现代数学基础丛书 101

代数群引论

黎景辉　陈志杰　赵春来　著

科学出版社
www.sciencep.com

中国科学院科学出版基金资助出版

现代数学基础丛书　101

代数群引论

黎景辉　陈志杰　赵春来　著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书同时介绍两类代数群：线性代数群和Abèl概形．全书分为三篇．第一篇介绍定义在代数闭域上的线性代数群，主要讨论根系结构，并且讨论线性代数群的Galois上同调理论及算术性质．第二篇讨论群概形，分成两个部分．前两章是有限群概形，其余三章是讲Abel概形的基本理论．第三篇讨论代数环面的算术性质，并介绍互反律到代数环面上的一个推广．

本书可供大学数学系学生、研究生、教师及相关的研究人员参考．

图书在版编目(CIP)数据

代数群引论/黎景辉，陈志杰，赵春来著．—北京：科学出版社，2006.9

(现代数学基础丛书；101/杨乐主编)

ISBN 7-03-017861-0

I.代… II.①黎… ②陈… ③赵… III.代数群 IV.O187.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第096713号

责任编辑：吕　虹／责任校对：桂伟利

责任印制：安春生／封面设计：王　浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

天时彩色印刷有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2006年9月第 一 版　开本：B5(720×1000)

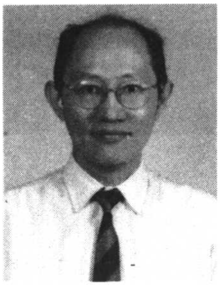
2006年9月第一次印刷　印张：29 1/2

印数：1—3 000　字数：559 000

定价：68.00元

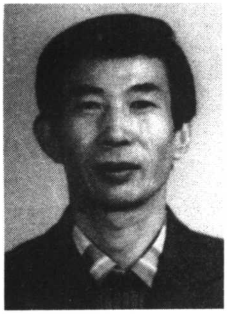
(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

作 者 简 介



黎景辉，澳大利亚悉尼大学数学系教授，国际知名的数学家．1974 年在美国耶鲁大学获博士学位，曾在世界上若干重要的研究机构和高等学校任职．主要的研究方向是代数学，在现代数论的主要方向（模形式与自守表示、算术代数几何）上都有很深的造诣．

陈志杰，华东师范大学数学系教授、博士生导师．1962 年毕业于华东师范大学数学系．主要研究方向是代数几何和代数群，特别是代数曲面的分类理论．



赵春来，北京大学数学科学学院教授、博士生导师．1984 年在北京大学获博士学位．主要研究方向是代数数论，特别是椭圆曲线的算术理论．

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了十余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高作出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

前　言

本书讲述代数群. 我们将同时介绍两类代数群: 线性代数群和 Abel 概形.

考虑矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 其中 a, b, c, d 为满足条件 $ad - bc = 1$ 的复数. 由这样的矩阵所组成的集合记作 G. 按矩阵乘法, G 便是一个线性代数群.

取复数 g_2, g_3, 使得 $g_2^3 \neq 27g_3^2$. 以 $\mathbb{P}^2$ 记复数域上的射影平面, 以 x, y, z 记 $\mathbb{P}^2$ 上的齐次坐标. 在 $\mathbb{P}^2$ 内满足方程

$$zy^2 = 4x^3 - g_2xz^2 - g_3z^3$$

的点所组成的集合记为 E. 利用椭圆函数的加法性质可以在 E 上定义交换群结构, 并且这个群的运算可以用多项式来表达. 在这个意义下, E 是一个交换射影代数群. 我们常称 E 为椭圆曲线. 把椭圆曲线推广至相对高维数时便是本书所介绍的 Abel 概形.

科学知识的整理和传播是科教兴国的一个重要支柱, 编写教材是达到这个目的的有效手段. 本书的目的是帮助读者学习代数群论.

说起代数群论的历史, 就要从 Gauss 的 "算术教材"("Disquisitiones Arithmeticae", 1801) 开始. 它详论了二次型, 在此书的最后一部分讨论了带复乘的椭圆曲线. 至于矩阵群, 自从有了群和矩阵的概念, 就开始被研究了. 由二次型所决定的线性代数群便是正交群. 但是真正研究代数群, 则应该从 20 世纪 50 年代 Weil, Dieudonné, 华罗庚, Chevalley, 段学复算起 (见文献 [51] 序言). 不久又进入 Grothendieck 时代, 加上代数数论不断提出新的要求, 代数群论就不停地向前发展. 由于代数群以代数几何为语言, 所以便从 Weil 的代数簇体系转移到 Grothendieck 的概形 – 态射体系.

在代数群方面我国一直具有优秀的工作, 也出版过一批很好的书. 关于典型群有 [8]; 对于实数域的情形有 [7], [16], [4], [20], [19]; 关于 Abel 簇的研究有 [238]. 另一方面, 华东师大在曹锡华领导下自 20 世纪 80 年代以来建立了非常成功的强有力的代数群与量子群的基地, 人才辈出 (可参见文献 [1], [78], [299], [337], [406], [404], [109], [405] 等). 这里不能详列, 读者可去 MathSciNet 查找.

全书分为三篇 ①. 在第一篇, 我们介绍定义在代数闭域上的线性代数群 G, 主要是讨论 G 的根系结构. 然后, 我们讨论线性代数群的 Galois 上同调理论及算术性质.

---

①因为本书三篇内容相对独立, 故各篇体例, 如章节、定义、定理、公式等序号自成体系.

第二篇讨论群概形, 分成两个部分. 前两章是有限群概形, 研究的方法和第一篇完全不同. 我们把群概形看作层, 如此便可用同调代数的方法. 为了明白 Abel 概形的挠点, 这部分是必要的.

第二篇其余三章是讲 Abel 概形的基本理论, 在域上的 Abel 概形的理论在 Mumford 的教科书中已有很好的介绍，但是不能避免在一般概形 S 上的 Abel 概形.

以上三种代数结构：线性代数群、Abel 概形和有限平坦群概形, 除了它们都是重要的代数群之外, 还有更重要的原因令我们需要同时了解它们. 比如要了解 Wiles 的费马大定理的证明或要了解来自典型群的志村簇 (Shimura variety) 是 Abel 概形的模空间时, 线性代数群与 Abel 概形是同时出现的, 也是无可避免的.

第三篇讨论代数环面的算术性质. 正如 Abel 簇是具有交换群结构的射影簇, 代数环面则是具有交换群结构的仿射簇. Tate 把代数数域的算术结果推广到代数环面上, 接着 Ono 计算了代数环面的玉河数 (Tamagawa number).

类域论是代数数论的重要部分之一, 而互反律 (reciprocity law) 则是类域论中的中心定理. 在数域上的互反律是首先由日本人高木贞治 (Takagi) 用解析方法证明的, 互反律的代数证明是由 Chevalley、中山正 (Nakayama)、Artin、Tate、Neukirch、Vostokov 发展起来的. 可以说经典的互反律是叙述交换扩张的结构, 而 Langlands 的著名猜想是把互反律推广到非交换扩张去. 这是一个尚未解决的课题. 我们将介绍互反律的一个比较简单的推广：即推广到代数环面上. 这是 Langlands 的工作.

我们假定读者有研究生的基础代数知识. 此外, 代数数域是一个最基本的代数群, 所以读者最好先学习一点初步的代数数论, 如 [3]. 在阅读第一篇之前, 我们假设读者学过代数簇的初等理论, 如 [27] 的第一章或 [14]. 要阅读本书的第二篇, 读者需要具备概形的基本知识, 如 [27] 的第二章或 [14], 并且需要了解概形与函子的关系, 这方面的一些预备知识可以参看 [11]. 在念第二篇后三章之前, 最好能先能学习一点椭圆曲线和 Abel 簇. 椭圆曲线的标准教科书是 [347]; Abel 簇的名家的作品是 [264]. 要了解第三篇, 读者需具备用上同调方法处理类域论的知识.

我们谈谈参考文献. 书末所列的参考文献当然并不完全, 读者在 MathSciNet 上可以查看到全面的文献. 像 [259] 的几何不变量论在 1965 年第一版的参考文献只有 41 篇, 到了 1994 年第 3 版就增加到了 926 篇!

1. 本书第一篇所讨论的线性代数群是指一个带有群结构的定义在域 k 上的仿射簇. 当 k 是代数封闭域时, 经典的资料是 20 世纪 50 年代在巴黎的 Chevalley Seminar[82] (这便是 [147] 中所引的 BIBLE) 和 Rosenlicht 及 Borel 的两篇文章 [313][46]. 接着是 Borel 与 Harish-Chandra 关于算术子群的文章 [52], Borel-Tits 关于抛物子群结构的文章 [54] 以及 Steinberg 关于 Chevalley 群的在 Yale 的讲

义[358] 和 Steinberg 关于正则半单元的结构[359]. 当基域是非阿域 (non-archimidian field) 时, 一方面有 Kneser[200], Harder[155][156] 及 Chernousov[79] 的工作, 另一方面有 Bruhat-Tits 非常有创见的工作[67], 他们引入了 Affine Building 这个新概念, 并用此概念考察非阿域上的线性代数群的结构, 这是研究这些群的无限维表示和局部 Langlands 对应的重要工具.

近些年来人们考虑一些有特定性质的域上的线性代数群的结构, 例如研究所谓 R-Equivalence (Colliot-Thélène, Sansuc, Borovoi, Merkelev) 以及研究高维局部域上 Building 的结构 ([300]).

关于线性代数群的参考书有 [46], [169], [172], [354], [301], [70], [71], [387], [398] 和 [196]. 关于线性代数群的表示可看 [182], [1]. 比较近期的结果可看 Habush-Parshall[154] 编辑的会议记录.

2. 对于有限群概形最早的系统的研究当属 Grothendieck 的 [147] 以及 Dieudonné, Manin, Honda 三人的工作. 与志村簇有关的这方面的工作见 [207], [213].

3. 在第二篇第三、四、五章我们只是介绍了 Abel 概形的一些初浅的性质.

传统的 Abel 簇参考书是: [394], [225], [331]. 这几本书互不包含对方, 又不包括 [273]. 在 Weil 与 Néron 的基础上, 还有 [339]. 以上的工作都是用 [393] 的语言. 现行的 Abel 簇的教科书是 [264], 但这本书并不包含以上几本书的内容.

关于 Abel 概形可以看 [116], [371], [307], [120], [121], [63], [256], [94], [87], [288], [289], [275], [72], [407], [408], [189], [310], [93], 还有 D. Mumford 得 Fields 奖的工作[259], G. Faltings 得 Fields 奖的文章[111], 和 20 世纪末最著名的文章 [403].

可惜我们没有介绍形式群. 为此我们建议参看 [411], [412], [237], [241] 和 Manin 的博士论文[245]. 关于 p-divisible 群可参看 [367], [119], [64], [306], [100], [250], [42].

4. 关于 Langlands 纲领最好是看他自己的说法: [229], [230]. 近人编了一本会议记录: [38], 可以看看. 近日著名的工作有 [162] 和 [104], 以及 Lafforgue 得 Fields 奖的工作[217]. 至于几何 Langlands 理论可以看 Laumon, Gaitsgory, Kapranov 的文章.

代数群论是有很丰富的内容和广阔的发展空间的. 本书所介绍的只是一个起步点.

本书的第一篇是根据黎景辉在华东师范大学的讲义由陈志杰增写而成. 如果没有曹锡华教授的大力支持和有效的组织工作, 就不会有那场讲演. 在当时艰难的环境下, 邱森、刘昌堃、王建磐、时俭益、叶家琛、陈承东、费青云、潘介正、肖麟等共同整理并印刷了那本讲义, 也是一次难得的协作. 借此机会我们向

他们表示衷心的感谢. 本书的第二篇是黎景辉在北京大学的讲稿, 由赵春来编辑. 至于第三篇则是黎景辉在香港中文大学的讲义. 陈志杰承担了全书的整体编辑工作. 作者之一的黎景辉特向另两位合作者表示感谢, 没有他们的合作, 这本书是不可能完成的.

丁石孙教授、冯克勤教授对本书给予了热忱的支持. 中国科学院科学出版基金的支持对本书得以出版起着关键性的作用. 这也和科学出版社吕虹编审的支持密切相关. 此外, 北京大学数学学院、华东师范大学数学系都在本书的撰写过程中给予很大的支持和帮助, 我们在此一起深表谢意.

目　　录

第一篇　线性代数群

第二篇　群概形

第三篇　环面的算术

第一篇　线性代数群

本篇的目的是介绍线性代数群. 线性代数群是矩阵群的推广. 我们主要是讲线性代数群的根系结构和线性代数群的主要例子：典型群.

在大自然中各种周期现象, 如潮水涨退、心脉跳动, 我们是用单周期函数如 $\sin 2\pi x$ 来建造模型进行研究、理解以至制造机器. 函数 $\sin 2\pi x$ 的周期是整数群 $\mathbb{Z}$, 这是个交换群. 只要我们所考虑的现象的周期群是非交换的, 矩阵群便立刻出现了! 在化学的晶体结构研究中, 出现了正交群, 在量子力学中有酉群, 在广义相对论中有对称空间. 本篇所讲的线性代数群是我们把所有这些典型的矩阵群直接推广, 以求找得一种代数结构, 同时包括所有的典型群. 这样, 一方面可以加深了解其共通性, 另一方面可以同时研究所有的典型群以求简化研究和应用的过程. 我们所得的代数结构便是线性代数群. 线性代数群和李代数有非常密切的关系. 正如李代数一样, 我们可以用根系来对线性代数群作分类. 这就是本篇的主要内容.

本篇还介绍了一个新的结构：概齐次向量空间, 又讲了 Galois 上同调与典型群. 在本篇最后一节, 我们讨论了几个与算术子群有关的课题：玉河数 (Tamagawa number), 志村簇 (Shimura variety), Hilbert 第 12 个问题和 Langlands 纲领, 希望对读者阅读文献有些帮助.

第一章　基本概念

1.1　代数群与李代数

1.1.1　线性代数群

这里总是设 k 是特征数为零的代数闭域, 而且考虑到线性代数群的特点. 为叙述方便, 我们不要求代数簇是不可约的. 除特别指出外, 假设所有的代数簇 X 都是定义在 k 上的.

定义 1.1.1　若

(1) G 是抽象群,

(2) G 是仿射代数簇,

(3) G 的乘法运算:

$$\begin{aligned}\mu: G\times G &\longrightarrow G\\ (x,y) &\longmapsto xy\end{aligned}$$

以及求逆运算:

$$\begin{aligned}\iota: G &\longrightarrow G\\ x &\longmapsto x^{-1}\end{aligned}$$

都是代数簇的态射, 则称 G 是**仿射代数群** (affine algebraic group) 或**线性代数群** (linear algebraic group).

例 1.1.1　最简单的例子是域 k 的加法群, 这时的乘法运算与求逆运算分别是

$$\mu(x,y)=x+y,\qquad \iota(x)=-x.$$

这个代数群通常记为 $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$.

例 1.1.2　另一个简单的例子是域 k 的乘法群 $k^*=k\setminus\{0\}$, 这时的乘法运算与求逆运算分别是

$$\mu(x,y)=xy,\qquad \iota(x)=x^{-1}.$$

这个代数群通常记为 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$.

比较复杂的例子是:

例 1.1.3 一般线性群

$$G = \mathrm{GL}(n,k) = \{(x_{ij}) \mid \det(x_{ij}) \neq 0, x_{ij} \in k\}$$

是代数群. G 满足定义的 (1) 和 (3) 是显然的. 而根据代数几何, G 是 n^2 维仿射空间 $\mathbf{A}_k^{n^2}$ 里使多项式 $\det(x_{ij})$ 不等于零的点构成的主开集, 因此是一个不可约仿射代数簇, 它的仿射坐标环同构于局部环 $k[T_{11}, T_{12}, \cdots, T_{nn}]_{\det(T_{ij})}$.

定义 1.1.2 设 G 与 G' 是代数群, 若映射 $\varphi: G \to G'$ 满足

(1) φ 是抽象群同态,

(2) φ 是簇的态射,

则称 φ 是**代数群同态**. 若 φ 又是抽象群同构, 则称 φ 为**代数群同构**.

定义 1.1.3 设 H 是代数群 G 的子群, 若 H 又是代数簇 G 的闭子簇, 则 H 也是一个代数群, 称 H 是 G 的**闭子群**.

以下的定理说明例 1.1.3 是有代表性的.

定理 1.1.1 任意代数群必同构于某一个 $\mathrm{GL}(n,k)$ 的闭子群.

证明参见 [169] p.63, 定理 8.6.

如果 G 是一个代数群, 可以证明 G 只有一个极大不可约子集包含单位元, 把这个不可约子集记为 G^0, 并称之为 G 的**单位元分支** (identity component). 易证 G^0 是 G 的一个正规子群, 而且

$$[G : G^0] < \infty$$

(参见 [169] p.53, 命题 7.3). 若 $G = G^0$, 则称 G 为**连通的** (connected). 进一步, 若 H 为 G 的闭子群及 $[G : H] < \infty$, 则 $H \supset G^0$. 事实上, 若设 $G = \bigcup_{i=1}^m g_i H$ (其中 $g_1 = e$), 则 $g_i H$ 为闭集 (因为 $\lambda_{g_i} : G \to G : x \mapsto g_i x$ 为自同构), 故 $\bigcup_{i=2}^m g_i H$ 为闭集, 即 $H = G \setminus \bigcup_{i=2}^m g_i H$ 为开集, 所以 $g_i H$ 也是开集. 于是有

$$G^0 = \bigcup_{i=1}^m (G^0 \cap g_i H),$$

$$(G^0 \cap g_i H) \cap (G^0 \cap g_j H) = \emptyset, \qquad 对 i \neq j.$$

由 G^0 的连通性以及 $e \in G^0 \cap g_1 H \neq \emptyset$, 可以得到 $G^0 \subset H$.

单看代数群的定义实在很难想象它们究竟是什么东西, 所以就有分类的必要. 第一个分类的定理就是以下的定理 (参见 [169] p.131, 定理 20.5).

定理 1.1.2 任何一个一维连通代数群必与 $\mathbb{G}_a$ 或 $\mathbb{G}_m$ 同构.

从定义出发易证: