

人教大纲版

课后习题

变式思维

K EHOU XITI

B IANSHI SIWEI

高中二年级 · 下册 数学

 课后习题你都会做吗?

 真的会做吗?

 我变! 我变! 我变变变!



 你还会做吗?

安徽教育出版社

课后习题

变式思维

高中二年级·下册

黄严生·编著

数学

图书在版编目 (C I P) 数据

课后习题变式思维. 高二数学. 下册: 人教大纲版 /
黄严生编著. —合肥: 安徽教育出版社, 2003. 12

ISBN 7-5336-3588-4

I. 课... II. 黄... III. 数学课—高中—教学参考
资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 118891 号

总 策 划: 王宏金

责任编辑: 艾尚武 装帧设计: 张鑫坤

出版发行: 安徽教育出版社 (合肥市跃进路 1 号)

网 址: <http://www.ahep.com.cn>

经 销: 新华书店

排 版: 安徽飞腾彩色制版有限责任公司

印 刷: 合肥朝阳印刷有限责任公司

开 本: 720×960 1/16

印 张: 12.25

字 数: 275 000

版 次: 2004 年 1 月第 1 版 2004 年 1 月第 1 次印刷

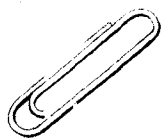
印 数: 3 000

定 价: 12.90 元

发现印装质量问题, 影响阅读, 请与我社发行部联系调换

电 话: (0551) 2651321

邮 编: 230061



特别策划

本书源于我社两大品牌系列——发散思维辅导和聚敛思维训练,历经数年打磨,全新推出,独到之处,可圈可点。

匠心 发散思维和聚敛思维是创新思维的两种方式,统称变式思维。前者的基本特征是思维的求异性,即思考问题时注重多途径、多方案,解决问题时注重举一反三、触类旁通;后者的基本特征是思维的求同性,即思考问题时注重返本归源、寻求共性,解决问题时注重分类比较、归纳演绎。课后习题是深化理解、掌握课本知识的基本方式,注重训练学生的逻辑推理能力。有鉴于此,本书以课后习题(逻辑思维)为支撑点,以发散思维和聚敛思维为两翼,扇形拓展,构成思维训练的“V”形结构。

路径 为了实现上述意图,我们精心设计了一条路径:

——根据课本节后习题侧重分析理解的特征,每节筛选了部分习题(含自设题)作为母题,按既定的各种发散思维方法,衍生出一系列子题,并通过“发散点拨”的形式,阐明子题的逻辑起点及其发散路径。同时,对母题进行“题说”和“解读”,对子题予以“盲点警示”,引领学生找到解题的出发点和正确思路。

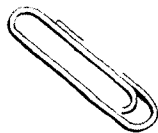
——根据课本章后习题侧重综合概括的特征,每章筛选了部分习题(含自设题)作为子题簇,按既定的各种聚敛思维方法,整合成一个或几个母题,并通过“聚敛互动”的形式,在母题与子题簇之间架起一座座桥梁,引领学生理解本章知识的内在结构和解题规律。

——为了检验学生“变式思维”的效果,全书设置了期中和期末《变式思维测试卷》,其内在结构体现了“发散思维”和“聚敛思维”的特点。

效能 本书的结构设置还具有一个独一无二的助学效能:由于子题和母题是课本习题的渐次拓展与延伸,学生可借此检测课堂学习效果;家长可借此检查学生对课本知识的掌握程度。

最后,“原来如此”会告诉你所有问题的答案,它将给你一个惊喜:解题的正确率提高啦!





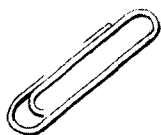
数学·发散思维方法释义

- 转化发散** 保持母题的内涵条件,纵横探索,发掘新目标,形成因果关系。
- 迁移发散** 利用概念、原理、方法和技能在不同知识层次中的等价关系,运用现有的知识和方法解决新问题。
- 逆向发散** 保持母题的知识内涵,交换目标与条件,换位思考。
- 分解发散** 把一个复合问题分解成若干个简单问题,逐一分析解决。
- 应用发散** 运用学科知识、方法和技能解释或解决日常生活和生产实际中的现象与问题,或者进行某些实验的验证和探索。
- 构造发散** 通过逻辑思维和丰富的联想,围绕母题恰当地构造出某些元素,或构造元素之间的一种新的组合形式,从而使问题得以解决。
- 隐含条件发散** 挖掘题目的隐含(如临界、必要或充分)条件,拓展解题途径。
- 变更命题发散** 变更命题的方式,如维持母题的条件而改变目标,或改变母题的条件而维持原目标不变,或同时改变母题的条件、目标思考问题。

数学·聚敛思维方法释义

- 抽象概括** 从所考察的问题出发,撇开个别的、非本质的因素,抽出其共同的、本质的属性,形成数学思想的思维方法。
- 假设反驳** 对那些不易直接证明其正确性的问题,证明原结论的反面不成立的思维方法。
- 归纳演绎** 由个别的判断推出一般的判断(归纳)或由一般的判断推出个别的判断(演绎)的思维方法。
- 类比映射** 依据两类事物或两个对象之间的某些相似或相同属性,利用一类事物的研究方法或属性,研究或猜测另一类事物的思维方法。
- 建模化归** 依据一定的规则,对所研究的实际问题进行抽象,构建数学模型,并归结为求数学模型解的思维方法。
- 比较筛选** 梳理不同对象或事物间的联系与区别,进行分析、比较和评价,从而得到最佳结论的思维方法。
- 统摄整理** 将繁杂零散的知识进行整合,纵横联系,使之连点成线,形成网络;或将各种现象、信息,按其本质联系系统摄成规律,以利于进行逻辑推理或再造现象的思维方法。
- 数形结合** 从数和形的相互依赖、相互制约的关系出发,将抽象思维与形象思维结合起来解决问题的思维方法。
- 探究应用** 借助基本理论和原理,探究设计合理的解决生产、生活实际问题的学科内或跨学科的思维方法。

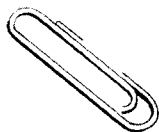




目 录

第九章 直线、平面、简单几何体	1
一 空间的直线与平面	1
9.1 平面的基本性质	1
母题发散思维	1
9.2 空间的平行直线与异面直线	8
母题发散思维	8
9.3 直线和平面平行与平面和平面平行 ...	13
母题发散思维	13
9.4 直线和平面垂直	20
母题发散思维	20
二 空间向量	26
9.5 空间向量及其运算	26
母题发散思维	26
9.6 空间向量的坐标运算	33
母题发散思维	33
三 夹角与距离	39
9.7 直线和平面所成的角与二面角	39
母题发散思维	39
9.8 距离	46
母题发散思维	46
四 简单多面体与球	53
9.9 棱柱与棱锥	53
母题发散思维	53
9.10 研究性课题:多面体欧拉定理的发现 ...	60
母题发散思维	60
9.11 球	60





母题发散思维	63
子题聚敛思维	65
期中变式思维测试卷	77
第十章 排列、组合和概率	80
一 排列与组合	80
10.1 分类计数原理与分步计数原理	80
母题发散思维	80
10.2 排列	84
母题发散思维	84
10.3 组合	89
母题发散思维	89
10.4 二项式定理	96
母题发散思维	96
二 概率	101
10.5 随机事件的概率	101
母题发散思维	101
10.6 互斥事件有一个发生的概率	107
母题发散思维	107
10.7 相互独立事件同时发生的概率	111
母题发散思维	111
子题聚敛思维	119
期末变式思维测试卷	136
原来如此	139



第九章 直线、平面、简单几何体

一 空间的直线与平面



9.1 平面的基本性质

母题发散思维

母题簇 1

1. 能不能说一个平面有边界?

2. 当线段 AB 在平面 α 内时, 直线 AB 是否在平面 α 内? 为什么?

3. 当直线 l 不在平面 α 内, 直线 l 与平面 α 的公共点最多有几个?

4. 判断下列命题的真假:

(1) 如果平面 α 与平面 β 相交, 那么它们只有有限个公共点;

(2) 过一条直线的平面有无数多个;

(3) 两个平面的交线可能是一条线段;

(4) 两个相交平面有不在同一条直线上的三个公共点;

(5) 经过空间任意三点有且只有一个平面;

(6) 如果两个平面有三个不共线的公共点, 那么这两个平面就重合为一个平面.

5. 下列说法正确吗?

(1) 已知直线 l 和 l 外一点 A , 那么连结 A 和 l 上任一点的直线都在点 A 和直线 l 确定的平面内;

(2) 一个角一定是平面图形.

6. 用符号表示下列语句:

(1) 点 A 在平面 α 内, 点 B 不在平面 α 内;

(2) 直线 l 在平面 α 内;

(3) 平面 α 与平面 β 相交于直线 l .

题视: 此母题簇主要考查平面的概念、无限延展、无大小等属性; 考查三种数学语言(文字语言, 符号语言, 图形语言)之间相互转化的能力.

解读: 1. 不能.



2. 因为直线上有两点在平面 α 内, 则这条直线在平面 α 内, 所以直线 AB 在平面 α 内.

3. 1 个.

4. (1) 错; (2) 对; (3) 错; (4) 错; (5) 错; (6) 对.

5. (1) 正确; (2) 正确.

6. (1) $A \in \alpha, B \notin \alpha$; (2) $l \subset \alpha$; (3) $\alpha \cap \beta = l$.

【转化发散】

子题 1-1 判断下列说法是否正确? 并说明理由.

(1) 平面的形状是平行四边形;

(2) 任何一个平面图形都是一个平面;

(3) 因为平行四边形 $ABCD$ 的面积大于平行四边形 $A'B'C'D'$ 的面积, 所以平面 $ABCD$ 大于平面 $A'B'C'D'$;

(4) 用平行四边形表示平面, 以平行四边形的四条边作为平面的边界.

发散点拨 利用平面的延展性、平面无大小等性质, 判断命题的真假.

我的解答

子题 1-2 试分别画出满足下列条件的直线和平面.

(1) 直线 l 在平面 α 内; (2) 直线与平面 α 相交; (3) 直线与平面 α 无公共点.

发散点拨 根据直线与平面的位置关系画出图形, 即将文字语言转化为图形语言.

我的解答

【变更命题发散】

子题 1-3 (1) 下列命题中, 正确的是().

A. 空间三点可以确定一个平面

B. 两条直线可以确定一个平面

C. 两条相交直线可以确定一个平面

D. 一点和一条直线可以确定一个平面

(2) 三个互不重合的平面把空间分成六个部分时, 它们的交线有().

A. 1 条

B. 2 条

C. 3 条

D. 1 条或 2 条

(3) 四条线段顺次首尾相连, 它们最多可确定的平面个数有().

A. 4 个

B. 3 个

C. 2 个

D. 1 个

(4) 在空间四点中, 三点共线是四点共面的().

A. 充分必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充分非必要条件

D. 既非充分又非必要条件

发散点拨 改变母题簇中的第 4、5 题的形式, 发散为根据平面的性质分析问题, 进而确定正确选项.

我的解答

子题 1-4 “若 A, B 在平面 α 内, 点 C 在直线 AB 上, 则点 C 在平面 α 内”. 用符号语言表述



这一命题为 $A, B \in \alpha, C \in AB \Rightarrow C \in \alpha$

发散点拨 改变母题的命题形式, 发散为运用元素与集合的关系表示点与直线、点与平面的关系.

我的解答

【迁移发散】

子题 1-5 用符号表示下列语句, 并画图:

- (1) 直线 a, b 在平面 α 内, 且直线相交于点 M ;
- (2) 直线 a 在平面 α 内, 直线 a 与 b 交于点 M , 且直线 b 在 α 外;
- (3) 直线 a 与 b 交于平面 α 内一点 M , a, b 都在 α 外;
- (4) 平面 α 与平面 β 相交于直线 l , 点 M 在平面 β 内, 直线 m 在平面 α 内, 且 m 与 l 相交于点 N .

发散点拨 母题簇中的第 6 题是将文字语言转化为符号语言, 迁移发散为用图形语言和符号语言表示文字语言.

我的解答



重点警示

点是元素, 直线和平面都是集合, 注意符号不要出错.

母题簇 2

1. 证明:

- (1) 经过两条相交直线有且只有一个平面;
- (2) 经过两条平行直线有且只有一个平面.

2. 为什么说平行四边形和梯形是平面图形?

3. 如图 9-1, 已知 A, B, C 是空间不共线的三点, 画出直线 AB, BC, CA , 设 X, Y, Z 分别表示直线 BC, CA, AB 上任意一点, 那么三组直线 $\{AX\}, \{BY\}, \{CZ\}$ 是否都在平面 ABC 内? 为什么?

4. 四条线段首尾连接, 所得的图形一定是平面图形吗? 为什么?

5. 一条直线和两条平行直线都相交, 这三条直线是否共面?

6. 如图 9-2, 三条直线两两平行且不共面, 每两条确定一个平面, 一共可以确定几个平面? 如果三条直线相交于一点, 它们最多可以确定几个平面?

题视: 此母题簇考查平面的性质、空间几何的三个公理及其推论; 考查学生的逻辑推理能力.

解视: 1. (1) 已知: 直线 $a \cap b = A$, 求证: 过直线 a, b 有且只有一个平面.

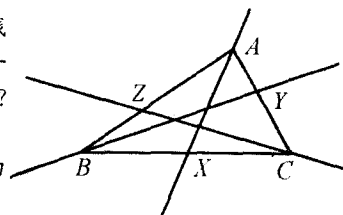


图 9-1

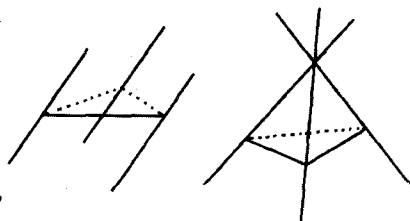


图 9-2

证明:如图 9-3, 直线 $a \cap b = A$, 在直线 a, b 分别取不同于点 A 的点 B, C . 由公理 3 可知, 经过不共线的三点 A, B, C 有一个平面 α . 因为点 A, B, C 在平面 α 内, 所以根据公理 1, 直线 a, b 都在平面 α 内, 即平面 α 是经过 a, b 的平面. 又经过 a, b 的平面一定经过点 A, B, C , 于是在根据公理 3, 经过不共线的三点 A, B, C 的平面只有一个. 所以经过直线 a, b 的平面只有一个.

(2) 已知: 直线 $a \parallel b$, 求证: 过直线 a, b 有且只有一个平面.

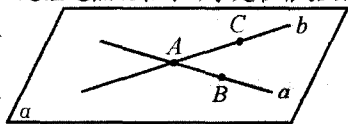


图 9-3

证明: 在直线 a 上取两点 A, B , 在直线 b 上取一点 C . 因为直线 $a \parallel b$, 所以 A, B, C 三点不共线, 过 A, B, C 三点有且只有一个平面 α . 由公理 1, $a \subset \alpha$. 若直线 $b \not\subset \alpha$, 在平面 α 内, 过点 C 作直线 m , 使 $m \parallel a$, 这样过直线 a 外一点 C 有两条直线都与直线 b 平行, 这是不可能的. 所以 $b \subset \alpha$. 所以过直线 a, b 有且只有一个平面.

2. 因为平行四边形的两组对边分别平行, 可确定一个平面; 梯形有一组对边平行, 可确定一个平面.

3. 由公理 1 知, 它们都在平面 ABC 内.

4. 不一定.

5. 设直线 $a \parallel b, a \cap c = A, b \cap c = B$, 则直线 a, b 确定一个平面 α . $\therefore A, B \in \alpha, \therefore c \subset \alpha$, 即直线 a, b, c 共面.

6. 3 个, 3 个.

【变更命题发散】

子题 2-1 两两相交的四条直线确定平面的个数最多的是 ()

- A. 4 个 B. 5 个 C. 6 个 D. 8 个

重点警示

三直线交于一点,
且不共面时它们确定的
平面数最多.



发散点拨 将母题簇中的第 6 题的题设变为三直线两两相交, 保留其设问目标, 运用两条相交直线确定一个平面, 根据图形的极端情况分析所确定平面的个数.

我的解答

子题 2-2 (1) 一条直线和这条直线外不在同一直线上的三点, 可以确定多少个平面? 并说明理由?

(2) 两两相交的三条直线可以确定几个平面? 为什么?

发散点拨 同时改变母题簇中第 3, 5, 6 题的题设和设问目标, 发散为根据平面的性质, 分析各种可能情况下所确定的平面个数.

我的解答



【迁移发散】

子题 2-3 在空间四边形 $ABCD$ 的边 AB, BC, CD, DA 上分别取 E, F, G, H 四点, 如果 EF 与 HG 交于点 M , 则().

A. M 一定在直线 AC 上

B. M 一定在直线 BD 上

C. M 可能在 AC 上, 也可能在 BD 上

D. M 不在 AC 上, 也不在 BD 上

发散点拨 将母题簇中运用公理 1, 2 分析问题, 迁移发散为运用公理 3, 即两个不重合平面的公共点, 必在它们的交线上, 判断直线共点.

我的解答

子题 2-4 如图 9-4, 已知: $\triangle ABC$ 三边所在直线分别与平面 α 交于 P, Q, R 三点, 求证: P, Q, R 三点共线.

发散点拨 解决此题的关键是证明: “ P, Q, R 三点都是两个平面的公共点”, 由公理 3 知, 两平面相交于过公共点的一条直线.

我的解答

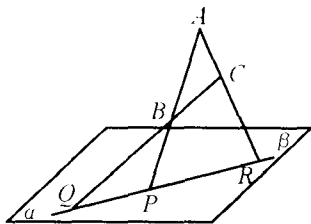


图 9-4

【转化发散】

子题 2-5 已知 a, b, c, d 是两两相交且不共点的四条直线, 求证: 直线 a, b, c, d 共面.

发散点拨 将母题簇的第 3 题判断三直线共面, 转化为证明四条直线共面. 证明其中两条直线上分别有两个点在另外两条直线所确定的平面内.

我的解答

重点提示
有两种情况: 有三线交于一点; 任意三线都不交于一点.

子题 2-6 已知: $a \subset \alpha, b \subset \alpha, a \cap b = A, P \in b, PQ \parallel a$. 求证: $PQ \subset \alpha$.

发散点拨 将母题簇中的第 1 题根据两个平面有三个不共线的公共点, 证明两个平面重合. 转化为通过证明 PQ 与 α 所确定平面与平面 α 重合, 进而判定直线在平面内.

我的解答

【应用发散】

子题 2-7 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P, Q, R 分别在 AA_1, BB_1, DD_1 上 (见图 9-5).

(1) 画出直线 C_1P 与平面 $ABCD$ 的交点;

(2) 画出经过 C_1, Q, R 三点的截面.



发散点拨 应用公理 1,3 将线面交点转化为线线交点;将画平面与平面的交线转化为先找出两个平面的两个公共点,再画出两个平面的交线,从而画出截面.

我的解答

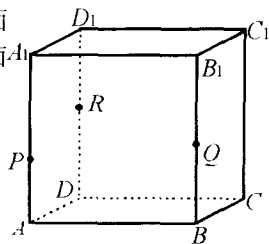


图 9-5

【逆向发散】

子题 2-8 已知直线 a 与 b 不共面, $c \cap a = M$, $b \cap c = N$, $a \cap \text{平面 } \alpha = A$, $b \cap \text{平面 } \alpha = B$, $c \cap \text{平面 } \alpha = C$, 求证: A, B, C 三点不共线.

发散点拨 运用反证法证明,通过假设、推理,产生矛盾,反驳假设,肯定原命题的结论.

我的解答

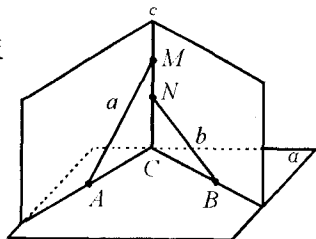


图 9-6

母题簇 3

1. 下列说法正确吗?

- (1) 水平放置的正方形的直观图可能是梯形;
- (2) 两条相交直线的直观图可能平行;
- (3) 互相垂直的两直线的直观图仍然互相垂直.

2. 如图 9-7, 已知 $\triangle ABC$ 在一个平面内的直观图是 $\triangle A'B'C'$, 如何画 $\triangle ABC$ 的 BC 边上中线在这个平面内的直观图 $A'M'$.

3. 用斜二测画法画下列图形:

- (1) 棱长为 3 cm 的正方体;
- (2) 长、宽、高分别为 5 cm、4 cm、3 cm 的长方体.

4. 画水平放置的等腰梯形和正方形.

5. 怎样检查一张桌子的四条腿的下端是否在同一平面内?

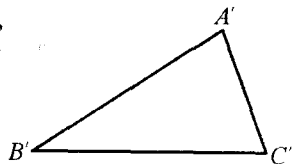


图 9-7

题视:此母题簇考查运用斜二测画法画水平放置的平面图形和空间图形的能力. 通过画图培养学生的空间想像能力.

解读:1. (1)错;(2)错;(3)错.

2. 取 $B'C'$ 的中点 M' , 连 $A'M'$ 即可.

3. 略. 4. 略.

5. 将桌子四条腿朝上, 再把两条绳子拉紧分别按在对角的两腿的下端, 如果这两条绳子相交于一点, 那么这四条腿的下端就在同一平面内.

【变更命题发散】

子题 3-1 下列关于直观图画法的说法不正确的是().

- A. 原图形中平行于 y 轴的线段, 其对应线段平行于 y' 轴, 长度不变
- B. 原图形中平行于 x 轴的线段, 其对应线段平行于 x' 轴, 长度不变
- C. 画与 xOy 对应的 $x'Oy'$ 时, $\angle x'Oy'$ 可以画为 45°
- D. 在画直观图时, 由于选轴的不同所画的直观图也不同

发散点拨 改变母题簇中第 1 题设问方式, 发散为根据斜二测画法的法则确定正确选项.

我的解答

子题 3-2 (1) 画出图 9-8 水平放置的直观图;

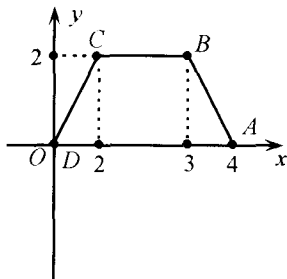
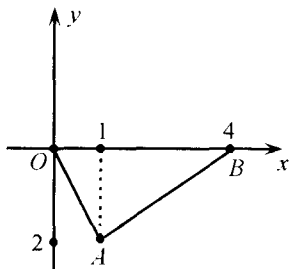


图 9-8

(2) 画长、宽、高分别为 3 cm、2 cm、4 cm 的长方体的直观图.

发散点拨 将母题簇中第 2, 3, 4 题变为子题的形式, 运用斜二测画法画出平面图形水平放置的直观图.

我的解答

【逆向发散】

子题 3-3 图 9-9 是按斜二测画法所得的直观图, 请画出原图.

发散点拨 母题簇中是根据平面图形运用斜二测画法画直观图, 逆向发散为根据直观图运用斜二测画法的法则画出原图.

我的解答

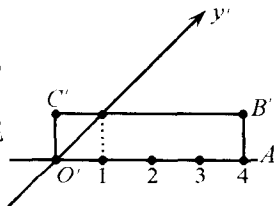


图 9-9

【分解发散】

子题 3-4 已知用斜二测画法画出一平面图形的直观图是底角等于 45° , 上底和腰均为 1 的等腰梯形 (如图 9-10), 求原图形的面积.

发散点拨 先确定原图中点 C、B 的位置, 然后画出原图.

我的解答

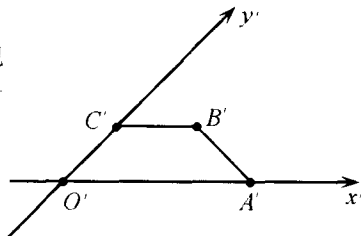


图 9-10





9.2 空间的平行直线与异面直线

母题发散思维

母题簇 1

1. 什么是平行直线？什么是异面直线？说出它们的共同点和不同点。

2. 画两个相交平面，在这两个平面内画一条直线，使它们成为：

(1) 平行直线；(2) 相交直线；(3) 异面直线。

3. 如图 9-11，已知 AA' 、 BB' 、 CC' 不共面，且 $AA' \parallel BB'$ ， $AA' = BB'$ ， $BB' \parallel CC'$ ， $BB' = CC'$ ，求证： $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ 。

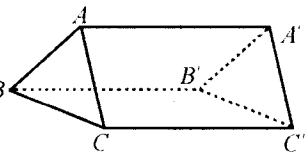


图 9-11

4. 如图 9-12，在正方体中 $AE = A_1E_1$ ， $AF = A_1F_1$ ，求证： $EF \parallel E_1F_1$ ，且 $EF = E_1F_1$ 。

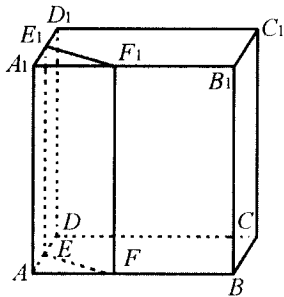


图 9-12

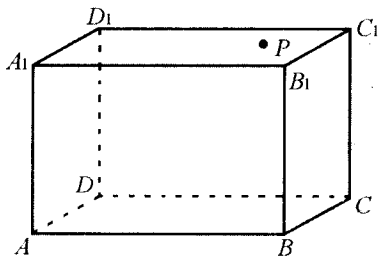


图 9-13

5. 如图 9-13，长方体的木块的 A_1C_1 面上有一点 P ，过点 P 画一条直线和 BC 平行，说明理由。

6. 和两条异面直线 AB 、 CD 都相交的直线 AC 、 CD 一定是异面直线。为什么？

题说：此母题簇考查异面直线的概念，平行公理等知识，运用其分析问题和解决问题的能力；考查逻辑推理能力和空间想像能力。

解读：1. 在同一平面内，没有公共点的两条直线叫做平行直线。不同在任何一个平面内的两条直线叫做异面直线。两者的共同点是都没有公共点，两者的区别是前者在同一平面内，后者不在任何一个平面内。

2. 如图 9-14，(1) 平行直线；(2) 相交直线；(3) 异面直线。

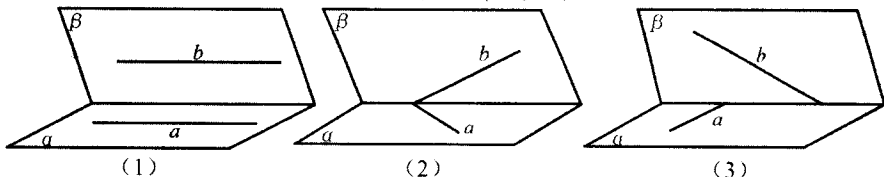


图 9-14



3. $\because AA' \parallel BB', AA' = BB', AA'BB'$ 是平行四边形,

$\therefore AB = A'B',$ 同理 $BC = B'C', AC = A'C',$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$

4. 证明:如图 9-12, 连结 EF, E_1F_1 , 可得矩形 AEE_1A_1 和矩形 AFF_1A_1 . 由此可得四边形 EE_1F_1F 是平行四边形. $\therefore EF \parallel E_1F_1$ 且 $EF = E_1F_1$.

5. 在面 A_1C_1 内, 过点 P 作一直线平行于 B_1C_1 , 这条直线就是要画的直线. 因为 $B_1C_1 \parallel BC$, 根据平行公理, 所画的直线平行于 BC .

6. 一定是异面直线.

如图 9-15, 假设直线 AC, CD 在同一平面 α 内, 则 $A, B, C, D \in \alpha$,

所以, 直线 $AB, CD \subset \alpha$,

这与已知直线 AB, CD 是异面直线矛盾.

$\therefore$ 直线 AC, CD 一定是异面直线.

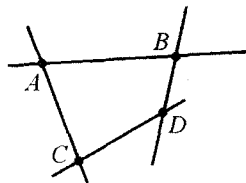


图 9-15

【转化发散】

子题 1-1 (1) 空间两条直线是异面直线, 则它们().

- A. 没有公共点 B. 不在同一平面内
C. 分别在两个不同的平面内 D. 不同在任何平面内

(2) 两条直线不平行是这两直线异面的().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

发散点拨 运用异面直线和平行直线的异同点分析问题.

我的解答

子题 1-2 空间两直线 a, b , 同时垂直于第三条直线 c , 则直线 a, b 的位置关系是().

- A. 平行 B. 相交 C. 异面 D. 平行、相交或异面

发散点拨 将母题簇中画各种位置关系空间两直线, 转化为运用异面直线的概念分析空间中垂直同一直线的两直线的位置关系. 可以是共面垂直于同一直线, 也可以异面垂直同一直线. 可以是相交垂直, 也可以不相交垂直.

我的解答

【逆向发散】

子题 1-3 如图 9-15, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别是 BC, CC_1 的中点, 试分析下列三对直线的位置关系: (1) EF 与 AA_1 ; (2) EF 与 AD_1 ; (3) AE 与 D_1F .

发散点拨 将母题簇中第 2 题用图形语言表示空间两直线的三种位置关系, 逆向发散为根据图形判定各对直线的位置关系.

我的解答

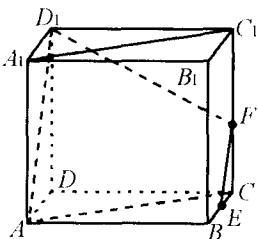


图 9-15

高亮警示

注意: 平面几何中有些定理和公理在空间几何中不成立!



【变更命题发散】

子题 1-4 如图 9-16, 已知不共面的三条直线 a 、 b 、 c 交于点 P , 点 $A, B \in a, C \in b, D \in c$, 求证: AD 与 BC 是异面直线.

发散点拨 改变母题簇中第 6 题的题设, 保留其结论. 运用反证法证明命题, 由假设出发推出 a, b, c 三直线共面, 产生矛盾.

我的解答

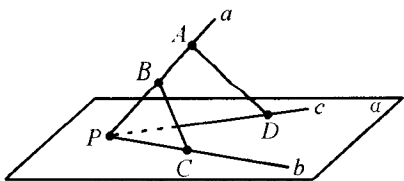


图 9-16

子题 1-5 如图 9-17, P 是 $\triangle ABC$ 所在平面外一点, D, E 分别是 $\triangle PAB$ 和 $\triangle PBC$ 的重心, 求证: $DE \parallel AC$, 且 $DE = \frac{1}{3}AC$.

发散点拨 将母题簇中的第 5 题是运用平行公理画直线, 变为运用平行公理和相似三角形的性质, 平面几何中的平行线分线段成比例定理证明两线的位置关系和数量关系.

我的解答

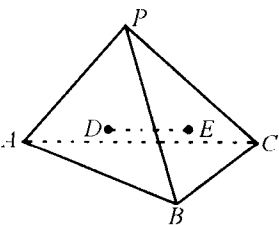


图 9-17

【迁移发散】

子题 1-6 如图 9-18, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N 分别为 C_1D_1, A_1D_1 的中点, 求证: 四边形 $MNAC$ 是梯形.

发散点拨 运用平行公理证明四边形是梯形即证: $MN \parallel AC$, $MN \neq AC$.

我的解答

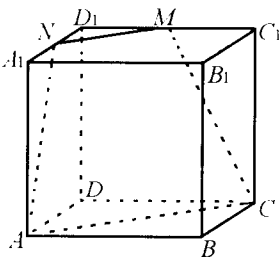


图 9-18

【构造发散】

子题 1-7 如图 9-19, 空间四边形 $ABCD$ 中, M, N, P, Q 分别是边 AB, BC, CD, DA 的中点,

(1) 试研究四边形 $MNPQ$ 是什么样的特殊四边形;

(2) 若 $AC = a, BD = b, AC$ 与 BD 所成的角为 θ , 当 θ 为何值时四边形 $MNPQ$ 的面积最大? 最大值是多少?

发散点拨 运用平行公理证明四边形 $MNPQ$ 是平行四边形, 用 $\sin \theta$ 表示平行四边形的面积, 根据正弦函数的有界性, 探究 θ 取何值时, 四边形 $MNPQ$ 的面积最大.

我的解答

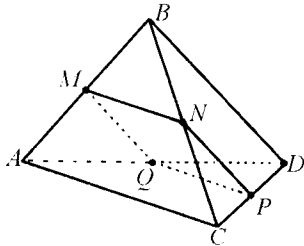


图 9-19

