高等院校计算机教材系列

离散数学及其应用

徐凤生 主编

郭长友 刘建军
潘东静 李天志 参编

机械工业出版社
China Machine Press

高等院校计算机教材系列

离散数学及其应用

徐凤生 主编

郭长友 刘建军
潘东静 李天志 参编

机械工业出版社
China Machine Press

本书系统讲解离散数学基础知识和应用方法，由六部分构成：第一部分数理逻辑，内容包括命题逻辑和谓词逻辑；第二部分集合论，内容包括集合的基本知识、排列与组合、递推关系、集合论在命题逻辑中的应用、关系、函数、经典集合的扩展等；第三部分数论，内容包括整除和同余；第四部分代数系统，内容包括代数系统的基本概念及性质、半群、独异点、群、环、域、布尔代数等；第五部分图论，内容包括图的基本概念及矩阵表示、几类重要的图、最短路径、关键路径等；第六部分计算机科学中的应用，内容包括形式语言与自动机、纠错码等。

本书在内容安排上，突出由浅入深、循序渐进、通俗易懂的特点，另外各章配备了大量的例题，便于自学。为了体现与前导课和后继课的联系，激发学生的学习兴趣，书中融入了一些编程的思想，并加进了上机实验内容。

本书可作为高等院校计算机及相关专业本科生的教材，也可供相关科技人员学习参考。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学及其应用 / 徐凤生主编. -北京：机械工业出版社，2006.8

（高等院校计算机教材系列）

ISBN 7-111-19058-0

Ⅰ. 离…　Ⅱ. 徐…　Ⅲ. 离散数学-高等学校-教材　Ⅳ. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 041988 号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码　100037）

责任编辑：迟振春

北京瑞德印刷有限公司印刷 · 新华书店北京发行所发行

2006 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm · 16.75 印张

定价：28.00 元

前　言

目前，在计算机科学的研究和应用中遇到的许多重大问题，不仅有技术问题，而且有理论问题，至少有技术方面的理论问题。因此，无论学生今后从事计算机的理论研究，还是应用开发或者技术管理工作，都必须打下坚实的数学理论基础，以适应学科迅速发展和知识更新的需要，而离散数学是必备的数学基础。

离散数学是研究离散量的结构及其相互关系的数学学科。它是计算机及相关专业的核心和骨干课程，为数据结构、编译原理、数据库、算法分析和人工智能等课程提供必要的数学基础。

离散数学的特点是概念多、理论性强和高度抽象，学生学习起来往往比较困难。针对这种情况，我们在参考各种离散数学教材的基础上，结合作者多年的教学实践，编写了这本普通高等院校计算机及其相关专业本科生适用的离散数学教材。

本书按“精、广、新”的要求组织教学内容，并本着实用的原则增加了上机实验内容等，确保了计算机专业学生能够获得应有的数学知识和解决问题的能力。全书由六部分构成。第一部分数理逻辑，内容包括命题逻辑和谓词逻辑；第二部分集合论，内容包括集合的基本知识、排列与组合、递推关系、集合论在命题逻辑中的应用、关系、函数、经典集合的扩展等；第三部分数论，内容包括整除和同余；第四部分代数系统，内容包括代数系统的基本概念及性质、半群和群、环与域、布尔代数等；第五部分图论，内容包括图的基本概念及矩阵表示、几类重要的图、最短路径、关键路径等；第六部分计算机科学中的应用，内容包括形式语言与自动机、纠错码等。

本书由徐凤生主编，第 1 ~ 10 章由徐凤生编写，第 11 章由刘建军编写，第 12 章由潘东静编写，郭长友完成了第 1 ~ 5 章和第 8 ~ 10 章的习题整理工作，李天志参与了书稿的讨论，提出了一些较好的建议。最后，全书由徐凤生统稿并定稿。

本书具有以下特色：

（1）内容涉猎面广，可满足不同层面学生的需求。

（2）讲述全面而翔实，阐述简洁而明了。

（3）重点突出解题思路，注重培养学生的数学思维能力和分析、解决问题的能力。

（4）为了体现与前导课和后继课的联系，激发学生的学习兴趣，书中融入了一些编程的思想，并加进了上机实验内容。

（5）例题丰富，题型多样，便于学生自学。

（6）通过典型例题的分析，使学生对所学知识的掌握更加系统化和条理化，更易于对所学知识融会贯通和举一反三。

在本书编写过程中，刘杰老师给予了提供资料方面的帮助，张洪静老师对初稿提出了许多宝贵的修改意见，谨对他们表示衷心的感谢。另外，在编写中参阅了许多离散数学教材和相关资料，在此也向作者表示感谢。最后，还要特别感谢机械工业出版社华章分社的大力支持，使得本书得以顺利出版。

限于作者水平，书中不当和疏漏之处在所难免，敬请读者不吝指正。

编者

2006年4月

目　录

第1章 命题逻辑

数理逻辑是用数学的方法来研究推理的形式结构和推理规律的学科，它与数学的其他分支、计算机科学、人工智能、程序理论和数据库理论等有着密切的关系。数理逻辑的内容相当丰富，本书只介绍其中的命题逻辑和谓词逻辑两部分。本章讲述命题逻辑；谓词逻辑在第2章讨论。

1.1 命题与联结词

1.1.1 命题的基本概念

数理逻辑研究的中心问题是推理，而推理的前提和结论都是可以判断真假的陈述句，即命题。因此，命题是推理的基本单位。在命题逻辑中，对命题的成分不再细分，因而命题也是命题逻辑中的最小的研究单位。

定义 1.1 *能判断真假的陈述句称为命题。一个命题的真或假称为命题的真值，分别用 T（或 1）与 F（或 0）表示。真值为真的命题称为真（T）命题，真值为假（F）的命题称为假命题。*

由定义可知，判断一个句子是否为命题，应分为两步：首先判断它是否为陈述句，其次判断它能否确定真假。另外还要注意，一个陈述句能否判断真假，和我们是否知道它的真假是两回事。

例 1 判断下列句子哪些是命题。

（1）雪是黑的。

（2）天气多好呀！

（3）别的星球上有生物。

（4）1+101=110。

（5）你上网了吗？

（6）全体立正！

（7）$x+y>5$。

（8）人有五指。

（9）现在是 6 点钟。

（10）我正在说谎。

解 在上述 10 个句子中，（2）是感叹句，（5）是疑问句，（6）是祈使句，因此它们都不是命题。（7）和（10）虽然都是陈述句，但因为（7）没有确定的真值，而（10）是悖论（即由真能推出假，也能由假推出真），因而它们也不是命题。（1）、（3）、（8）、（9）都是命题，其中，（3）虽然目前无法判断，但就其本质而言是可以判断真假的，因此我们说它是命题；（8）的真值因人而异；（9）的真值因地而异。（4）所表达的内容在十进制范围中真值为假，而在二进制范围中真值为真，因此其真值由上下文而定。 ■

1.1.2 命题分类及命题标识符

根据命题的结构形式，可以把命题分为原子命题和复合命题。简单地说，原子命题是能判断真假的简单陈述句，而复合命题是由原子命题组成的。

定义 1.2 不能再分解为其他命题的命题称为原子命题。由原子命题和命题联结词构成的命题称为复合命题。

例如，例 1 中的命题都是原子命题，而命题“张三和李四都是大学生”是复合命题，因为它由“张三是大学生”和“李四是大学生”两个原子命题组成。

在命题逻辑中，采用的是一种形式语言，它由规定了特定意义的符号和规则组成，其特征是有确切的含义。

一个原子命题一般用大写字母来表示，表示原子命题的符号称为命题标识符。命题标识符通常写在命题的前面，两者之间用冒号分开。

例 2 P：雪是黑的。 ■

定义 1.3 如果命题标识符表示真值确定的命题，则称其为命题常元。如果命题标识符表示真值不确定的陈述句，则称其为命题变元。

显然，命题变元不是命题。

1.1.3 命题联结词

通过命题联结词可以把原子命题复合成一个复合命题。命题逻辑中常用的联结词有以下五种：“非”（否定词）、“且”（合取词）、“或”（析取词）、“如果……，则……”（条件词）、“……当且仅当……”（双条件词），下面给出它们的确切含义和符号表示。

1. 否定词$\neg$

定义 1.4 复合命题“非 P”称为命题 P 的否定，记作$\neg P$，读作非 P。$\neg P$ 为真当且仅当 P 为假。

例 3 设 P：离散数学是计算机专业的核心课程，则$\neg P$ 表示离散数学不是计算机专业的核心课程。 ■

2. 合取词$\wedge$

定义 1.5 复合命题“P 且 Q”称为 P 与 Q 的合取式，记作 $P\wedge Q$，读作 P 且 Q。$P\wedge Q$ 为真当且仅当 P 与 Q 都为真。

例 4 设 P：今天上机，Q：今天下雨，则 $P\wedge Q$ 表示今天上机且今天下雨。 ■

需要指出的是，上例中的两个命题是不相干的，在自然语言里 $P\wedge Q$ 是没有意义的，但在数理逻辑中这是允许的。

3. 析取词$\vee$

定义 1.6 复合命题“P 或 Q”称为 P 与 Q 的析取式，记作 $P\vee Q$，读作 P 或 Q。$P\vee Q$ 为假当且仅当 P 和 Q 都为假。

由于自然语言中的“或”具有多义性，包括“可兼或”、“排斥或”和“表示近似的或”，因此需要指出命题逻辑中的“或”是指哪一种。先看下面表 1-1 给出的例子。

表 1-1

或的含义	例子		说明
联结词	可兼或	$a \cdot b=0$ 即 $a=0$ 或 $b=0$ 或 $a=b=0$	两者至少有一个发生，不排斥两者都发生的情况
	排斥或	小张在教室上课或参加长跑比赛	非此即彼，不可兼得
非联结词	表示近似的或	去主楼需 6 分钟或 8 分钟	表示近似数

命题逻辑中的析取词$\vee$表示的是可兼或，即允许 $P\vee Q$ 中的 P 和 Q 同时为真。

例 5 （1）李强是 100 米或 400 米赛跑冠军。

（2）今天晚上我在家看电视或去剧场看戏。

解 （1）中的“或”是可兼或，可以用联结词$\vee$表示。设 P：李强是 100 米赛跑冠军，Q：李强是 400 米赛跑冠军，则（1）表示为 $P\vee Q$。

（2）中的“或”是排斥或，不能用联结词$\vee$直接表示。设 P：今天晚上我在家看电视，Q：今天晚上我去剧场看戏，则（2）可以表示为$(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)$，也可用后面介绍的异或联结词表示为 $P\oplus Q$。 ■

4．条件词$\rightarrow$

定义 1.7 *复合命题“如果 P，则 Q”称为 P 与 Q 的条件式，记作 $P\rightarrow Q$，读作如果 P 则 Q。其中 P 称为前件，Q 称为后件。$P\rightarrow Q$ 为假当且仅当 P 为真而 Q 为假。*

在自然语言中，“如果”与“则”之间通常有因果联系，否则没有意义，但对条件命题 $P\rightarrow Q$ 来说，只要 P 和 Q 能够确定真值，$P\rightarrow Q$ 即成为命题。在条件命题中，若前提为假，条件命题的真值为真，称为善意的推断。前件假而整个句子为真的例子，在自然语言中也是常见的，例如：假如给我一根合适的杠杆，我可以把地球撬起来。

条件式 $P\rightarrow Q$ 表示的基本逻辑关系是：Q 是 P 的必要条件或 P 是 Q 的充分条件。复合命题“只要 P，就 Q”、“因为 P，所以 Q”、“除非 Q，才 P”、“除非 Q，否则非 P”、“P 仅当 Q”、“只有 Q，才 P”等均可符号化为 $P\rightarrow Q$ 的形式

例 6 （1）只要不下雨，我就骑自行车上班。

（2）只有不下雨，我才骑自行车上班。

解 设 P：天下雨，Q：我骑自行车上班，则（1）表示为$\neg P\rightarrow Q$，（2）表示为 $Q\rightarrow\neg P$。 ■

5．双条件词$\leftrightarrow$

定义 1.8 *复合命题“P 当且仅当 Q”称为 P 和 Q 的双条件复合命题，记作 $P\leftrightarrow Q$，读作 P 当且仅当 Q。$P\leftrightarrow Q$ 为真当且仅当 P 与 Q 的真值相同。*

例 7 （1）两个三角形全等当且仅当它们的三组对应边相等。

（2）2+2=4 当且仅当雪是黑的。

解 （1）设 P：两个三角形全等，Q：两个三角形的三组对应边相等，则（1）表示为 $P\leftrightarrow Q$。

（2）设 P：2+2=4，Q：雪是黑的，则（2）表示为 $P\leftrightarrow Q$。 ■

与前面的联结词一样，双条件式命题中的两个命题也可以没有因果关系，只要能确定其真值即可。

1.2 命题公式、翻译与真值表

1.2.1 命题公式

定义 1.9 （1）单个命题变元是命题公式。

（2）如果 A 是命题公式，那么 $\neg A$ 也是命题公式。

（3）如果 A，B 是命题公式，那么（$A\wedge B$），（$A\vee B$），（$A\to B$）和（$A\leftrightarrow B$）都是命题公式。

（4）经过有限次地使用（1）、（2）、（3）所组成的有意义的符号串都是命题公式。

上述定义采用的是递归定义方式，以后还将出现这种定义方式。

由定义可知，命题公式是没有真假的，因此它不是命题。仅当在一个公式中命题变元用确定的命题代入时，才得到一个命题。

例 1 $\neg(P\wedge Q)$，$(P\to(P\wedge Q))$，$(((P\to Q)\wedge(Q\to R))\leftrightarrow(P\to R))$都是命题公式。而$\neg P\vee Q\vee$，$((P\to Q)\to(\wedge Q))$，$(P\to Q$ 都不是命题公式。 ■

为了减少命题公式中的括号数量，我们规定：①联结词的优先次序依次为：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\to$，$\leftrightarrow$；②具有相同优先级的联结词，按出现的先后次序进行计算，其括号可以省去；③最外层的括号可以省去。

定义 1.10 设 B 是命题公式 A 的一部分，且 B 也是命题公式，则称 B 是 A 的子公式。

例如，$P\to Q$ 和 $Q\to R$ 都是$((P\to Q)\wedge(Q\to R))\leftrightarrow(P\to R)$的子公式。

1.2.2 命题的符号化

有了命题公式的概念之后，我们就可以把自然语言中的一些句子翻译成命题逻辑中的符号化形式。把一个用文字叙述的命题相应地写成由命题标识符、联结词和圆括号表示的命题公式称为命题的符号化或翻译。

把命题符号化，是不管具体内容而突出思维形式的一种方法。

例 2 将下列命题符号化。

（1）小王现在在宿舍或在图书馆。

（2）李明既聪明又用功。

（3）$\sqrt{2}$ 是有理数的话，$2\sqrt{2}$ 也是有理数。

（4）张三与李四是表兄弟。

（5）除非你努力，否则你将失败。

（6）除非天气好，我才骑自行车上班。

（7）小王晚上要回家，除非天下大雨。

（8）只有睡觉才能恢复疲劳。

（9）只要我还有口气，我就要战斗。

（10）A 中没有元素，A 就是空集。

（11）如果我上街，我就去书店看看，除非我很累。

解 （1）因为“小王现在在宿舍”与“小王现在在图书馆”不能同时成立，所以该命题

符号化为$\neg(P \leftrightarrow Q)$或$(\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$，其中，$P$：小王现在在宿舍，$Q$：小王现在在图书馆。

（2）符号化为 $P \wedge Q$，其中，P：李明聪明，Q：李明用功。

（3）符号化为 $P \rightarrow Q$，其中，P：$\sqrt{2}$是有理数，Q：$2\sqrt{2}$是有理数。

（4）只能将其符号化为 P 的形式，而不能符号化为 $P \wedge Q$ 的形式，因为“张三是表兄弟”、“李四是表兄弟”都不是命题。

（5）符号化为$\neg P \rightarrow Q$，其中，P：你努力，Q：你失败。

（6）符号化为 $P \rightarrow Q$，其中，P：我骑自行车上班，Q：天气好。

（7）符号化为$\neg Q \rightarrow P$，其中，P：小王晚上要回家，Q：天下大雨。

（8）符号化为 $Q \rightarrow P$，其中，P：睡觉，Q：恢复疲劳。

（9）符号化为 $P \rightarrow Q$，其中，P：我还有口气，Q：我要战斗。

（10）符号化为 $P \leftrightarrow Q$，其中，P：A 中没有元素，Q：A 是空集。

（11）符号化为$(\neg R \wedge P) \rightarrow Q$，其中，$P$：我上街，$Q$：我去书店看看，$R$：我很累。 ■

由上面的例子可以看出，要正确地将自然语言中的联结词翻译成适当的命题联结词，需要正确理解各原子命题之间的关系。

1.2.3 真值表

定义 1.11 *设 A 是一个命题公式，p_1，p_2，…，p_n 为出现在 A 中的所有命题变元。给 p_1，p_2，…，p_n 指定一组真值，称为对 A 的一个赋值（或解释或真值指派）。若指定的一组值使 A 为真，称这组值为 A 的一个成真赋值，若使 A 为假，称这组值为 A 的一个成假赋值。*

易知，若 A 有 n 个不同的命题变元，则有 2^n 组不同的赋值。

定义 1.12 *设 A 是含有 n 个命题变元的命题公式，将命题公式 A 在所有赋值之下取值的情况列成表，称为 A 的真值表。*

真值表是一个非常重要的概念，利用它可以解决本章的几乎所有问题，因此，我们要正确地理解和使用真值表。

为了方便列出一个公式的真值表，我们约定：①命题变元按字典序排列；②对公式的每个解释，以二进制从小到大列出；③当公式较复杂时，先列出子公式的真值，最后列出所给公式的真值。

例 3 求下列命题公式的真值表，并求其成真赋值和成假赋值。

（1）$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$。

（2）$\neg(P \rightarrow Q) \wedge Q$。

（3）$(P \rightarrow Q) \wedge \neg R$。

表 1-2

P Q	$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$	$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
0 0	1	1	1
0 1	1	1	1
1 0	0	0	1
1 1	1	1	1

解 （1）、（2）和（3）的真值表如表 1-2、表 1-3 和表 1-4 所示。

由上述真值表可知，（1）的成真赋值为 00，01，10，11，无成假赋值；（2）的成假赋值为 00，01，10，11，无成真赋值；（3）的成真赋值为 000，010，110，成假赋值为 001，011，100，101，111。 ■

1.3 公式分类与等价式

1.3.1 公式分类

根据命题公式在不同解释下的取值情况，可以将命题公式进行分类。

定义 1.13 *设 A 是一个命题公式，对 A 所有可能的解释：*

（1）若 A 都为真，称 A 为永真式或重言式。

（2）若 A 都为假，称 A 为永假式或矛盾式。

（3）若至少存在一个解释使得 A 为真，称 A 为可满足式。

由定义可知，重言式一定是可满足式，但反之不成立。

公式类型的判定方法通常有三种：真值表法、公式法和求主范式法。

表 1-3

P	Q	$P\to Q$	$\neg(P\to Q)$	$\neg(P\to Q)\wedge Q$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

表 1-4

P	Q	R	$P\to Q$	$\neg R$	$(P\to Q)\wedge\neg R$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

例 1 从上一节表 1-2、表 1-3、表 1-4 可知，命题公式$(P\to Q)\leftrightarrow(\neg P\vee Q)$为重言式，$\neg(P\to Q)\wedge Q$ 为矛盾式，$(P\to Q)\wedge\neg R$ 为可满足式。 ■

用真值表法判断公式的类型，一般用于公式中含有较少命题变元的情况。当命题变元较多时，一般采用下面的公式法或求主范式法，但它总是可行的。

1.3.2 等价公式（等值演算）

下面，我们按照公式的真值表是否相同进行分类。同一类中的公式，其本质是一样的，只是表示它们的符号或形式不同而已，我们说它们是等价的。

定义 1.14 *设 A 和 B 是两个命题公式，如 A 和 B 在任意解释下，其真值相同，称 A 与 B 是等价的或逻辑相等，记作 $A\Leftrightarrow B$。*

显然，根据真值表就可以判明任何两个公式是否是等价的。

例 2 证明 $P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(P\to Q)\wedge(Q\to P)$。

证明 命题公式 $P\leftrightarrow Q$ 和$(P\to Q)\wedge(Q\to P)$的真值表如表 1-5 所示。

由表 1-5 可知，$P\leftrightarrow Q$ 与$(P\to Q)\wedge(Q\to P)$在任意解释下真值相同，所以 $P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(P\to Q)\wedge(Q\to P)$。 ■

表 1-5

P	Q	$P\to Q$	$Q\to P$	$(P\to Q)\wedge(Q\to P)$	$P\leftrightarrow Q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

定理 1.1 *对命题公式 A 和 B，$A\Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A\leftrightarrow B$ 是重言式。*

证明 若 $A\leftrightarrow B$ 是重言式，则在任一解释下，$A\leftrightarrow B$ 的真值都为真。依 $A\leftrightarrow B$ 的定义知，当 $A\leftrightarrow B$ 为真时，A 和 B 有相同

的真值。于是，在任一解释下，A 和 B 都有相同的真值，从而有 $A\Leftrightarrow B$。

反过来，若 $A\Leftrightarrow B$，则在任一解释下 A 和 B 都有相同的真值，依 $A\leftrightarrow B$ 的定义知，此时 $A\leftrightarrow B$ 为真，从而 $A\leftrightarrow B$ 是重言式。■

注 “$\Leftrightarrow$”不是联结词，而是表示两个命题公式之间的一种关系。它具有以下性质：

（1）自反性：$A\Leftrightarrow A$。

（2）对称性：若 $A\Leftrightarrow B$，则 $B\Leftrightarrow A$。

（3）传递性：若 $A\Leftrightarrow B$ 且 $B\Leftrightarrow C$，则 $A\Leftrightarrow C$。

1.3.3 基本等价式——命题定律

虽然用真值表法可以判断任何两个命题公式是否等价，但当命题变元较多时，计算量较大。可以先用真值表验证一组等价式，以后作为等值演算的基础，来判断公式之间是否等价。这种证明方法称为公式法。

下面给出 14 组常用的重要等价式。牢记并熟练运用这些公式，是学好数理逻辑的关键之一。

（1）双重否定律：$\neg\neg A\Leftrightarrow A$。

（2）结合律：$(A\vee B)\vee C\Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$，$(A\wedge B)\wedge C\Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$，$(A\leftrightarrow B)\leftrightarrow C\Leftrightarrow A\leftrightarrow(B\leftrightarrow C)$。

（3）交换律：$A\vee B\Leftrightarrow B\vee A$，$A\wedge B\Leftrightarrow B\wedge A$，$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow B\leftrightarrow A$。

（4）分配律：$A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$，$A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$。

（5）等幂律（恒等律）：$A\vee A\Leftrightarrow A$，$A\wedge A\Leftrightarrow A$。

（6）吸收律：$A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A$，$A\wedge(A\vee B)\Leftrightarrow A$。

（7）德·摩根律：$\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$，$\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$。

（8）同一律：$A\vee \mathrm{F}\Leftrightarrow A$，$A\wedge \mathrm{T}\Leftrightarrow A$。

（9）零律：$A\vee \mathrm{T}\Leftrightarrow \mathrm{T}$，$A\wedge \mathrm{F}\Leftrightarrow \mathrm{F}$。

（10）补余律：$A\vee\neg A\Leftrightarrow \mathrm{T}$，$A\wedge\neg A\Leftrightarrow \mathrm{F}$。

（11）条件转化律：$(A\rightarrow B)\Leftrightarrow\neg A\vee B\Leftrightarrow\neg B\rightarrow\neg A$。

（12）双条件转化律：$(A\leftrightarrow B)\Leftrightarrow(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B)$。

（13）输出律：$(A\wedge B)\rightarrow C\Leftrightarrow A\rightarrow(B\rightarrow C)$。

（14）归谬律：$(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow\neg B)\Leftrightarrow\neg A$。

上述定律的正确性均可通过真值表法加以验证。其中最重要的是（4）、（7）和（11），在证明中常用。其余各式可在使用时逐步记住。（5）和（6）对简化公式是有用的。

1.3.4 代入规则和替换规则

定理 1.2（代入规则） 在一个永真式 A 中，任何一个原子命题变元 R 出现的每一处用另一个公式代入，所得公式 B 仍为永真式。

证明 因为永真式对任何解释，其真值都是真，与每个命题变元指派的真假无关，所以，用一个命题公式代入到原子命题变元出现的每一处，所得命题公式的真值仍为真。■

例 3 证明$(P\rightarrow Q)\vee\neg(P\rightarrow Q)$为永真式。

证明 因为 $R\vee\neg R$ 为永真式，由代入规则可知，将 R 用（$P\rightarrow Q$）代入得到的式子仍为

永真式，所以$(P\to Q)\vee\neg(P\to Q)$为永真式。■

定理 1.3（替换规则）　设 A_1 是公式 A 的子公式，若 $A_1\Leftrightarrow B_1$，并且将 A 中的 A_1 用 B_1 替换，得到公式 B，则 $A\Leftrightarrow B$。

证明　因为 $A_1\Leftrightarrow B_1$，即对于它们的命题变元的任意一组赋值，A_1 与 B_1 的真值相同。所以，将 A 中的 A_1 用 B_1 替换后，A 与 B 在对其命题变元的任意赋值下，它们的真值也相同，故 $A\Leftrightarrow B$。■

代入是对原子命题变元而言，而替换可对命题公式进行，代入必须处处代入，替换可部分或全部替换。代入规则可用来扩大永真式的个数，替换规则可增加等价式的个数，也是用公式法证明等价式的依据。

1.3.5　证明两个命题公式等价的方法

有了上面 14 组等价公式、代入规则和替换规则之后，我们就可以推演出更多的等价式。由已知等价式推出另外一些等价式的过程称为等值演算。

两个命题公式等价的证明方法通常有真值表法、公式法和求主范式法，下面只讨论公式法。

例 4　证明下列等价式：

（1）$P\to(Q\to R)\Leftrightarrow Q\to(P\to R)$。

（2）$(P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)$。

证明　（1）

$$\begin{aligned}P\to(Q\to R)&\Leftrightarrow P\to(\neg Q\vee R)\\&\Leftrightarrow\neg P\vee(\neg Q\vee R)\\&\Leftrightarrow\neg Q\vee(\neg P\vee R)\\&\Leftrightarrow\neg Q\vee(P\to R)\Leftrightarrow Q\to(P\to R)\end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned}(P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge Q)&\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)\\&\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg P)\\&\Leftrightarrow\neg((\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee P))\\&\Leftrightarrow\neg((P\to Q)\wedge(Q\to P))\\&\Leftrightarrow\neg(P\leftrightarrow Q)\end{aligned}$$

■

例 5　某件事是甲、乙、丙、丁 4 人中某一个人干的，询问 4 人后回答如下：（1）甲说是丙干的；（2）乙说我没干；（3）丙说甲讲的不符合事实；（4）丁说是甲干的。若其中 3 人说的是对的、1 人说的不对，问是谁干的？

解　设 A：这件事是甲干的，B：这件事是乙干的，C：这件事是丙干的，D：这件事是丁干的。

4 人所说命题分别用 Q，R，S，M 表示，则（1）、（2）、（3）、（4）分别符号化为：

$$Q\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B\wedge C\wedge\neg D;\quad R\Leftrightarrow\neg B;\quad S\Leftrightarrow\neg C;\quad M\Leftrightarrow A\wedge\neg B\wedge\neg C\wedge\neg D$$

3 人对、1 人错的命题 P 符号化为：

$$P\Leftrightarrow(\neg Q\wedge R\wedge S\wedge M)\vee(Q\wedge\neg R\wedge S\wedge M)\vee(Q\wedge R\wedge\neg S\wedge M)\vee(Q\wedge R\wedge S\wedge\neg M)$$

而$(\neg Q\wedge R\wedge S\wedge M)\Leftrightarrow A\wedge\neg B\wedge\neg C\wedge\neg D$，其他三项$\Leftrightarrow$F，所以 P 为真时，$A\wedge\neg B\wedge\neg C\wedge\neg D$ 为真，所以这件事是甲干的。■