适用于全国高考及分省命题

最新高考
高分锦囊 GAOKAO

中学考试全书

易错题·探究题·开放题

2006版

高考数学

全面覆盖2005年全国及各省市高考试题

丛书主编/张自强

ZHONGXUE
KAOSHI QUANSHU

中学考试全书
ZHONGXUE KAOSHI QUANSHU

延边教育出版社

中学考试全书

适用于全国高考及分省命题

易错题 探究题 开放题

2006版

高考数学

主　编：吴远伦
编　委：方爱武　樊庆礼　黄孟良　童金华
杜典意　程煜生　胡明贵　方久福

延边教育出版社

中学考试全书

《易错题·探究题·开放题》 高考数学

□丛书主编:张自强 □本册主编:吴远伦 □责任编辑:陈长玉 王翠菊
□封面设计:魏 晋

出版发行:延边教育出版社
地　　址:吉林省延吉市友谊路363号(133000)
　　　　　北京市天通苑37号信箱(102218)
网　　址:http://www.topedu.net.cn
电　　话:0433-2913975 010-51340252
传　　真:0433-2913971 010-61748129
排　　版:北京创想未来文化发展有限公司
印　　刷:保定市印刷厂
开　　本:890×1240 16开本
印　　张:15
字　　数:483千字
版　　次:2005年8月第1版
印　　次:2005年8月第1次印刷
书　　号:ISBN 7-5437-6107-6/G·5582
定　　价:22.80元

前　言

考试就要解题，只有正确解答试卷上更多的题才能考出更高的分。本书就是专为那些希望考出更高的分的考生编写的。

题海战术，群起声讨；声讨了多少年了，至今还是"海水"泛滥，"呛水"的考生难计其数！其实，罪过并不在题，在于考生不会选做题目。

备考做题就要做好题，做有价值的题。哪些题是有价值的题呢？从今天的高考考试大纲和命题思路来看，一是容易造成解题思维混乱的易错题，二是题型新颖、综合性强的探究题，三是解答思路灵活的开放题。综合起来讲就是"易错题、探究题、开放题"。这些题是影响考生考出高分，乃至于考上状元的关键试题。正因为它们的重要，所以我们便把它拟作了本书的书名。

本书是《中学考试全书》的系列之一，思想独创、设计新颖、超凡脱俗，给人耳目一新之感。下面我们从栏目的设置入手向读者简述其突出的特色：

一、经典易错题会诊——选取了2005年全国及各省市高考试题和模拟试题，从题型、难易程度和解题方法上作了详尽的分析，对易错易混之处进行了重点剖析，分析了错误答案产生的思想根源、知识缺陷和方法欠缺。本栏目中下设三个子栏目，分别是"命题角度"、"专家会诊"和"考场思维训练"。

1. 命题角度——从出题者的命题意图出发，将考点细化，从不同的角度对知识点进行强化训练。它全面、细致、精确、具体地分析了考题的知识层面、考查层级和能力要求，做到知识复习无死角，防止方法单一化，从而掌握解题答题技巧。这是其它图书所未能涉及而本书独有的创新之处。

2. 专家会诊——对同一命题角度的易错题进行归类会诊，指出其错误的原因，归纳出本考点的知识重点，总结出适用性强的方法、技巧，从而根除病因，以趋完善。它的妙处在于：抓住类型，突出共性，歼灭群"敌"。

3. 考场思维训练——专门就某一个命题角度的试题进行强化训练，并将解答这一类试题的解答技巧"程序化"，使考生答题简洁、规范、准确、全面，从而减轻思想压力；以此让考生有足够的时间和精力去对付那些突出考查智力因素的"爬坡"题。

二、探究开放题——本栏目主要选用了形式新颖、角度独到、考试中尚未见到的考试题目，预测性强。本栏目对前面栏目的考试题目中没有包含的角度进行命题预测，具有前瞻性，对考试有较强的指导意义。

三、考点高分综合训练——不搞题海战术，所选题目具有代表性，难易程度合理，题量适中，题型全面、新颖。在这里，考生会在训练中让知识得以巩固，让能力得以提升。

四、答案与解析——明确答案，说明得出答案的理由，让考生不仅知其然，也知其所以然。这是考生身边无言的老师。

从上面设置的栏目中，不难看出本书有如下特色：

一、独创性——图书例题讲解全都选用2005年各省市高考试题，既有权威性又具指导性。剔除了常规训练题目中老套陈旧的材料，引进了2005年高考状元作文及2005年7月21日人民币升值等多种新型材料，极具时效性和引导性。从命题角度来分析考试的走向，把握考试的脉搏，体现了本书的前瞻性和独创性。

二、实用性——即注重知识的讲解，也注重能力的训练，着重挖掘潜能，将技巧培养和思维训练作为重中之重。尤其是多角度的剖析复习，做到了考查无盲区，让考生轻松面对复习，愉快面对考试。

不用介绍了，说得再好，不如做得好；做得再好，不如让你自己知道好。赶紧翻开书吧，这或许正是你要找的复习资料呢！

《中学考试全书》编委会

2005年8月

读者意见反馈表

亲爱的读者：

你正在品读的是适应最新高考要求和备考模式的教辅图书，它的独创性、新疑性、实用性是很明显的。但是图书也可能还有一些不尽如人意的地方，希望您把您的意见和建议如实填入下表，及时反馈给我们。我们会充分采纳您的意见，为您及全国师生打造出更加精美的图书。

<table>
<tr><td>姓　名</td><td></td><td>性　别</td><td></td><td>学　校</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>年　龄</td><td></td><td>班　级</td><td></td><td>联系电话</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">通讯地址</td><td colspan="3"></td><td>邮　编</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">购书书名</td><td colspan="3"></td><td>学　科</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="7">1. 你是怎么购买到本书的
☐老师推荐　☐同学介绍　☐自己购买　☐广告宣传</td></tr>
<tr><td colspan="7">2. 本书最吸引你的是
☐封面　☐书名　☐版式　☐内容</td></tr>
<tr><td colspan="7">3. 本书对你最有帮助的内容是：</td></tr>
<tr><td colspan="7">4. 本书对你最没有用的内容是：</td></tr>
<tr><td colspan="7">5. 本书可以删去的内容是：</td></tr>
<tr><td colspan="7">6. 本书还应该增加的内容是：</td></tr>
<tr><td colspan="7">7. 同学们用得最多的备考图书是：</td></tr>
<tr><td colspan="7">8. 同学们最渴望得到什么样内容的图书？</td></tr>
</table>

反馈地址：北京市天通苑 37 号信箱（延边教育出版社考试图书中心编辑部）

联系电话：(010)51340254　61748129　　邮编：102218

源于教学　回归教学　引领教学

《中学考试全书》高考系列

一、《命题·考题·解题》

语文	35.80 元	数学	35.80 元	英语	35.80 元
物理	35.80 元	化学	27.80 元	生物	29.80 元
政治	29.80 元	历史	32.80 元	地理	32.80 元

出版时间:2005 年 8 月

二、《易错题·探究题·开放题》

语文	24.00 元	数学	22.80 元	英语	21.80 元
物理	17.80 元	化学	22.80 元	生物	22.80 元
政治	24.00 元	历史	19.80 元	地理	18.80 元

出版时间:2005 年 8 月

《中华大考卷》高考系列

语文	8.00 元	数学	8.00 元	英语	8.00 元
物理	8.00 元	化学	8.00 元	生物	8.00 元
政治	8.00 元	历史	8.00 元	地理	8.00 元
文综	8.00 元	理综	8.00 元		

出版时间:2006 年 1 月

目 录

考点1 集合与简易逻辑

经典易错题会诊

命题角度1 集合的概念与性质……(1)
命题角度2 集合与不等式……(2)
命题角度3 集合的应用……(3)
命题角度4 简易逻辑……(4)
命题角度5 充要条件……(5)

探究开放题预测

预测角度1 集合的运算……(7)
预测角度2 逻辑在集合中的运用……(7)
预测角度3 集合的工具性……(8)
预测角度4 真假命题的判断……(8)
预测角度5 充要条件的应用……(9)

考点2 函数(一)

经典易错题会诊

命题角度1 函数的定义域和值域……(11)
命题角度2 函数单调性的应用……(12)
命题角度3 函数的奇偶性和周期性的应用……(14)
命题角度4 反函数的概念和性质的应用……(15)

探究开放题预测

预测角度1 借助函数单调性求函数最值或证明不等式……(17)
预测角度2 综合运用函数奇偶性、周期性、单调性进行命题……(17)
预测角度3 反函数与函数性质的综合……(18)

考点3 函数(二)

经典易错题会诊

命题角度1 二次函数的图象和性质的应用……(20)
命题角度2 指数函数与对数函数的图象和性质的应用……(22)
命题角度3 函数的应用……(23)

探究开放题预测

预测角度1 二次函数闭区间上的最值的问题……(27)
预测角度2 三个“二次”的综合问题……(28)
预测角度3 含参数的对数函数与不等式的综合问题……(30)

考点4 数 列

经典易错题会诊

命题角度1 数列的概念……(32)
命题角度2 等差数列……(33)
命题角度3 等比数列……(35)
命题角度4 等差与等比数列的综合……(36)
命题角度5 数列与解析几何、函数、不等式的综合……(38)
命题角度6 数列的应用……(40)

探究开放题预测

预测角度1 数列的概念……(43)
预测角度2 等差数列与等比数列……(43)
预测角度3 数列的通项与前 n 项和……(44)
预测角度4 递推数列与不等式的证明……(45)
预测角度5 有关数列的综合性问题……(46)
预测角度6 数列的实际应用……(47)
预测角度7 数列与图形……(47)

考点5 三角函数

经典易错题会诊

命题角度1 三角函数的图象和性质……(50)
命题角度2 三角函数的恒等变形……(52)
命题角度3 三角函数的综合应用……(54)

探究开放题预测

预测角度1 三角函数的图象和性质……(56)
预测角度2 运用三角恒等变形求值……(57)
预测角度3 向量与三角函数的综合……(58)

考点6 平面向量

经典易错题会诊

命题角度1 向量及其运算……(60)

命题角度2　平面向量与三角、数列 …… (62)
命题角度3　平面向量与平面解析几何 ……………… (63)
命题角度4　解斜三角形……………… (65)
探究开放题预测
预测角度1　向量与轨迹、直线、圆锥曲线等知识点结合 ……………… (66)
预测角度2　平面向量为背景的综合题 ……………… (67)

考点7　不等式

经典易错题会诊
命题角度1　不等式的概念与性质 ……… (69)
命题角度2　均值不等式的应用 ………… (70)
命题角度3　不等式的证明 ……………… (71)
命题角度4　不等式的解法 ……………… (73)
命题角度5　不等式的综合应用 ………… (74)
探究开放题预测
预测角度1　不等式的概念与性质 ……… (76)
预测角度2　不等式的解法 ……………… (76)
预测角度3　不等式的证明 ……………… (77)
预测角度4　不等式的工具性 …………… (77)
预测角度5　不等式的实际应用 ………… (78)

考点8　直线和圆

经典易错题会诊
命题角度1　直线的方程……………… (81)
命题角度2　两直线的位置关系 ………… (82)
命题角度3　简单线性规划 ……………… (83)
命题角度4　圆的方程……………… (84)
命题角度5　直线与圆……………… (85)
探究开放题预测
预测角度1　直线的方程……………… (87)
预测角度2　两直线的位置关系 ………… (88)
预测角度3　线性规划……………… (89)
预测角度4　直线与圆……………… (90)
预测角度5　有关圆的综合问题 ………… (90)

考点9　圆锥曲线

经典易错题会诊
命题角度1　对椭圆相关知识的考查 …… (93)
命题角度2　对双曲线相关知识的考查 ……………… (96)
命题角度3　对抛物线相关知识的考查 ……………… (97)
命题角度4　对直线与圆锥曲线相关知识的考查……………… (99)
命题角度5　对轨迹问题的考查………… (102)
命题角度6　考察圆锥曲线中的定值与最值问题 ……………… (105)
探究开放题预测
预测角度1　椭圆……………… (108)
预测角度2　双曲线 ……………… (109)
预测角度3　抛物线 ……………… (111)
预测角度4　直线与圆锥曲线……………… (112)
预测角度5　轨迹问题 ……………… (113)
预测角度6　圆锥曲线中的定值与最值问题 ……………… (114)

考点10　空间直线与平面

经典易错题会诊
命题角度1　空间直线与平面的位置关系 ……………… (117)
命题角度2　空间角 ……………… (119)
命题角度3　空间距离 ……………… (121)
命题角度4　简单几何体 ……………… (123)
探究开放题预测
预测角度1　利用三垂线定理作二面角的平面角 ……………… (124)
预测角度2　求点到面的距离 ……………… (125)
预测角度3　折叠问题 ……………… (126)

考点11　空间向量

经典易错题会诊
命题角度1　求异面直线所成的角 …… (129)
命题角度2　求直线与平面所成的角 … (131)
命题角度3　求二面角的大小 ……………… (132)
命题角度4　求距离 ……………… (134)
探究开放题预测
预测角度1　利用空间向量解立体几何中的探索问题……………… (135)
预测角度2　利用空间向量求角和距离 ……………… (136)

考点12　排列、组合、二项式定理

经典易错题会诊
命题角度1　正确运用两个基本原理 … (138)
命题角度2　排列组合 ……………… (139)
命题角度3　二项式定理 ……………… (140)
探究开放题预测
预测角度1　在等可能性事件的概率中考查排列、组合 ……………… (141)

预测角度 2　利用二项式定理解决三项以上的展开式问题……（142）
预测角度 3　利用二项式定理证明不等式……（142）

考点 13　概率与统计

经典易错题会诊

命题角度 1　求某事件的概率……（144）
命题角度 2　离散型随机变量的分布列、期望与方差……（145）
命题角度 3　统计……（147）

探究开放题预测

预测角度 1　与比赛有关的概率问题……（149）
预测角度 2　以概率与统计为背景的数列题……（149）
预测角度 3　利用期望与方差解决实际问题……（150）

考点 14　极　限

经典易错题会诊

命题角度 1　数学归纳法……（152）
命题角度 2　数列的极限……（154）
命题角度 3　函数的极限……（156）
命题角度 4　函数的连续性……（156）

探究开放题预测

预测角度 1　数学归纳法在数列中的应用……（157）
预测角度 2　数列的极限……（158）
预测角度 3　函数的极限……（158）
预测角度 4　函数的连续性……（158）

考点 15　导数及其应用

经典易错题会诊

命题角度 1　导数的概念与运算……（161）
命题角度 2　导数几何意义的运用……（162）
命题角度 3　导数的应用……（163）

探究开放题预测

预测角度 1　利用导数的几何意义……（166）
预测角度 2　利用导数探讨函数的单调性……（166）
预测角度 3　利用导数求函数的极值和最值……（168）

考点 16　复　数

经典易错题会诊

命题角度 1　复数的概念……（170）
命题角度 2　复数的代数形式及运算……（171）

探究开放题预测

预测角度 1　复数概念的应用……（172）
预测角度 2　复数的代数形式及运算……（173）

答案与解析

答案与解析……（175）

考点一 1 集合与简易逻辑

YI CUO TI　TAN JIU TI　KAI FANG TI

- 集合的概念与性质
- 集合的应用
- 充要条件
- 逻辑在集合中的运用
- 真假命题的判断
- 集合与不等式
- 简易逻辑
- 集合的运算
- 集合的工具性
- 充要条件的应用

经典易错题会诊

命题角度 1　集合的概念与性质

1 (05 年,北京卷)设全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $M=\{x|x>1\}$,$P=\{x|x^2>1\}$,则下列关系中正确的是 (　　)

A $M=P$　　B $P\subset M$

C. $M\subset P$　　D. $\complement_U M\cap P=\varnothing$

[考场错解] D

[专家把脉] 忽视集合 P 中 $x<-1$ 部分.

[对症下药] C　$x^2>1$　$x>1$ 或 $x<-1$ 故 $M\subset P$

2 (05 年,湖北卷)设 P、Q 为两个非空实数集合,定义集合 $P+Q=\{a+b|a\in P,b\in Q\}$,若 $P\{0,2,5\}$,$Q=\{1,2,6\}$,则 $P+Q$ 中元素的个数是 (　　)

A 9　　B 8

C 7　　D 6

[考场错解] A　P 中元素与 Q 中元素之和共有 9 个

[专家把脉] 忽视元素的互异性,即和相等的只能算一个

[对症下药] B　P 中元素分别与 Q 中元素相加和分别为 1,2,3,4,6,7,8,11 共 8 个

3 (04 年,浙江卷)设 $f(n)=2n+1(n\in\mathbf{N})$,$P=\{1,2,3,4,5\}$,$Q=\{3,4,5,6,7\}$,记 $\hat{P}=\{n\in\mathbf{N}|f(n)\in P\}$,$\hat{Q}=\{n\in\mathbf{N}|f(n)\in Q\}$,则 $(\hat{P}\cap\complement_N\hat{Q})\cup(\hat{Q}\cap\complement_N\hat{P})$ 等于 (　　)

A $\{0,3\}$　　B $\{1,7\}$

C $\{3,4,5\}$　　D $\{1,2,6,7\}$

[考场错解] D　$P\cap\complement_N Q=\{6,7\}$　$Q\cap\complement_N P=\{1,2\}$ 故选 D

[专家把脉] 未理解集合 $\hat{P}$ 的意义.

[对症下药] B　$\hat{P}=\{1,3,5\}$　$\hat{Q}=\{3,5,7\}$　$\hat{P}\cap\complement_N\hat{Q}=\{1\}$　$\hat{Q}\cap\complement_N\hat{P}=\{7\}$ 故选 B

4 (04 年,湖北卷)设 A、B 为两个集合,下列四个命题:
①$A\subsetneq B\Leftrightarrow$对任意 $x\in A$,有 $x\notin B$;②$A\subsetneq B\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$;③$A\subsetneq B\Leftrightarrow A\supsetneq B$;④$A\subsetneq B\Leftrightarrow$存在 $x\in A$,使得 $x\notin B$. 其中真命题的序号是________

[考场错解] $A\subsetneq B$,即 A 不是 B 的子集,对于 $x\in A$,有 $x\notin B$;$A\cap B=\varnothing$,故①②④正确

[专家把脉] 对集合的概念理解不清　$A\subsetneq B$,即 A 不是 B 的子集,但是 A,B 可以有公共部分,即存在 $x\in A$,使得 $x\notin B$. 不是对任意 $x\in A$,有 $x\notin B$,故④正确. "$A\subsetneq B$"是"任意 $x\in A$,有 $x\notin B$"的必要非充分条件. ②同①

[对症下药] 画出集合 A,B 的文氏图或举例 $A=\{1,2\}$,$B=\{2,3,4\}$,故①、②均不成立,③$A=\{1,2,3\}$,$B=\{1,2\}$,　$A\subsetneq B$ 但 $B\subseteq A$,故也错　只有④正确,符合集合定义　故填④

5 (04 年,全国卷Ⅰ)设 A、B、I 均为非空集合,且满足 $A\subseteq B\subseteq I$,则下列各式中错误的是 (　　)

A $(\complement_I A)\cup B=I$

B $(\complement_I A)\cup(\complement_I B)=I$

C $A\cap(\complement_I B)=\varnothing$

D. $(\complement_I A)\cap(\complement_I B)=\complement_I B$

[考场错解] 因为集合 A 与 B 的补集的交集为 A,B 的交集的补集　故选 D

[专家把脉] 对集合 A,B,I 满足 $A\subseteq B\subseteq I$ 的条件,即集合之间包含关系理解不清.

[对症下药] 如图是符合题意的韦恩图

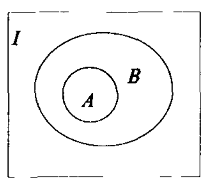

图 1－1

从图中可观察 A、C、D 均正确,只有 B 不成立. 或运用特例法,如 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{1,2,3.4\}$,$I=\{1,2,3,4,5\}$ 逐个检验只有 B 错误

专家会诊

1. 解答集合问题，首先要正确理解集合有关概念，特别是集合中元素的三要素；对于用描述法给出的集合$\{x|x\in P\}$，要紧紧抓住竖线前面的代表元素x以及它所具有的性质P，要重视发挥图示法的作用，充分运用数形结合（数轴，坐标系，文氏图）或特例法解集合与集合的包含关系以及集合的运算问题，直观地解决问题.

2. 注意空集$\varnothing$的特殊性，在解题中，若未能指明集合非空时，要考虑到空集的可能性，如$A\subseteq B$，则有$A=\varnothing$或$A\neq\varnothing$两种可能，此时应分类讨论.

考场思维训练

1 全集$U=\mathbf{R}$，集合$M=\{1,2,3,4\}$，集合$N=\left\{x|x\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\}$，则$M\cap(\complement_U N)$等于 ( )

A $\{4\}$　　B $\{3,4\}$

C $\{2,3,4\}$　　D $\{1,2,3,4\}$

2 设集合$M=\{x|x=3m+1,\ m\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{y|y=3n+2,\ n\in\mathbf{Z}\}$，若$x_0\in M$，$y_0\in N$，则$x_0y_0$与集合$M,N$的关系是 ( )

A $x_0y_0\in M$　　B $x_0y_0\notin M$

C $x_0y_0\in N$　　D $x_0y_0\notin N$

3 设$M=\{x|x=4^a,a\in\mathbf{R}\}$，$N=\{y|y=3^x,x\in\mathbf{R}\}$，则 ( )

A $M\cap N=\varnothing$　　B $M=N$

C $M\supset N$　　D $M\subset N$

4 已知集合$A=\{0,2,3\}$，$B=\{x|x=ab,a、b\in A$且$a\neq b\}$，则B的子集的个数是 ( )

A 4　　B 8　　C 16　　D 15

5 设集合$M=\{(x,y)|x=(y+3)\cdot|y-1|+(y+3),\ -\frac{5}{2}\leqslant y\leqslant 3\}$，若$(a,b)\in M$，且对$M$中的其他元素$(c,d)$，总有$c\geqslant a$，则$a=$________

命题角度 2　集合与不等式

1 (05年，湖南卷)集合$A=\left\{x|\frac{x-1}{x+1}<0\right\}$，$B=\{x||x-b|<a\}$，若"$a=1$"是"$A\cap B\neq\varnothing$"的充分条件，则$b$的取值范围是 ( )

A $-2\leqslant b<2$　　B $-2<b\leqslant 2$

C $-3<b<-1$　　D $-2<b<2$

[考场错解] A　当$a=1$时，$A=\{x|-1<x<1\}$　$B=\{x|b-1<x<b+1\}$　$A\cap B\neq\varnothing$　$b-1<1$且$b+1\geqslant -1$　故$-2\leqslant b<2$　只有A符合

[专家把脉] $A\cap B\neq\varnothing$时，在点-1和1处是空心点，故不含等于

[对症下药] D　当$a=1$时，$A=\{x|-1<x<1\}$　$B=\{x|b-1<x<b+1\}$. 此时$A\cap B\neq\varnothing$的充要条件是$b-1<1$且$b+1>-1$　即$-2<b<2$　故只有D符合

2 (05年，天津卷)(1)设集合$A=\{x||4x-1|\geqslant 9,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\left\{x|\frac{x}{x+3}\geqslant 0,x\in\mathbf{R}\right\}$，则$A\cap B=$________

[考场错解] $\left\{x|x\leqslant -3\text{ 或 }x\geqslant\frac{5}{2}\right\}$

[专家把脉] $\frac{x}{x+3}\geqslant 0$　$x(x+3)\geqslant 0$　而此时$x+3\neq 0$　故不含$x=-3$

[对症下药] $A=\left\{x|x\leqslant -3\text{ 或 }x\geqslant\frac{5}{2}\right\}$　$B=\{x|x-3$ 或 $x\geqslant 0\}$　$A\cap B=\left\{x|x<-3\text{ 或 }x\geqslant\frac{5}{2}\right\}$

3 (05年，武汉市)已知集合$A=\left\{x|\frac{6}{x+1}\geqslant 1,x\in\mathbf{R}\right\}$，$B=\{x|x^2-2x+2m<0,x\in\mathbf{R}\}$

(1)若$A\cap B=\{x|-1<x<4\}$，求m的值；

(2)若$A\cup B=A$，求实数m的取值范围

[考场错解] (1)　$A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 5\}$，若$A\cap B=\{x|-1<x<4\}$，则$B=\{x|-1<x<4\}$，　$m=-2$

(2)　$A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 5\}$，$A\cup B=A$，　$B\not\subseteq A$　即$\Delta\geqslant 0$，$x_1\geqslant -1$且$x_{大}\leqslant 5$. 解得$-\frac{3}{2}\leqslant m\leqslant\frac{1}{2}$

[专家把脉] 第(2)问中若$B\subseteq A$，对于此类问题要考虑B可以为空集的情况　即$B=\varnothing$时，$A\cup B=A$

[对症下药] (1)　$A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 5\}$，若$A\cap B=\{x|-1<x<4\}$，结合数轴可得$B=\{x|-1<x<4\}$，由根与系数的关系，$2m=-1\times 4$，　$m=-2$

(2)方法1：　$A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 5\}$，$A\cup B=A$，$B\subseteq A$

当$B=\varnothing$时，即$\Delta<0$，解得$m>\frac{1}{2}$；

当$B\neq\varnothing$时，即$\Delta\geqslant 0$，$x_1\geqslant -1$　且　$x_{大}\leqslant 5$　解得$-\frac{3}{2}\leqslant m\leqslant\frac{1}{2}$

综上所述，$m\geqslant -\frac{3}{2}$

方法2：　$A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 5\}$，$A\cup B=A$，　$B\subseteq A$　令$f(x)=x^2-2x+2m$，结合二次函数根的分布，即$f(-1)\geqslant 0$且$f(5)\geqslant 0$　解得$m\geqslant -\frac{3}{2}$

4 (04年，福建卷)已知$f(x)=\frac{2x-a}{x^2+2}(x\in\mathbf{R})$在区间$[-1,1]$上为增函数

(1)求实数a的值所组成的集合A；

(2)设关于x的方程$f(x)=\frac{1}{x}$的两根为x_1,x_2，试问：是否存在实数m，使得不等式$m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$对任意$a\in A$及$t\in[-1,1]$恒成立？若存在，求出$m$的取值范围；若不存在，请说明理由

[考场错解] (1)因为$f(x)=\frac{2x-a}{x^2+2}(x\in\mathbf{R})$，所以$f(x)=\frac{-2x^2+2ax+4}{(x^2+2)^2}$，依题意$f(x)\geqslant 0$在$[-1,1]$上恒

成立，即 $2x^2-2ax-4\leqslant 0$ 在 $[-1,1]$ 上恒成立.

当 $x=0$ 时，$a\in\mathbf{R}$；当 $0<x\leqslant 1$ 时，$a\geqslant x-\frac{2}{x}$ 恒成立，又 $y=x-\frac{2}{x}$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，所以 $y=x-\frac{2}{x}$ 的最大值为 -1，得 $a\geqslant -1$；当 $-1\leqslant x<0$ 时 $a\leqslant x-\frac{2}{x}$ 恒成立，由上知 $a\leqslant 1$. 综上：$a\in\mathbf{R}$（注意应对所求出的 a 的范围求交集）.

（2）方程 $f(x)=\frac{1}{x}$ 变形为 $x^2-ax-2=0$，$|x_1-x_2|=\sqrt{a^2+8}$，又 $-1\leqslant a\leqslant 1$，所以 $|x_1-x_2|=\sqrt{a^2+8}$ 的取大值为 3，$m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$ 恒成立等价于 $m^2+tm+1\geqslant 3$ 在 $t\in[-1,1]$ 恒成立，当 $m=0$ 时，显然不成立，当 $m>0$ 时，$t\geqslant\frac{2-m^2}{m}$ 恒成立，所以 $-1\geqslant\frac{2-m^2}{m}$，解得 $m\geqslant 2$；当 $m<0$ 时，$t\leqslant\frac{2-m^2}{m}$ 恒成立，所以 $1\leqslant\frac{2-m^2}{m}$，解得 $m\leqslant -2$

综上：故不存在实数 m，使得不等式 $m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$ 恒成立

［专家把脉］ （1）讨论 x 求参数的范围，最后应求参数的交集而不是并集 因为 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)\geqslant 0$ 恒成立.（2）注意对求出的 m 的值范围求并集而不是交集.

［对症下药］ （1）因为 $f(x)=\frac{2x-a}{x^2+2}(x\in\mathbf{R})$，所以 $f'(x)=\frac{-2x^2+2ax+4}{(x^2+2)^2}$，依题意 $f'(x)\geqslant 0$ 在 $[-1,1]$ 上恒成立，即 $2x^2-2ax-4\leqslant 0$ 在 $[-1,1]$ 上恒成立

当 $x=0$ 时，$a\in\mathbf{R}$；当 $0<x\leqslant 1$ 时，$a\geqslant x-\frac{2}{x}$ 恒成立，又 $y=x-\frac{2}{x}$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，所以 $y=x-\frac{2}{x}$ 的最大值为 -1，得 $a\geqslant -1$；当 $-1\leqslant x<0$ 时 $a\leqslant x-\frac{2}{x}$ 恒成立，由上知 $a\leqslant 1$. 综上 $A=\{a|-1\leqslant a\leqslant 1\}$（注意应对所求出的 a 的范围求交集）

（2）方法 1：方程 $f(x)=\frac{1}{x}$ 变形为 $x^2-ax-2=0$，$|x_1-x_2|=\sqrt{a^2+8}$，又 $-1\leqslant a\leqslant 1$，所以 $|x_1-x_2|=\sqrt{a^2+8}$ 的最大值为 3，$m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$ 恒成立等价于 $m^2+tm+1\geqslant 3$ 在 $t\in[-1,1]$ 恒成立，当 $m=0$ 时，显然不成立，当 $m>0$ 时，$t\geqslant\frac{2-m^2}{m}$ 恒成立，所以 $-1\geqslant\frac{2-m^2}{m}$，解得 $m\geqslant 2$；当 $m<0$ 时，$t\leqslant\frac{2-m^2}{m}$ 恒成立，所以 $1\leqslant\frac{2-m^2}{m}$，解得 $m\leqslant -2$

综上：存在实数 m，使得不等式 $m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$ 恒成立，m 的取值范围是 $\{m|m\geqslant 2$ 或 $m\leqslant -2\}$（注意对求出的 m 的取值范围求并集）.

方法 2：方程 $f(x)=\frac{1}{x}$ 变形为 $x^2-ax-2=0$，$|x_1-x_2|=\sqrt{a^2+8}$，又 $-1\leqslant a\leqslant 1$，所以 $|x_1-x_2|=\sqrt{a^2+8}$ 的最大值为 3，$m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$ 恒成立等价于 $m^2+tm+1\geqslant 3$ 在 $t\in[-1,1]$ 恒成立，令 $g(t)=tm+m^2-2$，有 $g(-1)=m^2+m-2\geqslant 0$，$g(1)=m^2-m-2\geqslant 0$，解得 $\{m|m\geqslant 2$ 或 $m\leqslant -2\}$.（注意对求出的 m 的取值范围求交集）

专家会诊

讨论参数 a 的范围时，对各种情况得出的参数 a 的范围，要分清是"或"还是"且"的关系，是"或"只能求并集，是"且"则求交集.

考场思维训练

1 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则不等式 $[x]^2-5[x]+6\leqslant 0$ 的解集为 （　　）

A $(2,3)$　　B $[2,3]$

C $[2,4)$　　D $[2,4]$

2 已知不等式 $|x-m|<1$ 成立的充分非必要条件是 $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$，则实数 m 的取值范围是 （　　）

A. $\left[-\frac{4}{3},\frac{1}{2}\right]$　　B $\left[-\frac{1}{2},\frac{4}{3}\right]$

C $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$　　D $\left[\frac{4}{3},+\infty\right)$

3 设 A、B 是两个集合，定义 $A-B=\{x|x\in A$，且 $x\notin B\}$ 若 $M=\{x||x+1|\leqslant 2\}$，$N=\{x|x=|\sin\alpha|,\alpha\in\mathbf{R}\}$，则 $M-N$ 等于 （　　）

A $[-3,1]$　　B $[-3,0)$

C $[0,1]$　　D $[-3,0]$

4 已知集合 $A=\{x|(x-2)[x-(3a+1)]<0\}$，$B=\{x|\frac{x-2a}{x-(a^2+1)}<0\}$

（1）当 $a=2$ 时，求 $A\cap B$；

（2）求使 $B\subseteq A$ 的实数 a 的取值范围

命题角度 3　集合的应用

1 （04 年，辽宁卷）ω 是正实数，设 $S_\omega=\{\theta|f(x)=\cos[\omega(x+\theta)]$ 是奇函数$\}$，若对每个实数 a，$S_\omega\cap(a,a+1)$ 的元素不超过 2 个，且有 a 使 $S_\omega\cap(a,a+1)$ 含 2 个元素，则 ω 的取值范围是________

［考场错解］ $(\pi,2\pi)$

［专家把脉］ a 使 $S_\omega\cap(a,a+1)$ 含两个元素，如果 $\frac{2\pi}{\omega}>1$ 时，则超过 2 个元素，注意区间端点

［对症下药］ 由 $S_\omega\cap(a,a+1)$ 的元素不超过两个，周期 $\frac{2\pi}{\omega}\times\frac{1}{2}<1$　$\omega>\pi$，又　有 a 使 $S_\omega\cap(a,a+1)$ 含两个元素，　周期 $\frac{2\pi}{\omega}\geqslant 1$　$\omega\leqslant 2\pi$ 故 $\omega\in(\pi,2\pi]$

2 (05年，江苏卷)设函数$f(x)=-\frac{x}{1+|x|}(x\in\mathbf{R})$，区间$M=[a,b](a<b)$，集合$N=\{y|y=f(x),x\in M\}$，则使$M=N$成立的实数对$(a,b)$有 (　　)

A 0个　　B 1个

C 2个　　D 无数多个

[考场错解] D　$y=f(x)$是奇函数，不妨设$x>0$　$f(x)=-1+\frac{1}{x+1}$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数，即$y=f(x)$在$[a,b]$上为减函数，$y=f(x)$的值域为$[\frac{-b}{1+|b|},\frac{-a}{1+|a|}]$，$N\in[\frac{-b}{1+|b|},\frac{-a}{1+|a|}]$

$M=N$，$M\subseteq N$　$a\geq\frac{-b}{1+|b|}$，且$b\leq\frac{-a}{1+|a|}$，故有无数组解

[专家把脉] 错误地理解了$M=N$，只是$M\subseteq N$，忽视了$M=N$，包含$M\subseteq N$和$N\subseteq M$两层含义

[对症下药] $f(x)=\begin{cases}-1+\frac{1}{x+1}(x\geq0)\\-1+\frac{1}{x-1}(x<0)\end{cases}$

图像如图

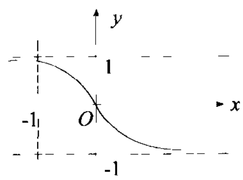

图1-2

$y=f(x)$在$[a,b]$上为减函数　$y=f(x)$的值域为$[\frac{-b}{1+|b|},\frac{-a}{1+|a|}]$

$N=\{y|y=f(x)\}$，N表示$f(x)$的值域

$M=N$，$\begin{cases}a=\frac{-b}{1+|b|}\\b=\frac{-a}{1+|a|}\end{cases}\Rightarrow a=b$，而已知$a<b$，满足题意的$a$ b不存在，故选A

3 (05年，上海卷)已函数$f(x)=\sqrt{2-\frac{x+3}{x+1}}$的定义域为$A$，$g(x)=\lg[(x-a-1)(2a-x)](a<1)$的定义域为$B$

(1)求A;

(2)若$B\subseteq A$，求实数a的取值范围

[考场错解] (1)由$2-\frac{x+3}{x+1}\geq0$，得$x<-1$或$x\geq1$

$A=\{x|x<-1$或$x\geq1\}$

(2)由$(x-a-1)(2a-x)>0$，得$(x-a-1)(x-2a)<0$　$a<1$，$a+1>2a$，$B=(2a,a+1)$

$B\subseteq A$　$2a>1$或$a+1\leq-1$　$a>\frac{1}{2}$或$a\leq-2$

又 $a<1$　$a\leq-2$或$\frac{1}{2}<a<1$

[专家把脉] 利用集合的包含关系时，忽视了端点的讨论

[对症下药] (1)由$2-\frac{x+3}{x+1}\geq0$，得$x<-1$或$x\geq1$

(2)由$(x-a-1)(2a-x)>0$，得$(x-a-1)(x-2a)<0$　$a<1$，$a+1>2a$，$B=(2a,a+1)$

$B\subseteq A$，$2a\geq1$或$a+1\leq-1$，即$a\geq\frac{1}{2}$或$a\leq-2$，而$a<1$，$\frac{1}{2}\leq a<1$或$a\leq-2$，故当$B\subseteq A$时，实数a的范围是$(-\infty,-2)\cup[\frac{1}{2},1)$

专家会诊

集合与不等式、集合与函数、集合与方程等，都有紧密联系. 因为集合是一种数学工具. 在运用时，注意知识的融会贯通 有时要用到分类讨论，数形结合的思想.

考场思维训练

1 已知集合$A=\{x|(a^2-a)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|ax^2-x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，若$A\cup B=\varnothing$，则$a$的值为 (　　)

A 0　　B 1　　C 0或1　　D 0或4

2 设集合$P=\{3,4,5\}$，$Q=\{4,5,6,7\}$定义$P※Q=\{(a,b)|a\in P,b\in Q\}$，则$P※Q$中元素的个数为 (　　)

A 3　　B 4　　C 7　　D 12

3 已知关于x的不等式$\frac{ax-5}{x^2-a}<0$的解集为M

(1)$a=4$时，求集合M;

(2)若$3\in M$且$5\notin M$，求实数a的取值范围

命题角度 4　简易逻辑

1 (05年，湖北卷)对任意实数a b、c，给出下列命题:

①"$a=b$"是"$ac=bc$"的充要条件；②"$a+5$是无理数"是"a是无理数"的充要条件；③"$a>b$"是"$a^2>b^2$"的充分条件；④"$a<5$"是"$a<3$"的必要条件

其中真命题的个数是 (　　)

A 1　　B 2　　C 3　　D 4

[考场错解] D

[专家把脉] 忽视①中$c=0$的情况，③中a,b小于0的情况

[对症下药] B　①中$c=0$时，非必要条件；③中$0>a>b$时，非充分条件，②④正确

2 (05年，天津卷)给出下列_个命题

①若$a\geq b>-1$，则$\frac{a}{1+a}\geq\frac{b}{1+b}$

②若正整数m和n满足$m\leq n$，则$\sqrt{m(n-m)}\leq\frac{n}{2}$

③设$P(x_1,y_1)$为圆O_1 $x^2+y^2=9$上任一点，圆O_2以$Q(a,b)$为圆心且半径为1 当$(a-x_1)^2+(b-y_1)^2=1$

时,圆 O_1 与圆 O_2 相切

其中假命题的个数为 ( )

A 0　　B 1　　C 2　　D 3

［考场错解］ A

［专家把脉］ ③中 $(a-x_1)^2+(b-y_1)^2=1$ 时,即圆 O_2 与 O_1 上任一点距离为 1,并不一定相切

［对症下药］ B

3 (05 年,黄冈卷)设原命题是"已知 a,b,c,d 是实数,若 $a=b,c=d$,则 $a+c=b+d$",则它的逆否命题是 ( )

A 已知 a,b,c,d 是实数,若 $a+c\neq b+d$,则 $a\neq b$ 且 $c\neq d$

B 已知 a,b,c,d 是实数,若 $a+c\neq b+d$,则 $a\neq b$ 或 $c\neq d$

C 若 $a+c\neq b+d$,则 a,b,c,d 不是实数,且 $a\neq b,c\neq d$

D 以上全不对

［考场错解］ A

［专家把脉］ 没有分清"且"的否定是"或","或"的否定是"且"

［对症下药］ B 逆否命题是"已知 a,b,c,d 是实数,若 $a+c\neq b+d$,则 $a\neq b$ 或 $c\neq d$"

4 (03 年,全国卷)已知 $c>0$,设 P:函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减;Q:不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$,如果 P 和 Q 有且仅有一个正确,求 c 的取值范围

［考场错解］ 由函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,得 $0<c<1$; $x+|x-2c|=\begin{cases}2x-2c,x\geqslant 2c\\2c,x<2c\end{cases}$,所以函数 $y=x+|x-2c|$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 $2c$,因为不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$,所以 $2c>1$,得 $c>\frac{1}{2}$

如果 P 真,得 $0<c<1$,如果 Q 真,则 $c>\frac{1}{2}$

所以 c 的取值范围是 $(0,+\infty)$

［专家把脉］ 将 P 和 Q 有且仅有一个正确,错误理解成 P 正确或 Q 正确

［对症下药］ 由函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,得 $0<c<1$; $x+|x-2c|=\begin{cases}2x-2c,x\geqslant 2c\\2c,x<2c\end{cases}$,所以函数 $y=x+|x-2c|$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 $2c$,因为不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$,所以 $2c>1$,得 $c>\frac{1}{2}$

如果 P 真 Q 假,则 $0<c\leqslant\frac{1}{2}$;如果 Q 真 P 假,则 $c\geqslant 1$

所以 c 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$

专家会诊

1. 在判断一个结论是否正确时,若正面不好判断,可以先假设它不成立,再推出矛盾,这就是正难则反.

2. 求解范围的题目,要正确使用逻辑连结词,"且"对应的是集合的交集,"或"对应的是集合的并集.

考场思维训练

1 已知条件 p:$|x+1|>2$,条件 q:$5x-6>x^2$,则 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的 ( )

A 充要条件　　B 充分但不必要条件

C 必要但不充分条件　　D 既非充分也非必要条件

2 已知命题 p:函数 $\log_{0.5}(x^2+2x+a)$ 的值域为 $\mathbf{R}$,命题 q:函数 $y=-(5-2a)^x$ 是减函数 若 p 或 q 为真命题,p 且 q 为假命题,则实数 a 的取值范围是 ( )

A $a\leqslant 1$　　B $a<2$

C $1<a<2$　　D $a\leqslant 1$ 或 $a\geqslant 2$

3 如果命题 P:$\varnothing\in\{\varnothing\}$,命题 Q:$\varnothing\subset\{\varnothing\}$,那么下列结论不正确的是 ( )

A "P 或 Q"为真　　B "P 且 Q"为假

C "非 P"为假　　D "非 Q"为假

4 已知在 x 的不等式 $0<x^2-4<6x-13a$ 的解集中,有且只有两个整数,求实数 a 的取值范围

5 已知命题 p:方程 $a^2x^2+ax-2=0$ 在 $[-1,1]$ 上有解;命题 q:只有一个实数 x 满足不等式 $x^2+2ax+2a\leqslant 0$,若命题"p 或 q"是假命题,求 a 的取值范围

命题角度 5　充要条件

1 (05 年,北京卷)"$m=\frac{1}{2}$"是"直线 $(m+2)x+3my+1=0$ 与直线 $(m-2)x+(m+2)y-3=0$ 相互垂直"的 ( )

A 充分必要条件　　B 充分而不必要条件

C 必要而不充分条件　　D 既不充分也不必要条件

［考场错解］ A

［专家把脉］ 当两直线垂直时,$A_1A_2+B_1B_2=0$,$m^2-4+3m(m+2)=0$,即 $m=\frac{1}{2}$ 或 $m=-2$;故不是充分必要条件

［对症下药］ B 当 $m=\frac{1}{2}$ 时两直线垂直 两直线垂直时 $m=\frac{1}{2}$ 或 $m=-2$,故选 B

2 (05 年,上海卷)设定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)=\begin{cases}|\lg|x-1||,x\neq 1\\0,x=1\end{cases}$,则关于 x 的方程 $f^2(x)+bf(x)+c=0$ 有 7 个不同实数解的充要条件是 ( )

A $b<0$ 且 $c>0$　　B $b>0$ 且 $c<0$

C $b<0$ 且 $c=0$　　D $b\geqslant 0$ 且 $c=0$

［考场错解］ B $\Delta=b^2-4ac$ 当 $c<0$ 时,$\Delta>0$ 故 $f(x)$ 有两个不同实根, x 有 7 个不同根

［专家把脉］ $f(x)$ 的根为正时,x 有 4 个不同实根 应考虑 $f(x)$ 的根的正负

［对症下药］ C 当 $x=1$ 时,$f(x)=0$, $c=0$

当 $x\neq 1$ 时,$f(x)=|\lg|x-1||$, $f^2(x)+bf(x)+c=\lg^2|x-1|+b|\lg|x-1||=0$ 即 $|\lg|x-1||(|\lg|x-1|$

$+b)=0$,

$\because \lg|x-1|=0$ 或 $\lg|x-1|=-b$, $\therefore x=2$ 或 $x=0$ 或 $\lg|x-1|=-b$① $b<0$ ①式有4个不同实根故 $c=0$ 且 $b<0$,恰有7个不同实根.

3.(04年,上海春季卷)若非空集合 $M\subset N$,则 $a\in M$ 或 $a\in N$是 $a\in(M\cap N)$的 ( )

A 充分但不必要条件 B 必要但不充分条件

C 充要条件 D 既不充分也不必要条件

[考场错解] $a\in(M\cap N)$的意思是 $a\in M$ 且 $a\in N$,所以 $a\in M$ 或 $a\in N$ 不能推出 $a\in(M\cap N)$,同样 $a\in(M\cap N)$也不能推出 $a\in M$ 或 $a\in N$,所以 $a\in M$ 或 $a\in N$ 是 $a\in(M\cap N)$的既不充分也不必要条件,所以选D

[专家把脉] "或"与"且"理解错误,逻辑中的"或"与生活中的"或"有区别,$a\in M$ 或 $a\in N$ 包括三种:$a\in M$ 但 $a\notin N$;$a\in N$ 但 $a\notin M$;$a\in M$ 且 $a\in N$ 所以 $a\in(M\cap N)$可以推得 $a\in M$ 或 $a\in N$

[对症下药] $a\in(M\cap N)$的意思是 $a\in M$ 且 $a\in N$,而 $a\in M$ 或 $a\in N$ 包括三种:$a\in M$ 但 $a\notin N$;$a\in N$ 但 $a\notin M$;$a\in M$且 $a\in N$,所以 $a\in M$ 或 $a\in N$ 不能推出 $a\in(M\cap N)$;$a\in(M\cap N)$可以推得 $a\in M$ 或 $a\in N$ 所以选B

4 (04年,上海卷)设命题p:关于x的不等式 $a_1x^2+b_1x+c_1>0$ 与 $a_2x^2+b_2x+c_2>0$ 的解集相同;命题 q:$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$,则命题$p$是命题$q$的 ( )

A. 充分但不必要条件

B 必要但不充分条件

C. 充要条件

D 既不充分也不必要条件

[考场错解] 因为$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$,所以不等式 $a_1x^2+b_1x+c_1>0$ 与 $a_2x^2+b_2x+c_2>0$ 是等价的不等式,解集相同,所以q能推出p而不等式 $a_1x^2+b_1x+c_1>0$ 与 $a_2x^2+b_2x+c_2>0$ 的解集相同不能得出$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$,所以选B

[专家把脉] 因为$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$,若 a_1 与 a_2 的符号不同,这时 $a_1x^2+b_1x+c_1>0$ 与 $a_2x^2+b_2x+c_2>0$ 的解集不相同,如 $-x^2+3x-2>0$ 与 $x^2-3x+2>0$,尽管$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=-1$,但它们的解集不相同,所以$q$不能推出$p$

[对症下药] 因为$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$,若 a_1 与 a_2 的符号不同,这时 $a_1x^2+b_1x+c_1>0$ 与 $a_2x^2+b_2x+c_2>0$ 的解集不相同,所以q不能推出p;不等式 $x^2+x+3>0$ 与 $x^2+1>0$ 的解集相同,但$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$,所以$p$不能推出$q$,所以选D.

专家会诊

(1)要理解"充分条件""必要条件"的概念.当"若p则q"形式的命题为真时,就记作$p\Rightarrow q$,称p是q的充分条件,同时称q是p的必要条件,因此判断充分条件或必要条件就归结为判断命题的真假.

(2)要理解"充要条件"的概念,对于符号"$\Leftrightarrow$"要熟悉它的各种同义词语 "等价于","当且仅当","必须并且只需"," …,反之也真"等.

(3)数学概念的定义具有相称性,即数学概念的定义都可以看成是充要条件,既是概念的判断依据,又是概念所具有的性质.

(4)从集合观点看,若$A\subseteq B$,则A是B的充分条件,B是A的必要条件.若$A=B$,则A、B互为充要条件.

(5)证明命题条件的充要性时,既要证明原命题成立(即条件的充分性),又要证明它的逆命题成立(即条件的必要性).

考场思维训练

1 设$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$是非零向量,则使 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$成立的一个必要非充分条件是 ( )

A $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ B $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

C $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ D $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\lambda>0)$

2 若条件甲:平面α内任一直线平行于平面β,条件乙:平面$\alpha/\!/$平面β,则条件甲是条件乙的 ( )

A 充分不必要条件

B 必要不充分条件

C 充要条件

D 既不充分又不必要条件

3 已知函数$f(x)=ax+b(0\leq x<1)$,则 $a+2b>0$ 是 $f(x)>0$ 在$[0,1]$上恒成立的 ( )

A. 充分不必要条件

B 必要不充分条件

C 充要条件

D 既非充分又非必要条件

4 命题A:$|x-1|<3$,命题B $(x+2)(x+a)<0$,若A是B的充分不必要条件,则a的取值范围是 ( )

A. $(4,+\infty)$ B $[4,+\infty)$

C $(-\infty,-4)$ D $(-\infty,-4]$

探究开放题预测

预测角度 1　集合的运算

1. 设 I 是全集，非空集合 P、Q 满足 $P\subseteq Q\subseteq I$，若含 P、Q 的一个运算表达式，使运算结果为空集，则这个运算表达式可以是________；如果推广到三个，即 $P\subseteq Q\subseteq \mathbf{R}\subseteq I$，使运算结果为空集，则这个运算表达式可以是________（只要求写出一个表达式）

[解题思路]　画出集合 P、Q、I 的文氏图，就可以看出三个集合之间的关系，从它们的关系中构造集合表达式，使之运算结果为空集

[解答]　画出集合 P、Q、I 的文氏图，可得满足 $P\subseteq Q\subseteq I$，含 P、Q 的一个运算表达式，使运算结果为空集的表达式可以是 $P\cap(\complement_I Q)$；同理满足 $P\subseteq Q\subseteq \mathbf{R}\subseteq I$，使运算结果为空集的表达式可以是 $(P\cap Q)\cap(\complement_I R)$，或 $(P\cup Q)\cap(\complement_I \mathbf{R})$ 答案不唯一

2. 设 $A=\{(x,y)\mid y^2-x-1=0\}$，$B=\{(x,y)\mid 4x^2+2x-2y+5=0\}$，$C=\{(x,y)\mid y=kx+b\}$，是否存在 k、$b\in\mathbf{N}$，使得 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$，证明此结论

[解题思路]　由集合 A 与集合 B 中的方程联立构成方程组，用判别式对根的情况进行限制，可得到 b、k 的范围，又因 b、$k\in\mathbf{N}$，进而可得值

[解答]　$(A\cup B)\cap C=\varnothing$，

$\therefore A\cap C=\varnothing$ 且 $B\cap C=\varnothing$

$\because \begin{cases} y^2=x+1 \\ y=kx+b \end{cases}$

$\therefore k^2x^2+(2bk-1)x+b^2-1=0$

$\because A\cap C=\varnothing$

$\therefore \Delta_1=(2bk-1)^2-4k^2(b^2-1)<0$

$\therefore 4k^2-4bk+1<0$，此不等式有解，其充要条件是 $16b^2-16>0$，即 $b^2>1$　①

$\because \begin{cases} 4x^2+2x-2y+5=0 \\ y=kx+b \end{cases}$

$\therefore 4x^2+(2-2k)x+(5+2b)=0$

$\because B\cap C=\varnothing$，

$\therefore \Delta_2=(1-k)^2-4(5-2b)<0$

$\therefore k^2-2k+8b-19<0$，从而 $8b<20$，即 $b<2\ 5$　②

由①②及 $b\in\mathbf{N}$，得 $b=2$ 代入由 $\Delta_1<0$ 和 $\Delta_2<0$ 组成的不等式组，得

$\begin{cases} 4k^2-8k+1<0, \\ k^2-2k-3<0 \end{cases}$

$\therefore k=1$，故存在自然数 $k=1$，$b=2$，使得 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$.

预测角度 2　逻辑在集合中的运用

1 已知不等式：①$|x+3|>|2x|$；

②$\dfrac{x+2}{x^2-3x+2}\geqslant 1$；　③$2x^2+mx-1<0$

(1)若同时满足①、②的 x 也满足③，求 m 的取值范围；

(2)若满足③的 x 至少满足①、②中的一个，求 m 的取值范围

[解题思路]　(1)若同时满足①、②的 x 也满足③，即求出不等式①、②的交集是③的解集的子集；第(2)问，若满足③的 x 至少满足①、②中的一个，即满足③的 x 满足①、②的并集

[解答]　(1) 由 $|x+3|>|2x|$ 得 $-1<x<3$，由 $\dfrac{x+2}{x^2-3x+2}\geqslant 1$ 得 $0\leqslant x<1$ 或 $2<x\leqslant 4$，同时满足①、②的集合 $A=[0,1]\cup(2,3)$　满足③的集合为 B，因为 $B\subseteq A$，所以 $f(3)\leqslant 0$，且 $f(0)<0$，故 $m\leqslant -\dfrac{13}{7}$

(2) 方法1：$B\subseteq(-1,3)\cup[0,1]\cup(2,4)$，　$B\subseteq(-1,4]$，即方程 $2x^2+mx-1<0$ 的两根在 $(-1,4]$ 内，由根的分布可得 $-\dfrac{31}{4}\leqslant m<1$

方法2：若满足③的 x 至少满足①、②中的一个，即求同时不满足①、②的集合的补集

①的解集 $\{x\mid x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 3\}$，②的解集 $\{x\mid x<0$ 或 $1\leqslant x\leqslant 2$ 或 $x>4\}$

①∩② $=\{x\mid x\leqslant -1$ 或 $x>4\}$，补集为 $(-1,4]$，即方程 $2x^2+mx-1<0$ 的两根在 $(-1,4]$ 内，由根的分布可得 $-\dfrac{31}{4}\leqslant m<1$

2 集合 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x\mid \log_2(x^2-5x+8)=1\}$，$C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$，求当 a 取什么实数时，$A\cap B\supsetneqq\varnothing$ 和 $A\cap C=\varnothing$ 同时成立

[解题思路]　求出集合 B，C　由 $A\cap B\supsetneqq\varnothing$，即 $A\cap B\neq\varnothing$，从而求 a　，由 $A\cap C=\varnothing$，来检验

[解答]　$\log_2(x^2-5x+8)=1$，由此得 $x^2-5x+8=2$，$B=\{2,3\}$　由 $x^2+2x-8=0$，　$C=\{2,-4\}$，又 $A\cap C=\varnothing$，　2 和 -4 都不是关于 x 的方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的解，而 $A\cap B\supsetneqq\varnothing$，即 $A\cap B\neq\varnothing$，

3 是关于 x 的方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的解，$\therefore$ 可得 $a=5$ 或 $a=-2$.

当 $a=5$ 时，得 $A=\{2,3\}$，$\therefore A\cap C=\{2\}$，这与 $A\cap C=\varnothing$ 不符合，所以 $a=5$（舍去）；当 $a=-2$ 时，可以求得 $A=\{3,-5\}$，符合 $A\cap C=\varnothing$，$A\cap B\supsetneqq\varnothing$，$\therefore a=-2$.