数学分析

习题演练

周民强　编著

（第一册）

科学出版社
www.sciencep.com

数学分析习题演练

（第一册）

周民强　编著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书是基于作者多年教学实践的积累整理编写而成的. 全书共分为两册. 第一册分为 6 章:实数与函数,极限论,连续函数,微分学(一),微分学(二),不定积分. 第二册分为 6 章:定积分,反常积分,常数项级数,函数项级数,幂级数、Taylor 级数,Fourier 级数. 本书选择的习题起点适当提高,侧重理论性和典范性. 书中还添加了若干注记,便于读者厘清某些误解.

本书适合理工科院校及师范院校的本科生、研究生及教师参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析习题演练. 第一册/周民强编著. —北京:科学出版社,2006
ISBN 7-03-016950-6

Ⅰ. 数… Ⅱ. 周… Ⅲ. 数学分析-高等学校-习题 Ⅳ. O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 014463 号

责任编辑:林 鹏 刘嘉善 姚莉丽/责任校对:刘小梅
责任印制:张克忠/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006 年 7 月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2006 年 7 月第一次印刷 印张:22 3/4
印数:1—3 000 字数:432 000

定价: 29.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈路通〉)

前　言

学数学必须演算习题，这是大家的共识. 通过它不仅能使我们熟悉理论的意义和应用，掌握方法的操作，同时还可以洞察理论本身的适应性，预测其扩展前景. 因此，数学各分支都编写出了众多习题集或学习参考书，尤以微积分（或数学分析）类为最. 作者在多年的教学实践中，积累了相当数量的练习题，且在培训学生过程中收到较好的效果. 现在，在科学出版社编辑的鼓励下，把它们整理并编写出来，供读者参考，其目的也是为了开阔视野和启示思路.

本习题集以上海科技出版社（2002 年）出版的《数学分析》教材为蓝本. 因此，总的说来，选题的起点适当提高，侧重理论性和典范性，并力求多角度展示，减少了一般性命题及其在几何、力学方面的应用练习. 解答也从简，不再在文字上多下功夫. 书中还添加了若干注记，便于读者厘清某些误解.

全书共分两册. 第一册分 6 章：实数与函数，极限论，连续函数，微分学（一），微分学（二），不定积分. 第二册分 6 章：定积分，反常积分，常数项级数，函数项级数，幂级数、Taylor 级数，Fourier 级数.

由于作者的水平和视野所限，书中存在的错误和不足之处，欢迎读者批评指正.

作　者

2006 年

技重于练，

巧重于悟.

目　录

第 1 章　实数、函数

数学分析是以研究函数性质为己任的，这些函数是定义在实数集（或有序实数组形成的点集）上，且取值为实数．因此，先对这方面的基础知识作一简单介绍和回顾是有益的．

1.1　实　　数

1.1.1　分类

全体实数记为$(-\infty,\infty)$或 $\mathbf{R}$. 正整数（自然数，$1,2,\cdots,n,\cdots$）全体记为 $\mathbf{N}$. 整数$(0,\pm 1,\pm 2,\cdots,\pm n,\cdots)$全体记为 $\mathbf{Z}$. 有理数$\left(\frac{m}{n};m\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{N};m\text{ 与 }n\text{ 互素，为既约分数}\right)$全体记为 $\mathbf{Q}$. 无理数（非有理数之实数）全体记为 $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$.

代数数　满足整系数代数方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 的实数（根）.（有理数是代数数；$p+q\sqrt{7}(p,q\in\mathbf{Q})$满足方程 $x^2-2px+(p^2-7q^2)=0$，是代数数.）

超越数　非代数数的实数（圆周率 π，对数底 e 等）.

例 1.1.1　试证明下列命题：

(1) 若 n 是自然数，则$\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$.

(2) 若自然数 n 不是完全平方数，则$\sqrt{n}\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$.

(3) 设 a,b,c 是正有理数，若$\sqrt{a}+\sqrt{b}=c$，则$\sqrt{a}\in\mathbf{Q},\sqrt{b}\in\mathbf{Q}$.

(4) (i) $\sqrt[n]{2}\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\ (n\geqslant 2)$. (ii) $\sqrt[n]{n}\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\ (n\geqslant 2)$.

(5) 存在正无理数 a,b，使得 a^b 是正整数.

证明　(1) 反证法. 假定$\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}=p/q$（$p$ 与 q 是互素自然数），则易知

$$n^2-1=\left(\frac{p^2}{q^2}-2n\right)^2\Big/4,\qquad n=(p^4+4q^4)/4p^2q^2.$$

由此可知 q^2 是 p^4+4q^4 的因子，也即 q^2 是 p^4 的因子，这与假定矛盾.

(2) 反证法. 假定$\sqrt{n}=p/q$（p,q 是互素自然数），则由 $nq^2=p^2$ 可知，q^2 是 p^2 的因子. 从而得 $q^2=1$，即 $p^2=n$，这与题设矛盾.

(3) 记 $d=\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$，注意到$\sqrt{a}+\sqrt{b}=c$，可知

$$\sqrt{a}=\frac{c+d}{2},\qquad \sqrt{b}=\frac{c-d}{2}.$$

即得所证.

(4) (i) 反证法. 假定$\sqrt[n]{2}\in \mathbf{Q}$,记为

$$\sqrt[n]{2}=(1+p/q)\qquad (p,q\text{ 是互素正整数}),$$

则 $2q^n=p^n+\binom{n}{1}p^{n-1}q+\cdots+q^n$. 由此知 q 可除尽 p^n,但这与 p,q 互素矛盾. 证毕.

(ii) 反证法. 假定存在 $r\in\mathbf{Q}$,使得 $r=\sqrt[n]{n}$,即 $r^n=n$. 易知 $r\in\mathbf{N}$ 且 $r\geqslant 2$. 由此得 $r^n>n$,矛盾. 证毕.

(5) 取 $a=\sqrt{2}$,$b=\log_{\sqrt{2}}3$($b\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$,否则有 $b=p/q=2\log_2 3$,则 $2^p=3^{2q}$. 这是不可能的)可知 $a^b=3$.

例 1.1.2　试证明下列命题:

(1) 若有理数 p/q(既约分式)是整系数多项式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0\qquad (a_n\neq 0)$$

的根,则 p 是 a_0 的因子,q 是 a_n 的因子.

(2) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ 与 $\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$ 都是无理数.

证明　(1) 用 p/q 代入方程并化简为

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+a_{n-2}p^{n-2}q^2+\cdots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0.$$

由此知 p_0 是 a_0q^n 的因子,但 p_0 不是 q^n 的因子,故 p_0 是 a_0 的因子. 类似地可证 q 是 a_n 的因子.

(2) 易知 $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$,$\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$ 分别满足方程

$$x^6-6x^4-4x^3+12x^2-24x-4=0,$$
$$x^6-9x^4-4x^3+27x^2-36x-23=0.$$

从而由(1)立即得证.

定义 1.1.1　一个实数集 E 的全部元素若能按自然数次序排列起来,即 $E=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$,则称 E 为可列集.

定理 1.1.1　若 E_1,E_2 都是可列集,则其并集 $E_1\cup E_2$ 是可列集.

证明　不妨设 $E_1\cap E_2=\varnothing$,$E_1=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$,$E_2=\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\}$,则对 $E_1\cup E_2$ 中全部元素排列为

$$a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_n,b_n,\cdots,$$

即可得证.

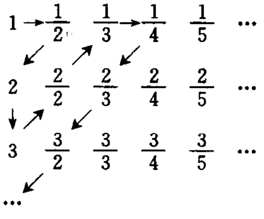

图 1.1

例 1.1.3　试证明下列命题:

(1) 自然数集 $\mathbf{N}$ 是可列集,偶正整数全体是可列集.

(2) 正有理数全体 $\mathbf{Q}_+$ 是可列集.

(3) 有理数全体 $\mathbf{Q}$ 是可列集.

证明 (2) 作 $\mathbf{Q}$ 之方阵如图 1.1,并按所示箭头为序把全体正有理数 $\mathbf{Q}_+$ 排列如下:

$$\{r_n\}:1,\frac{1}{2},2,3,\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},4,5,\frac{1}{5},\cdots.$$

其中舍去重复者,且仅保留可约化的最简式.

(3) 因为正有理数全体是可列集,而负有理数全体只是前者在每个数前多一个"一"号,所以只要按前者的排序仍可排列起来,根据定理 1.1.1 即知 $\mathbf{Q}$ 是可列集(注意,数"0"可排在最前面).

定理 1.1.2 开区间(0,1)中的全体实数是不可排列的.

证明 用反证法.将(0,1)中实数都用十进位小数表示,并舍弃其小数点后连续出现无限个"0"的表示法.现在假定(0,1)中实数是可排列的,不妨将全体排列为$\{a_n\}$:

$$a_1 = 0.\ a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}\cdots$$
$$a_2 = 0.\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n = 0.\ a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn}\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

下面将指出这是不可能的,即可找出(0,1)中一个实数 b,它不在排列中.我们取 $b=0.\ b_1b_2\cdots b_n\cdots$如下:

b_1 若 $a_{11}=1$,则取 $b_1=2$;若 $a_{11}\neq 1$,则取 $b_1=1$.

b_2 若 $a_{22}=1$,则取 $b_2=2$;若 $a_{22}\neq 1$,则取 $b_2=1$.

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

b_n 若 $a_{nn}=1$,则取 $b_n=2$;若 $a_{nn}\neq 1$,则取 $b_n=1$.

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

显然 $b\neq a_i(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$,这说明小数 b 没有在排列之中.这一矛盾指出(0,1)中实数全体是不可排列的.

我们称不可排列的数集为不可列集.因此,(0,1)是不可列集,随之(0,1)中无理数全体是不可列集.这说明无理数的"数量"要比有理数"多得多".只有有限个元素的集合称为有限集,非有限集称为无限集.可列集是无限集,有限集与可列集统称为至多可列集.

例 1.1.4 由直线(实数全体)上互不相交的开区间形成的集合是至多可列集.

证明 在每个开区间中取定一个有理数,显然这些有理数互不相同,因此开区间的"数量"与所选的有理数"数量"相同,即得所证.

1.1.2 稠密性

定义 1.1.2 设 E 是 $\mathbf{R}$ 中的一个实数集.若任意两个实数之间必有 E 中的一个数,则称 E 在 $\mathbf{R}$ 中稠密.

例 1.1.5(有理数的稠密性) 设 a,b 是两个不同实数,且 $a<b$,则存在有理数

r：$a<r<b$.

证明　因为 $b-a>0$，所以存在正整数 n，使得 $0<\frac{1}{n}<b-a$. 易知 $na<na+1<nb$，且存在整数 m：$m\leqslant na+1<m+1$. 从而有 $na<m$.

综合上述结果，可得 $na<m\leqslant na+1<nb$. 由此立即导出 $na<m<nb$，即 $a<\frac{m}{n}<b$，其中 $\frac{m}{n}$ 是有理数.

例 1.1.6(无理数的稠密性)　设 a,b 是两个实数，且 $a<b$，则存在无理数 c：$a<c<b$.

证明　根据 $\sqrt{2}a<\sqrt{2}b$，可知存在有理数 r，使得 $\sqrt{2}a<r<\sqrt{2}b$，易知 $a<\frac{r}{\sqrt{2}}<b$. 若 $r\neq 0$，则 $\frac{r}{\sqrt{2}}$ 是无理数. 若 $r=0$，则 $a<0<b$ 或 $\sqrt{2}a<0<\sqrt{2}b$. 易知存在有理数 s：$0<s<\sqrt{2}b$. 由此知 $\sqrt{2}a<s<\sqrt{2}b$，即 $a<\frac{s}{\sqrt{2}}<b$. $\frac{s}{\sqrt{2}}$ 是 a 与 b 之间的无理数.

例 1.1.7　试证明下列命题：

(1) 对任一实数 x，任一自然数 n，存在 $r_n\in\mathbf{Q}$，使得

$$|x-r_n|\leqslant 1/n \qquad (n=1,2,\cdots).$$

(2) 设 $a>0,b>0$，则 $\sqrt{2}$ 位于 $(a+2b)/(a+b)$ 与 a/b 之间.

(3) 若 m,n 取遍一切自然数，则数列 $\{m^2/n^2\}$ 在 $(0,\infty)$ 上稠密.

(4) 若 $\{a_n\}$ 是递增无上界列，且 $\frac{a_n}{a_{n+1}}\to 1(n\to\infty)$，则数集 $\{a_m/a_n: m\geqslant n\geqslant 1\}$ 在 $(1,+\infty)$ 中稠密.

证明　(1) 作 $r_n=[nx]/n$ 即可.

(2) 若 $a/b\geqslant\sqrt{2}$，则我们有

$$\frac{a+2b}{a+b}=1+\frac{b}{a+b}=1+\frac{1}{a/b+1}\leqslant 1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

由此即可得证.

(3) 对任一实数 $x>0$，以及 $\varepsilon>0$，取 n,m 使得

$$\frac{2\sqrt{x}}{n}+\frac{1}{n^2}<\varepsilon, \qquad \frac{m^2}{n^2}\leqslant x<\frac{(m+1)^2}{n^2}.$$

从而可知

$$0\leqslant x-\frac{m^2}{n^2}<\frac{2m+1}{n^2}\leqslant\frac{2\sqrt{x}}{n}+\frac{1}{n^2}<\varepsilon.$$

即得所证.

(4) 反证法. 假定存在 $x_0>1$ 以及 $\varepsilon_0>0$,使得

$$\left|\frac{a_m}{a_n}-x_0\right|\geqslant\varepsilon_0,\qquad 1\leqslant n<m.$$

因为 $a_n/a_{n+1}\to1(n\to\infty)$,所以对充分大的 k,存在 $n_k>k$,使得

$$\frac{a_m}{a_k}<x_0\quad(m<n_k),\qquad\frac{a_m}{a_k}>x_0\quad(m>n_k).$$

特别,对每个 k,我们有

$$\frac{a_{n_k+1}}{a_k}-\frac{a_{n_k}}{a_k}\geqslant2\varepsilon_0,\qquad\frac{a_{n_k+1}}{a_{n_k}}-1\geqslant2\varepsilon_0\frac{a_k}{a_{n_k}}>\frac{2\varepsilon_0}{x_0}>0.$$

但后一式左端在 $k\to+\infty$ 时为 0,这与 $\varepsilon_0>0$ 矛盾.

例 1.1.8 试证明下列命题:

(1) 对任意给定的实数 x 以及正整数 N:$N>1$,必存在整数 p,q:$0<q<N$,使得

$$|qx-p|<1/N.$$

(2) 若 x 为无理数,则存在无穷多个有理数$\frac{p}{q}(q>0)$,使得

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}.$$

(3) 若 α 是无理数,则点集

$$E=\{m+n\alpha:m,n\in\mathbf{Z}\}$$

在 $\mathbf{R}$ 中稠密.

证明 (1) 考察 $N+1$ 个实数 $mx-[mx](m=1,2,\cdots,N,N+1)$. 由于有 $0\leqslant mx-[mx]<1$,故在 $N+1$ 个数$\{mx-[mx]\}$中必有两个数,其差的绝对值小于 $\frac{1}{N}$,不妨设为

$$|m_2x-[m_2x]-(m_1x-[m_1x])|<\frac{1}{N},\qquad 0<m_1<m_2\leqslant N.$$

令 $q=m_2-m_1$,$p=[m_2x]-[m_1x]$,则 $0<q<N$,且 $|qx-p|<\frac{1}{N}$.

(2) 反证法. 假定只有有限个有理数满足上述不等式,即

$$\left|x-\frac{p_i}{q_i}\right|<\frac{1}{q_i^2}\qquad(i=1,2,\cdots,m).$$

令 $\delta=\min\left\{\left|x-\frac{p_i}{q_i}\right|:i=1,2,\cdots,m\right\}$,取 N:$N>\frac{1}{\delta}$,且作整数 $p,q(0<q<N)$,使得

$$|qx-p|<\frac{1}{N},\quad\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{qN}<\frac{1}{q^2}.$$

但因 q 是正整数，故又有 $\left|x-\dfrac{p}{q}\right|<\dfrac{1}{qN}<\dfrac{\delta}{q}<\delta$. 根据 δ 之定义，$\dfrac{p}{q}\neq\dfrac{p_i}{q_i}$ $(i=1,2,\cdots,m)$，这与原假设矛盾，证毕.

(3) 对任意实数 p,q：$q-p=\varepsilon>0$，由于存在 $p_n,q_n\in\mathbf{Q}(q_n\to+\infty,n\to\infty)$，使得

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n^2},\qquad |q_n\alpha-p_n|<\frac{1}{q_n}<\varepsilon.$$

因此可令 $a=|q_n\alpha-p_n|$，而至少有一个数 $ma(m\in\mathbf{Z})$，使得

$$mq_n\alpha-mp_n(\text{或}-mq_n\alpha+mp_n)\in(p,q).$$

注1　对 $x\in(-\infty,\infty)$，若存在既约分式 p_k/q_k（有理数，$p_k\in\mathbf{Z},q_k\in\mathbf{N}$ 且 $q_k\to+\infty,k\to\infty$），使得

$$x-p_k/q_k=o(1/q_k)\qquad(k\to\infty),$$

则 $x\overline{\in}\mathbf{Q}$. 为此，采用反证法：假定 $x=p/q(p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N})$，则知 $pq_k-qp_k\to0(k\to\infty)$. 因为 $pq_k-qp_k\in\mathbf{Z}$，所以 $pq_k-qp_k=0$. 即对充分大的 k，有 $p/q=p_k/q_k$，矛盾.

注2　若 α 是无理数，且是 n 次整系数代数方程的根，则存在 $C_\alpha>0$，使得 $|\alpha-p/q|<C_\alpha/q^n$ $(p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N})$.

注3　(Kronecker-Чебыщев 定理) 对任意的无理数 α 以及数 β，存在无限个整数 $p,q(p>0)$，使得

$$|p\alpha-q+\beta|<3/p.$$

由此结果可以证明：对任意实数 β，均存在整数列 $\{n_k\}$，使得 $\sin n_k\to\sin\beta(k\to\infty)$. 实际上，取 $\alpha=2\pi$，以及 $p_k,q_k(p_k\to+\infty)$，使得 $2p_k\pi-q_k+\beta=o(1)(k\to\infty)$，$q_k=2p_k\pi+\beta+o(1)(k\to\infty)$.

1.1.3　常用公式

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(n+2)}{2}$.　　2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=(1+2+\cdots+n)^2$.

3. (Newton 二项式) $\displaystyle(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_k^n a^{n-k}b^k,\ C_k^n=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

证明　运用数学归纳法.

4. $\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ $(a_i>0,i=1,2,\cdots,n)$.

证明　后一不等式称为几何一算术不等式，可用数学归纳法证之；而前一不等式可直接由

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}}=\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}}\leqslant\frac{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}{n}$$

推出.

5. (Cauchy 不等式) $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$.

证明　引进变量 t，展开不等式

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n}(a_i t + b_i)^2 = t^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2t \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2,$$

由此立即可得结论为真.

6. 三角求和公式

(1) $\sum_{k=0}^{n} \cos(x + k\alpha) = \sin\frac{(n+1)\alpha}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{n\alpha}{2}\right) \Big/ \sin\frac{\alpha}{2}$.

(2) $\sum_{k=1}^{n} \sin(2k-1)x = \frac{(\sin nx)^2}{\sin x}$.

(3) $\sum_{k=1}^{n} \sin^2 kx = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)x \cdot \sin nx}{2\sin x}$.

1.2 函　数

1.2.1 函数的构成和表示手段简介

(一) 就一元函数而言，$y=f(x)$表示从一个实数集 E 到实数集 $R(f)$(值域)的一种对应关系，而 E 主要是指区间 I. 从已知函数出发，还可以构成多种函数，其基本方法有：四则运算(如 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\times g(x)$等)；复合运算(如 $f[g(x)]$)；在对应是一一对应时，又可出现反函数；在许多课题中，函数关系 f 不是一下子就能用明显的形式表示出来，而是通过它所具有的性质，或者与其他事物的联系中暗示出来(如通过函数方程). 在未用显式表示时，我们称其为隐函数. 许多隐函数是无法用显式表示的，此时可通过其他手段来研究其性质，有时也采用“无穷形式”的表示手法(如无穷级数、积分等).

例 1.2.1　设在$[0,1)$上定义了函数

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x \leqslant 1, \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 是无理数}, \\ \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q}\text{(既约分式)}, \end{cases}$$

则 g 对 h 的复合函数为定义在$[0,1]$上的 $f(x)$：

$$f(x) = g[h(x)] = \begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数}, \\ 0, & x \text{ 是无理数}. \end{cases}$$

例 1.2.2　设 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，则 n 次复合函数

$$(f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f)(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

证明　当 $n=1$ 时，即 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，满足该结论.

现在假定 $n=k$ 时，k 次复合函数满足

$$(f\circ f\circ\cdots\circ f)(x)=\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}},$$

则对 $n=k+1$ 时，其 $(k+1)$ 次复合函数为

$$(\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{k}\circ f)(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Bigg/\sqrt{1+k\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Bigg/\sqrt{\frac{1+x^2+kx^2}{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}.$$

根据数学归纳法即得所证.

例 1.2.3　解答下列问题:

(1) 设 n 是奇数，且 $p>0,q\in\mathbf{R}$，试证明 $y=x^n+px+q$ 存在反函数.

(2) 试问 a,b 取何值，使 $f(x)=\ln(a+be^x)$ 是自反函数?

证明　(1) 只需指出，若有 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，使得

$$x_1^n+px_1+q=x_2^n+px_2+q,$$

则必有 $x_1=x_2$. 实际上，由上等式可得 $x_1^n-x_2^n+p(x_1-x_2)=0$，而 n 是奇数且 $p>0$，故必有 $x_1=x_2$.

(2) 由题设知 $f(x)=f^{-1}(x)$，再注意到 $f[f^{-1}(x)]=x$ 可得 $f[f(x)]=x$，从而有

$$\ln(a+be^{\ln(a+be^x)})=x,$$

即 $a+ab+b^2e^x=e^x$. 从而有(i) $a>0,b=-1$；(ii) $a=0,b=1$.

例 1.2.4　求满足下列函数方程中的 $f(x)$:

(1) $f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x\ (x\neq 0,1)$.

(2) 设 $f(x)$ 是定义在 $(0,\infty)$ 上的正值函数，且有

$$f[f(x)]=6x-f(x).$$

(3) $xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y),x,y\in(-\infty,\infty)$.

解　(1) 以变量 $(t-1)/t$ 代 x，可得

$$f((t-1)/t)+f(-1/(t-1))=(2t-1)/t.$$

另以 $-1/(t-1)$ 代 x，又知

$$f(-1/(t-1))+f(t)=(t-2)/(t-1).$$

从原式加第三式减第二式，我们有

$$f(x)=(x^3-x^2-1)/2x(x-1).$$

(2) 对任给实数 $x>0$，记 $a_0=x$，以及

$$a_{n+1}=f(a_n)\qquad(n=0,1,2,\cdots).$$

则代入方程可得 $a_{n+2}+a_{n+1}-6a_n=0(n=0,1,2,\cdots)$. 解其特征方程 $\lambda^2+\lambda-6=0$, 即 $(\lambda+3)(\lambda-2)=0$, 可知 $a_n=(-3)^n c+2^n d$. 根据 $f(a_n)>0$, 又得 $c=0$, 从而有 $a_n=2^n d$. 易知 $d=a_0$, 我们有 $f(a_0)=a_1=2a_0$, 即 $f(x)=2x$. 显然, 此解是唯一的.

(3) 取 $x=y=1$, 则由题式知 $f(1)=0$ 或 1:

(i) 若 $f(1)=0$, 则令 $y=1$, 可知 $f(x)\equiv 0$.

(ii) 若 $f(1)=1$, 则有 $f(x)+x=(x+1)f(x)$, $x\in(-\infty,\infty)$. 从而可得

$$f(x)=1(x\neq 0),\qquad f(0)=a(-\infty<a<\infty).$$

例 1.2.5 设定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足

$$f(x)\leqslant x,\qquad f(x+y)\leqslant f(x)+f(y),$$

则 $f(x)\equiv x(-\infty<x<\infty)$.

证明 (i) 易知 $f(0)\leqslant 0$. 又当 $x=y=0$ 时有 $f(0)\leqslant 2f(0)$, 即得 $f(0)\geqslant 0$, 故 $f(0)=0$.

(ii) 由 $f(x)\geqslant f(x+(-x))-f(-x)=-f(-x)\geqslant x$, 结合 $f(x)\leqslant x$, 我们有 $f(x)=x\ (x\in\mathbf{R})$.

例 1.2.6 试问 a,b 取何值, 使得函数

$$y=\frac{x^3+ax^2+bx+2b}{x^2+x+1}$$

是线性函数?

解 因为我们有

$$y=x+\frac{(a-1)x^2+(b-1)x+2b}{x^2+x+1},$$

且由于上式右端分子为

$$(a-1)(x^2+x+1)+(b-1-a+1)x+2b-a+1,$$

故知 $a=-1$, $b=-1$ 时 y 为线性函数.

例 1.2.7 试求 a,b 之值, 使方程 $\log_a x=x^b$ 有正解 x.

解 将原式写为 $a^{x^b}=x$ 或 $\ln x/x^b=\ln a$, 可知原方程有正解 x 当且仅当 $\ln a$ 是在函数 $f(x)=\ln x/x^b$ 的值域中, 易知 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,1/be)$, 从而原方程有正解 x 当且仅当 $\ln a\leqslant 1/be$, 即 $1<a<e^{1/be}$.

(二) 就一元函数而言, $y=f(x)$ 是笛卡儿直角坐标系中的表示方式, 它的优越性是显然的, 然而在许多情形中, 用参数式 $x=x(t)$, $y=y(t)$ 的表示法却有着不可替代的作用(特别是在方程 $F(x,y)=0$ 中 y 有多值以及描述平面运动时).

例 1.2.8 设从高 y_0 处以速度 v_0 在水平方向(x 轴正向)投掷一物, 若不计空气阻力, 记时间为 t, 则其运动轨迹为

$$\begin{cases} y=y_0-\dfrac{gt^2}{2}, \\ x=v_0 t, \end{cases}\qquad \text{或}\qquad y=y_0-\frac{g}{2v_0^2}x^2.$$

例 1.2.9 椭圆方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

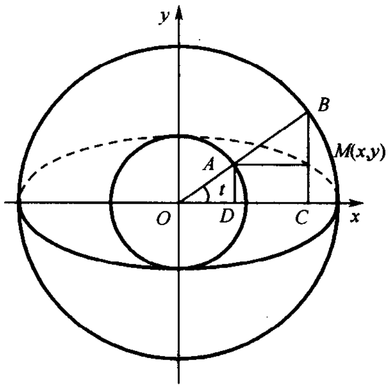

图 1.2

也可用参数方程表示. 实际上，令 $x=a\cos t$，则代入原方程后，立即得到 $y=b\sin t$. 故其参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t,\end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

其中，参数 t 的几何意义如下：作出两个圆心位于原点 O 的同心圆，半径各为 a 与 b（图 1.2）. 设 $M(x,y)$ 是椭圆上一点，B 是大圆上的点，其横坐标也为 x，记 OB 与 x 轴的夹角为 t，由图示可知，

$$\begin{cases}x=OC=a\cos t,\\ y=MC=AD=b\sin t.\end{cases}$$

例 1.2.10（Cycloid 旋轮线或摆线） 设有半径为 a 的圆，置于一直线上并沿直线作无滑动之滚动，则其圆周上一点之运动轨迹曲线称为旋轮线.

现在，取直线为 x 轴，并在圆周上取定一点 P（图 1.3）. 假定运动开始时，P 点位于原点 O，并取过原点之 x 轴垂线为 y 轴.

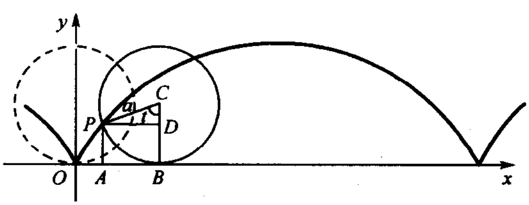

图 1.3

假定滚动开始并设该圆到达自转角度为 t 的位置. 此时，易知点 P 的 x，y 坐标各为

$$\begin{cases}x=OA=OB-AB=at-a\sin t,\\ y=PA=DB=CB-CD=a-a\cos t,\end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

注 1 如果我们想从旋轮线的参数表达式中直接得到 x 与 y 之间的函数关系，那么可以得到 $x=\varphi(y)$ 如下：在区间 $[0,\pi]$ 上，函数 $y=a(1-\cos t)$ 有反函数 $t=\arccos\frac{a-y}{a}$，代入 $x=a(t-\sin t)$，可得