义,上述各数具有 5 位有效数字的近似数为

187.93　　0.037 856　　8.000 0　　2.718 2

例 2　重力常数 g,如果用 $\mathrm{m/s^2}$ 为单位,

$$g\approx 9.80\mathrm{m/s^2}$$

若以 $\mathrm{km/s^2}$ 为单位,

$$g\approx 0.009\ 80\mathrm{km/s^2}$$

它们都具有 3 位有效数字．以 $\mathrm{m/s^2}$ 为单位,有

$$|g-9.80|\leqslant 0.5\times 10^{-2}$$

按公式(1.4),$m=1,l=3$,以 $\mathrm{km/s^2}$ 为单位,有

$$|g-0.00980|\leqslant 0.5\times 10^{-5}$$

这里 $m=-2,l=3$.

它们虽然写法不同,但都具有 3 位有效数字．至于绝对误差限,由于单位不同,结果也不同,它们分别是 $\varepsilon_1=0.5\times 10^{-2}\mathrm{m/s^2}$ 和 $\varepsilon_2=0.5\times 10^{-5}\mathrm{km/s^2}$.

而相对误差都是

$$e_r = 0.005/9.80 = 0.000005/0.00980$$

注意相对误差和相对误差限是无量纲的，而绝对误差和绝对误差限是有量纲的.

例 2 说明，有效位数与小数点后有多少位数无关. 然而从公式(1.5) 可得到具有 n 位有效数字的近似数 x，其绝对误差限

$$\varepsilon = 0.5 \times 10^{m-n}$$

在 m 相同的情况下，n 越大则 10^{m-n} 越小，故有效位数越多，绝对误差限越小.

例 3　计算 $\sin 1.2$，试问要取几位有效数字才能保证相对误差限不大于 0.01%.

解　$\sin 1.2 = 0.93$，故 $a_1 = 9$，$m = 0$，用定理 2 公式，有

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-l+1} \leqslant 0.01\% = 10^{-4}$$

解关于 l 的不等式

$$10^{-l} \leqslant 20 \times 10^{-5} = 2.0 \times 10^{-4}$$

所以取 $l = 4$，即保留四位有效数字可满足要求.

例 4　计算 $\frac{1}{759} - \frac{1}{760}$，视已知数为精确值，用 4 位浮点数计算.

解

$$\text{原式} = 0.1318 \times 10^{-2} - 0.1316 \times 10^{-2} = 0.2 \times 10^{-5}$$

结果只剩 1 位有效数字，有效数字大量损失，造成相对误差的扩大. 若通分后再计算，有

$$\text{原式} = \frac{1}{759} - \frac{1}{760} = \frac{1}{759 \times 760} = 0.1734 \times 10^{-5}$$

得到 4 位有效数字的结果.

练 习 9.1

(B)

1. 数值 x^* 的近似值 x，那么 x 的绝对误差是(　　)

(A) $x^* - x$　　(B) $x - x^*$　　(C) $|x^* - x|$　　(D) $|x - x^*|$

※2. 数值 x^* 的近似值 x，那么按定义 x 的相对误差是(　　)，常用计算公式是(　　)

(A) $\frac{x - x^*}{x^*}$　　(B) $\frac{x - x^*}{x}$　　(C) $\frac{|x - x^*|}{x}$　　(D) $\frac{|x^* - x|}{|x^*|}$

3. 数值 x^* 的近似值 x，那么 x 的相对误差是一个无________的量。

※4. 如果近似值 x 的绝对误差限 ε 是它某一个数位的______单位，我们就说 x 准确到该位.

※5. 当一个近似数 x 表成

$$x = \pm\, 0.a_1a_2\cdots a_n \times 10^m$$

时，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 $0 \sim 9$ 之中的自然数，且 $a_1 \neq 0$，

$$e = |x - x^*| \leqslant \varepsilon = 0.5 \times 10^{m-l}(1 \leqslant l \leqslant n)$$

则称 x 有(　　)位有效数字．

(A)m　　(B)$m-l$　　(C)n　　(D)l

6. 设 $x^* = \dfrac{1}{3}$，取 $x = 0.333$，那么 x 具有______有效数字．

※7. 设 $x = 37.134678$，取5位有效数字，$x \approx$ (　)

(A)37.1347　　(B)37.13468　　(C)37.135　　(D)37.13467

8. 设近似值 $x = \pm\, 0.a_1a_2\cdots a_n \times 10^m$ 的相对误差限不大于

$$\frac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-n+1}$$

则它(　)有效数字．

(A)$n-1$　　(B) 至少有 n 位　　(C) 至多有 n 位　　(D)n 位

9. 设近似值 $x = \pm\, 0.a_1a_2\cdots a_n \times 10^m$ 有 n 位有效数字，则其相对误差限 ε_r____________

$\dfrac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1}$

※10. 用 mm 刻度的米尺测量一长度为 x^* 的物体，测得近似值为 x，那么 x 与 x^* 之差的误差限是________

9.2　数值计算中的若干准则

9.2.1　数值计算时误差的传播

当参与运算的数值带有误差时，结果也必然带有误差．问题在于结果的误差比原始的误差是否扩大．

1. 对函数 $f(x)$ 的计算　设 x 是 x^* 的近似值，则结果误差

$$\mathrm{e}(f(x)) = f(x) - f(x^*) \tag{2.1}$$

利用泰勒展开式可得

$$\mathrm{e}(f(x)) = f'(x)(x - x^*) - \frac{f''(\xi)}{2}(x - x^*)^2$$

$$|\mathrm{e}(f(x))| \leqslant |f'(x)|\varepsilon(x) + \left|\frac{f''(x)}{2}\right|\varepsilon^2(x)$$

忽略第二项高阶无穷小后，可以得到 $f(x)$ 计算后的误差限估计式

$$|\mathrm{e}(f(x))| \leqslant |f'(x)|\varepsilon(x) \tag{2.2}$$

2. 对多元函数 $f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*) = A^*$，若 $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$ 的近似值分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，则 $A = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 A^* 的近似值，有

$$\varepsilon(A) \approx \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)}{\partial x_k}\right|\varepsilon(x_k) \tag{2.3}$$

3. 四则运算中的误差传播　按公式(2.3)，易得近似值作四则运算后的误差限公式

$$\varepsilon(x_1 \pm x_2) = \varepsilon(x_1) + \varepsilon(x_2) \tag{2.4}$$

$$\varepsilon(x_1 x_2) \approx |x_1|\varepsilon(x_2) + |x_2|\varepsilon(x_1) \tag{2.5}$$

$$\varepsilon\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \approx \frac{|x_1|\varepsilon(x_2) + |x_2|\varepsilon(x_1)}{|x_2|^2} \tag{2.6}$$

9.2.2　数值计算中应注意的几个原则

误差分析在数值计算中是一个既重要又复杂的问题．因为几乎每步运算都有误差，而一个工程或科学计算问题往往需要千百万次计算，所以每步运算都分析误差几乎是不可能的，也是不必要的．例如，运算过程中产生的误差有时会积累起来，有时会互相抵消．我们感兴趣的问题是如何防止误差的积累．提出数值计算的若干原则，将有助于提高计算结果的可靠性，防止误差危害的发生．

1. 使用数值稳定的算法

所谓算法，是指按某种规定的顺序进行运算的一个运算程序．它是实施计算的具体方案．在运算过程中舍入误差不增加的算法称为**数值稳定的算法**．否则称为数值不稳定的算法．在数值计算中应尽量采用数值稳定的算法，避免数值不稳定的算法．

稳定处法

例如计算积分

$$I_n = e^{-1}\int_0^1 x^n e^x dx \quad (n = 0,1,2,\cdots) \tag{2.7}$$

利用分部积分容易得到递推公式

$$\begin{cases} I_n = 1 - nI_{n-1} \\ I_0 = 1 - e^{-1} \approx 0.6321 \end{cases} \tag{2.8}$$

由式(2.8)可以求得

$$I_0 = 0.6321 \qquad I_1 = 0.3680 \qquad I_2 = 0.2640$$
$$I_3 = 0.2080 \qquad I_4 = 0.1680 \qquad I_5 = 0.1600$$
$$I_6 = 0.0400 \qquad I_7 = 0.7200 \qquad I_8 = -4.760$$

因为

$$0 < I_n < e^{-1}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}(e^x) \cdot \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \tag{2.9}$$

由上面关于 I_n 的不等式可以看出

$$I_7 < \frac{1}{7+1} = 0.125$$

因此按递推公式(2.8)计算的 I_7, I_8 的结果是错误的．错误产生的原因是因为 I_0 本身有不超过 0.5×10^{-4} 的误差，它又与 I_1 的误差一起顺序乘以 2,3,4,5,6,7,8，而传播积累到 I_7, I_8 中去，从而使得 I_7, I_8 的结果面目全非．

如果将公式(2.8)改写成