高等学校省级规划教材

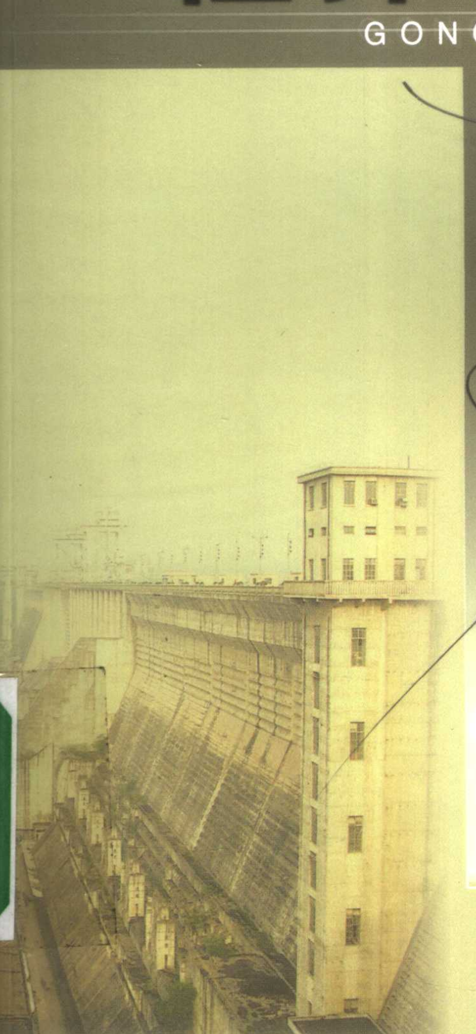
——土木工程专业系列教材

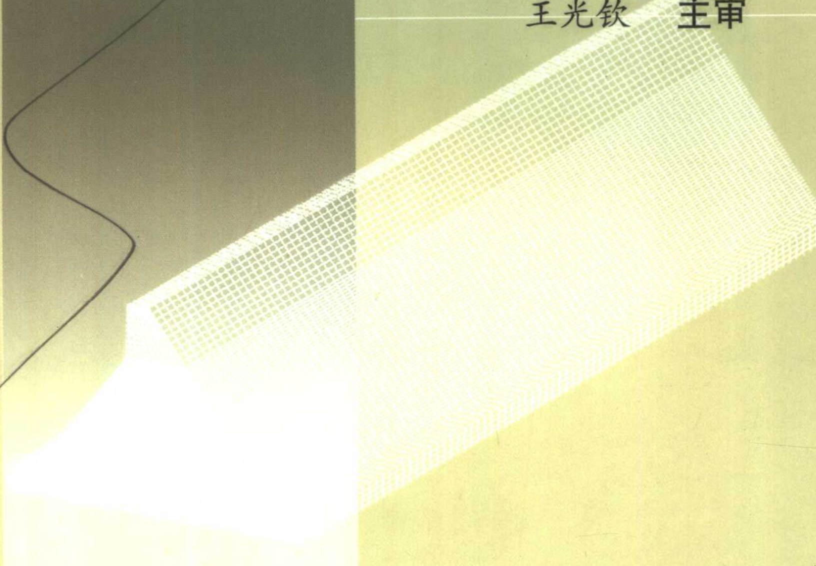
工程弹性力学基础

GONGCHENG TANXING LIXUE JICHU

周道祥
张伟林 编著

王光钦 主审





合肥工业大学出版社

高等学校省级规划教材

——土木工程专业系列教材

工程弹性力学基础

周道祥
张伟林 编 著

王光钦 主 审

合肥工业大学出版社

内容提要

《工程弹性力学基础》是高等学校省级规划教材——土木工程专业系列教材之一，是为少学时的弹性力学而编写。全书共分7章：第1章为绪论，第2章至第4章介绍了弹性力学平面问题的基本理论和解法，第5章介绍了平面问题的有限元解法，第6和第7章介绍了空间问题的基本方程和薄板弯曲问题的解法。

本教材理论阐述严谨，推导过程详尽，算例典型，内容深入浅出，可用作土木类、机械类等相关专业本科生的弹性力学教材，对于工程技术人员也有一定的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

工程弹性力学基础/周道祥 张伟林 编著.—合肥：合肥工业大学出版社，2006.8
ISBN 7-81093-473-2

Ⅰ.工… Ⅱ.①周… ②张… Ⅲ.工程力学：弹性力学—高等学校—教材
Ⅳ.TB125

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第094967号

工程弹性力学基础

周道祥 张伟林 编著

出 版	合肥工业大学出版社
地 址	合肥市屯溪路193号
邮 编	230009
电 话	总编室：0551-2903038
	发行部：0551-2903198
网 址	www.hfutpress.com.cn
E-mail	press@hfutpress.com.cn
版 次	2006年8月第1版
	2006年8月第1次印刷
开 本	787×1092 1/16
印 张	10.5
字 数	256千字
发 行	全国新华书店
印 刷	中国科学技术大学印刷厂

ISBN 7-81093-473-2/TB·12 定价：19.00元

前　　言

随着计算机技术的进步和普及，弹性力学理论已成为结构分析重要的理论基础，因此，弹性力学已成为工程类相关专业重要的技术基础课程。

以较少的学时给学生讲授相对系统而完整的弹性力学知识，这一直是工程类专业教学所面临的一个难题。目前国内适用于少学时的弹性力学教材少之又少，而从中选择一本合适的教材更成问题。我们编写的这本教材，学时数在45左右，易学易懂而且实用，是工程弹性力学的基础教材，适用于土木类或机械类专业的本科生。本教材较为详细地阐述了弹性力学的基本概念、基本理论和基本方法，同时也反映了求解弹性力学问题的新技术和新方法。考虑到工科学生的数学基础等情况，我们在推导公式或介绍求解问题过程中都尽可能地详尽。我们根据教学实践中遇到的实际问题，认真地比较了国内同类教材在内容上的安排，参考了徐芝纶院士的《弹性力学简明教程》的一些做法，对弹性力学理论的基本内容作了一些取舍。

本教材内容采用由特殊到一般的课程体系，以弹性力学分类问题为线索编排而成。先讲弹性力学平面问题。再讲空间等其他问题。这样每类问题的讨论都相对独立而自成体系。平面问题的解法除了介绍常用的逆解法和半逆解法外，对特定问题的解析法求解也作了介绍。为了使学生尽早接触求解工程问题的大型通用有限元软件，从而使他们在今后的工作中多一种选择，我们还特别编入了用大型通用有限元程序ANSYS求解弹性力学平面问题的相关内容，并给出一个简单的算例。至于弹性力学空间问题，我们没有贪多求全，而是在介绍空间问题的基本理论之后，把薄板弯曲问题作为退化了的空间问题来求解。由于薄板是工程中广泛应用的构件，因此本教材对均布荷载和集中荷载作用下的薄板弯曲问题均作了介绍。

本书是安徽省高等学校省级规划教材——土木工程专业系列教材之一。读者对象主要是土木类、机械类等相关专业的本科生，对于工程技术人员也有一定的参考价值。周道祥教授编写了本书的第1章至第5章内容；张伟林教授编写了本书的第6章和第7章内容。全书由周道祥教授修改并定稿，由西南交通大学王光钦教授主审。

本书在编写过程中得到安徽建筑工业学院领导、土木系领导及力学教研室的大力支持；安徽建筑工业学院刘安中教授、吴约副教授对书稿提出了宝贵的意见和建议；安徽理工大学刘丹丹教授认真地审阅了书稿。在此一并致谢！

由于编者水平所限，成稿仓促，谬误之处在所难免，恳望有关专家及读者批评指正，以利完善。

编　者
2006年5月18日

目 录

第1章 绪 论

1.1 弹性力学的任务及在力学中的地位

弹性力学是在18世纪工业革命催生下于19世纪初叶兴起的一门学科。弹性力学理论为解决当时所面临的建筑力学所无法解决的复杂的生产技术和工程问题提供了手段。随着工业生产的发展和科学技术的进步，结构的功能更趋多样，结构的规模也趋于大型化，人们所面临的力学问题更加困难，弹性力学的作用变得越来越重要。经过两百年来的发展，弹性力学理论已趋于成熟，计算机技术的巨大进步和有限元方法的发展使弹性力学有着更加广阔的应用前景。

弹性力学是变形体力学的重要组成部分。它和材料力学一样，是研究在外界因素作用下变形体的内力和变形的。它以材料力学所建立起来的变形体的一些基本力学概念为基础，但是它们的研究对象有很大差异。材料力学研究的对象是一维的杆件，而弹性力学研究的主要是三维的空间体，如板、壳和其他实体结构（水坝、地基等）。此外，弹性力学研究问题的前提，解决问题的方法与材料力学有着本质的区别。

材料力学通常取部分杆件作为研究对象，从而建立外力和内力间的关系或位移与变形间的关系，所得到的是代数方程或常微分方程。为了简化求解过程，材料力学对分析对象除采用一般的物性假设和几何假设外，针对不同的问题还要做一些附加假设。其中一些附加假设使得力学模型的受力情况和物体实际受力的情况有相当大的差异。例如，在梁的问题中应用纤维互不挤压的假设之后梁就被理解成为一丝一丝单向应力状态的纤维束所组成的物体。这显然与实际物体情况有很大出入。

在分析梁的应力时，材料力学还应用了平截面假设，就纯弯曲梁导出梁的正应力公式

$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

而后直接把这一个计算公式推广到横力弯曲中去。梁的剪应力公式

$$\tau = \frac{F_s S_z^*}{I_z b}$$

就是利用

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{y\mathrm{d}M}{I_z} = \frac{yF_s}{I_z}\mathrm{d}x$$

这个公式导出的。

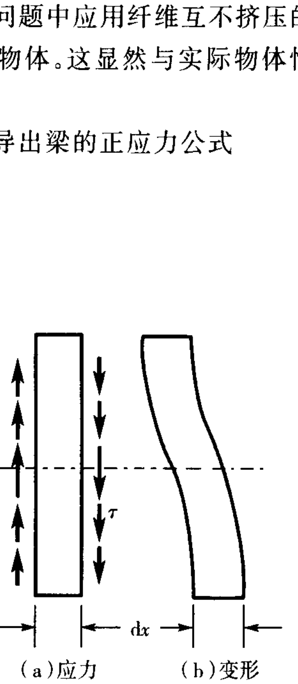


图1-1 横截面剪切变形

在材料力学中，如果是矩形截面杆件，剪应力的分布是高度坐标的二次函数，即截面的剪切变形是不均匀的。换句话说，梁发生横力弯曲以后横截面必然会发生翘曲（如图1-1），这时平截面假设是不能成立的。可见材料力学的分析方法具有很大的局限性。

弹性力学的研究方法与材料力学有本质上的不同。弹性力学在分析问题时，除采用与材料力学相同的基本假设外，一般不再引入其他附加假设。弹性力学将弹性体分割成为无穷多极其微小的个体（体元素），这样所得到的弹性体变形和内力的情况将大致和真实的弹性体变形及内力情况相符合。弹性力学在研究问题时，是从弹性体内取一个微单元体，然后研究它们的静力平衡条件、变形和位移的关系、内力与变形的关系等，所得到的是偏微分方程。其求解是严格地按照偏微分方程的边值问题求解，因而弹性力学问题的求解要用到更为高深的数学工具（如级数、复变函数、特殊函数等），按照弹性体表面的外力情况或位移情况确定弹性体的内力和变形。弹性力学中所用的解题方法比材料力学方法要严密得多，所获得的结果也远比材料力学精确。所以材料力学一些杆件的变形和应力问题常常需要用弹性力学的方法来检验，以确定材料力学理论的误差程度及适用的范围。

此外，弹性力学能够解决的问题也比材料力学要广泛得多。非圆截面杆件的扭转问题、应力集中问题、接触问题、弹性地基问题、板和壳的弯曲问题等用弹性力学方法都能获得圆满的解决。对杆状构件作进一步的精确的分析也需要用到弹性力学。

弹性力学基本方程是偏微分方程组，而偏微分方程组的直接求解是十分困难的，只有在边界条件比较简单时才可以解出。迄今为止用解析的方法能够求解的弹性力学问题是很少的，发展近似计算理论成为求解弹性力学问题的重要途径。常用的近似计算又有变分法、差分法和有限元法等。随着计算机技术的巨大进步，有限元法已成为弹性力学求解复杂大型结构问题的主要手段。

弹性力学又可分为数学弹性力学和应用弹性力学。前者尽可能不采用附加的假设，运用数学工具精确地解决问题。后者除了对理想弹性体所作的基本假设之外还引进了一些附加的假设，目的在于把复杂的问题加以简化，从而使问题的求解在数学上成为可能。薄板理论及薄壳理论都属于应用弹性力学，其中就引用了直法线假设。

弹性力学不仅可以直接用于求解工程结构中的力学问题，而且还为塑性力学、断裂力学、岩土力学等奠定了基础，所以说弹性力学在力学学科中具有举足轻重的地位。

1.2 基本假设

弹性力学是伴随着工程实践发展起来的，也反映出人们对自然界事物的一个认识层次。由于自然界的无限复杂性和认识水平的局限性，人们对客观规律的认识只能是循序渐进的过程。在解决工程实践面临的力学问题时，人们必须根据已有的认识水平对复杂的工程实际问题作一些合理的假设，以求忽略问题非本质的、对求解问题影响较小的次要因素，简化力学模型，从而使用数学手段求解成为可能。弹性力学常用的基本假设又分为物性假设和几何假设两大类。

1. 连续性假设

假定弹性体到处都是致密的，整个物体几何容积都毫无间隙地充满着物质。物质的颗粒状的原子结构以及物质的分子运动都不予考虑。实质上，现实弹性体的构造是用均匀连续介质来代替的。这一个假设和原子构造之间存在着矛盾。但从宏观上看，把弹性体内部的介质近似视为连续是合理的。根据这一假设所推得的理论得到了实验结果的支持，其计算精度能满足工程要求，因此是可以接受的。

这一假设的数学意义在于把弹性力学要求的物理量，视为定义在整个弹性体上的连续函数，因而可以进行极限运算，定义在弹性体内的函数导数不仅存在，而且也是连续的。只有这样，在弹性力学的分析中，才能任意选取截面或体元素，也只有在有了截面的基础上才存在应力的计算。

我们知道，应力的概念是在一个面积趋近于无限小的极限基础上建立起来的。

2. 均匀性假设

假设认为弹性体内各点的物质构成及特性完全相同。如果物体是由同一种材料组成的，而且基体颗粒尺度较小（如金属材料），各局部较小尺度上的物质属性接近一致，那么均匀性假设是符合事实的。即使像混凝土这类材料的基本成分颗粒较大，其颗粒的大小与结构的尺度相比还是要小得多。只要选取的体元素足够大，从统计意义上看，均匀性假设还是能够得到满足的。

这一假设表明：材料的力学性质与选取点的坐标无关，从任取的一个体元素所导出的方程及解得的结果对于整个弹性体都适用。

3. 各向同性假设

假设认为弹性体内任一点在各个方向上的性能是相同的。各向同性假设对一般的金属材料来说基本上是符合的。因为金属材料是由极细小的晶体组成，而且晶体排列的方向又是随机的。因此，对于包含大量晶体的物体在单晶体所造成的统计学平均效应看来，材料沿各个方向是具有相同性质的。

这一假设使得描述材料力学性能的参数从各项异性（各个方向性能均不相同）的36个，减少为2个，这就大大简化了弹性力学问题的求解。

4. 完全弹性假设

假设认为材料发生弹性变形时表现出理想弹性性质，即变形体在变形的原因去除以后可以完全恢复到原有形状的性质。理想弹性体的变形是可逆的。在线性弹性理论中还假定材料的应力和应变成正比例的关系。

材料弹性变形时的理想弹性假设为分析和计算带来了很大的便利。因为这一假设消除了时间因素对于变形体的影响。在分析问题时，我们可以不管变形体在受到力的作用之前经历如何，以及力作用之后的变形随时间变化的改变。材料性能的线弹性关系使得应用叠加原理成为可能。

5. 自然应力状态假设

物体在未受到载荷作用之前可能已经存在着一定的应力，这种应力称为初应力。初应力性质和数值与变形体形成的历史有关。这一假设认为物体中的初应力等于零。如果变形体有初应力，则在分析物体弹性变形时所求得的应力可能不是存在于物体中的实际应力，而是在所研究之点应力在初应力上的增加值。

以上假设都是为了简化分析，使弹性力学问题的求解较易实现。针对研究对象的物理属性所做出的假设，称为物性假设。下面针对弹性体变形的大小做出的假设称为几何假设。

6. 小变形假设

在结构的设计中，人们常常使结构仅仅承受其能够承受的最大载荷的一小部分。一方面是为了保证结构物有足够的安全裕度，另一方面也保证材料的弹性性质，所以假设弹性体内的应变、位移都是微小的。即认为物体内各点的位移远小于物体原来各向尺寸的最小值，转角、应变均远远小于1。根据这一假设，在利用平衡条件时，仍采用变形前的尺寸进行计算，而忽略载荷位置的改变。在研究应变与位移时，可忽略位移中的高阶微量部分，使位移与其增量成线性关系。

弹性力学就是在上述关于变形体的基本假设条件下所建立起来的学科。在材料满足线性弹性的条件下采用小变形假设就可以保证所研究的问题是线性问题，可以应用叠加原理。

1.3 弹性力学基本的物理量

材料力学是弹性力学的基础，很多概念直接用于弹性力学。由于弹性力学的研究方法和研究内容与材料力学有很大差异，所以对同一种物理量，弹性力学与材料力学的表示有着很大差别。

1. 外力及其分类

物体外部因素对物体作用所产生的作用力称为外力，如约束反力、重力以及其他外部载荷(如机械力和电磁力)。根据外力作用的范围又分为体积力和表面力。

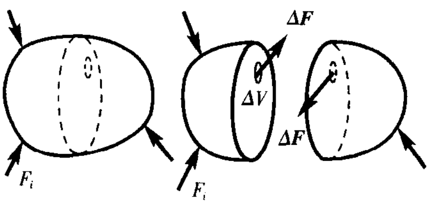


图 1-2 体积力的定义

体积力又简称为体力，是指连续分布在物体内部作用于各质点上的力：如重力、惯性力等。通常物体内部各质点所受到的体积力是不同的，它是质点坐标的函数。一点的体积力用体积力分布集度来描述，是借助极限运算定义的(图 1-2)

$$\boldsymbol{f} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta V} = (f_x \quad f_y \quad f_z)^{\mathrm{T}}(\mathrm{kN/m^3}) \tag{1.1}$$

式中，$\boldsymbol{f}$ 为体积力矢量；f_x, f_y, f_z 为体积力在直角坐标系内的分量；ΔV 为受体积力作用的体元素体积；$\Delta \boldsymbol{F}$ 为体元素上所受到的体积力的合力。

体积力的量纲是[力][长度]$^{-3}$，常用的单位是($\mathrm{kN/m^3}$)，规定体积力指向坐标轴正向其符号为正值，反之为负值。

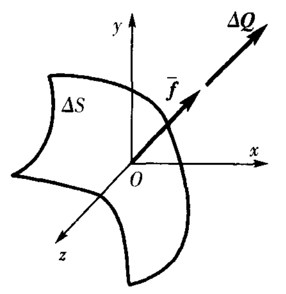


图 1-3 面积力的定义

面积力又简称为面力，是指连续分布在物体表面上的外力，如液体或气体的压力、固体间相互接触的作用力等。面力是物体表面质点坐标的函数，用面力分布集度来描述(图 1-3)。面积力由下式定义

$$\bar{\boldsymbol{f}} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{Q}}{\Delta S} = (\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z)^{\mathrm{T}}(\mathrm{kN/m^2}) \tag{1.2}$$

式中，$\bar{\boldsymbol{f}}$ 为面积力矢量；$\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z$ 为面积力在直角坐标系内的分量；ΔS 为受面积力作用的面元素面积；$\Delta \boldsymbol{Q}$ 为面元素上所受到的面积力的合力。

面积力的量纲是[力][长度]$^{-2}$，常用的单位是($\mathrm{kN/m^2}$)。规定面积力指向坐标轴正向符号为正值，反之为负值。

2. 应力

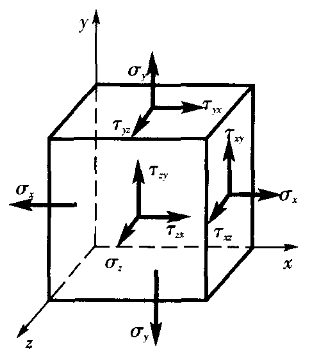


图 1-4 体元素上应力分量

由于弹性力学要解决的三维问题常常处于复杂应力状态，所以它的应力的表示要比材料力学复杂些。在弹性力学中用三组分别与坐标面平行的平面截出一个体元素进行研究。常这样命名体元素的面：体元素中法线与 x 轴一致的面就称为 x 面，同样命名 y 面和 z 面。还把面的外法线方向与坐标轴同向的面称为正面，反之为负面。

体元素面上的应力用沿三个坐标轴的应力分量表示(图 1-4)。体元素面上的法向应力称为正应力，用 σ 表示。用下标区别不同

面上的正应力，分别是 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$。睡在面内的应力分量称为剪应力，用 τ 表示。用两个不同的脚标表示不同的剪应力，如 $\tau_{xy},\tau_{yz},\tau_{zx}$，第一脚标表示剪应力作用面的外法线方向，第二脚标表示剪应力分量的指向。应力正负号是这样规定的：离开作用面的正应力（拉伸）为正值，反之（压缩）为负值。作用于正面而且指向坐标轴正向剪应力为正值剪应力（正面正向为正）；剪应力作用于负面而且指向坐标轴负向亦为正值剪应力（负面负向为正）；剪应力作用于正面而指向坐标轴负向，或剪应力作用于负面而指向坐标轴正向都是负值剪应力（正面负向为负或负面正向为负）。

体元素上作用的应力分量共有九个，分别为 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy},\tau_{yx},\tau_{yz},\tau_{zy},\tau_{zx},\tau_{xz}$。根据剪应力互等定理 $\tau_{xy}=\tau_{yx},\tau_{yz}=\tau_{zy},\tau_{zx}=\tau_{xz}$。独立的应力分量的个数是六个，写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

3. 应变

在弹性力学中一点的应变是取三个正交微分线段进行研究的，应变也像材料力学那样分为线应变和角应变。定义应变的办法是和应力相对应的（图 1－5）。对应于正应力的应变称为正应变，表示为 $\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z$；对应于剪应力的应变称为剪应变，$xy$ 面的剪应变为 γ_{xy} 或 γ_{yx}；yz 面的剪应变为 γ_{yz} 或 γ_{zy}；zx 面的剪应变为 γ_{zx} 或 γ_{xz}。一点的应变分量共有九个，分别为 $\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\gamma_{xy}=\gamma_{yx},\gamma_{yz}=\gamma_{zy},\gamma_{zx}=\gamma_{xz}$；独立的应变分量有六个，写成矩阵的形式有

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

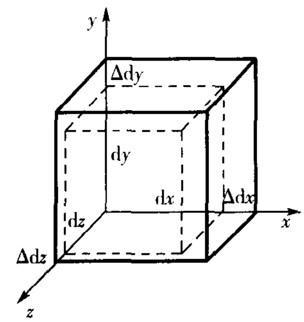


图 1－5　体元素的变形

应变正负号是这样规定的：伸长的线应变是正值应变，缩短的线应变是负值应变（与正应力的正负号规定相对应）；使正交线段的直角变小的剪应变是正值应变，使正交线段的直角变大的剪应变是负值应变，规定方法与材料力学不同。

4. 位移

一点的位移用沿坐标轴方向的三个位移分量描述：沿线 x 轴向线位移分量为 u，沿 y 轴向线位移分量为 v，沿 z 轴向线位移分量为 w。规定位移分量指向坐标轴正向为正值，位移分量指向坐标轴负向为负值。

弹性力学中需要求解的是应力、应变和位移共 15 个未知函数。

1.4　弹性力学简史

弹性力学是在不断解决工程实际问题的过程中产生并发展起来的一门科学。在 17～18 世纪，资本主义从萌芽走向兴盛时期，由于水利、造船、机械、军事等生产技术上的需要，相应的力学理论开始产生并得到迅速发展。1638 年，意大利科学家伽利略（G. Galieo）为了解决造船和水闸问题，写了《两种新科学的叙述与数学证明》一书，第一次提出了梁的弯曲问题及强度计算的概念。这被视为材料力学理论诞生的日子。1678 年，英国科学家虎克（R. Hooke）在大量实验的基础上，发现了弹性体变形与所受外力成正比的规律（Hooke 定律），这是材料力学理论分析问题的主要基础之一。1680 年，马略特（Mariotte）给出了梁的应力分布，并确定了中性轴的位置。17 世纪

末伯努利(Bernoulli)提出了弹性杆挠曲线的概念,1705 年,他又给出了梁的变形几何假设(平面假设)和弯曲公式。1738 年,瑞士科学家欧拉(Euler)和伯努利得出了梁的挠曲线方程,1757 年欧拉又给出压杆稳定公式。法国科学家库仑(Coulomb)1773 年提出了强度理论,1776 年完成了矩形截面梁弯曲的完整理论,1784 年建立了圆轴扭转理论。1807 年,英国科学家杨(Young)给出了弹性模量。

在这一时期,变形体力学的发展虽然都属于材料力学的范畴,但所提出的应力、应变的概念及研究成果为弹性力学理论的建立奠定了坚实的基础。

在 18 世纪末,由于欧洲工业革命之后生产力大为发展,在生产实践中遇到了各种更加复杂的强度和应力分析问题,例如应力集中问题、平面板件结构的应力分析、非圆截面杆的扭转等。材料力学理论已经不能解决这些相当复杂的变形体力学问题,弹性力学理论就在这样的背景下应运而生了。

1821 年,法国工程师、桥梁专家纳维叶(Navier)通过对弹性体研究,从牛顿(I. Newton)关于物质构造的概念出发,第一个建立了弹性体平衡(运动)微分方程,在巴黎科学院提出了一篇有关于物体空间一般平衡方程式的论文报告,弹性力学从此诞生了。法国的数学家柯西(Cauchy)也在研究同样的问题,在 1822 年到 1827 年间发表了一系列论文,提出了关于一点应变的概念。柯西把一点附近的变形通过六个应变分量表示出来,并导出了运动方程,建立了弹性理论中的应力理论及变形与位移的关系等。

1828 年,著名数学家泊松(Poisson)又进一步完善了弹性力学的基本方程。在随后的几十年间,对于各向异性和各向同性体的独立弹性系数的个数及泊松比的取值有过长期争论。后来的大量实验使格林(Green)从能量观点出发得到的应力 — 应变关系得到普遍承认。1852 年,拉梅(Lamé)推导出了弹性体的位移应该满足的方程式,出版了第一部关于弹性力学的著作,标志了弹性力学理论框架的形成。

弹性力学理论建立后的一个时期,由于方法不够完善,一时未能用于解决工程技术问题。1855 年法国科学家圣维南(Saint Venant)发现了体素形变之间的关系式 —— 变形连续性条件,使得本来用位移求解的弹性力学方法发展到可以用应力求解,这样奠定了解决工程技术问题的基础。

1855 年,圣维南还解决了非圆截面柱体杆件的自由扭转和等截面直杆的弯曲问题,并提出了局部性原理(圣维南原理)。俄国的卡道林解决了炮筒的应力问题(厚壁筒问题)。1822 年,俄国的戈洛文解决了曲杆的计算问题。1862 年,艾里(Airy)提出了求解平面问题的应力函数方法。1882 年,赫芝(Hertz)解决了接触问题。19 世纪 50 年代,英国麦克斯威尔(J. C. Maxwell)发展了光测弹性应力分析技术,又于 1864 年对只有两个力的简单情况提出了功的互等定理,意大利贝蒂(E. Betti)在 1872 年对该定理作了普遍证明。1850 年,柯切霍夫(G. Kirchhoff)解决了平板的平衡和振动问题。1873 年,卡斯提里亚诺(A. Castigliano)提出了卡氏第一定理和卡氏第二定理。

1884 年,法国的恩格塞尔(F. Engesser)提出了余能的概念,在 19 世纪末解决了平面或半空间体在集中力作用下的应力与变形问题(布希湟斯克问题)以及两个物体的接触应力问题。这些研究成果对于建筑工程,尤其是地基基础问题是非常重要的。1877 年和 1908 年,瑞利(Raylengh)和里兹(w. Rizt)从弹性力学虚功原理和最小势能原理出发,提出了后来被称为瑞利 — 李兹法的变分问题直接解法。另一个有名的近似解法 —— 伽辽金法是由伽辽金(Галёркин)于 1915 年提出。柯沃索夫在 1909 年首创了以复变函数解平面问题,穆斯海里什维里(Мусхелишвили)于 1933 年对它做了严格地论证,发展了弹性力学问题的复变函数求解方法。

20 世纪初,建筑工程中应用了钢筋混凝土,出现了一些新的结构物,如板、无梁楼盖及壳体

等。这就给弹性力学理论带来了很多新的课题。俄国的伽辽金、铁木辛柯(S. Timoshenko)发展了板强度的计算问题。符拉索夫发展了薄壁杆件及壳体、折板等空间结构计算理论。

1907年,冯.卡门(Von Karman)提出了薄板大挠度问题。1939年,冯.卡门和钱学森提出了薄壳的非线性稳定问题。1948 ~ 1957年,钱伟长用摄动法求解了薄板大挠度问题。1954年和1955年,胡海昌和鹫津久一郎分别独立地提出了三类变量的广义变分原理,学术界通常称为胡海昌一鹫津久一郎变分原理。1956年,泰勒(Turner)和克劳夫(Clough)等在分析飞机结构时首次用三角形单元求得平面应力问题的正确解。1960年,克劳夫第一次提出了"有限单元法"的名称,开创了有限元的理论和应用研究。钱伟长在1964 ~ 1983年期间,研究并提出了建立广义变分原理的拉氏乘子法。而拉氏乘子法最早见诸于1975年鹫津久一郎的《弹性和塑性力学中的变分法》一书中。

在这个时期,弹性力学由线弹性理论向非线性弹性理论发展。此外,随着电子计算机的问世和广泛应用,以变分原理为基础的有限单元法已成为解决工程技术问题和进行科学研究的不可或缺的技术手段。在这个时期中,各向异性弹性理论、非线性弹性理论、热弹性理论、气动弹性理论、粘弹性理论、线弹性断裂力学等弹性理论的交叉学科都得到了蓬勃发展。同时,弹性力学理论也渗透到物理学、地学、医学等基础学科的研究中。

习 题

1-1 在弹性力学研究的范围内,变形前连续的物体,变形后是否允许出现重叠或产生裂缝?

1-2 土体是由固体颗粒、水和气体三相物质组成的碎散颗粒集合体,是否是连续介质?在建筑物地基沉降问题中,可否作为连续介质处理?

1-3 "单一成分构成的物体是均匀体,也是各向同性体",此话是否正确?

1-4 一般混凝土构件和钢筋混凝土构件能否作为理想弹性体?一般的岩质地基和土质地基能否作为理想弹性体?

1-5 在材料力学问题中,有一类材料称为弹塑性材料,其应力一应变关系也是非线性的,它与非线性弹性有何区别?理想化的弹塑性材料模型主要有哪几类?

第2章　平面问题的基本理论

2.1　平面应力问题与平面应变问题的概念

一般来说，弹性力学问题都是三维的空间问题，其求解是相当复杂的。我们在研究弹性力学问题时，首先从研究平面问题出发是符合人们由浅入深的认识规律的。对于一些结构物的几何特征和受力都较为特殊的工程问题，在建立力学模型时进行合理的简化，把它作为平面问题求解可以满足工程上所要求的精度。平面问题又分为平面应力问题和平面应变问题两大类。

1. 平面应力问题

在工程实践中常常可以遇到如墙壁、船舶或飞机座舱隔板一类的结构物。这类结构物的几何特点是薄，在一个方向上的尺寸要远远小于另外两个方向上尺寸的最小值。其受力特点是载荷平行于板的平面，而且沿厚度方向都是均匀分布的，在前后板面没有载荷作用。这一类情况的力学模型简化为平面应力问题。

薄板的厚度为 t，以薄板的中面为 xOy 坐标平面，以中面的法线为 z 轴，建立坐标系如图 2-1 所示。因板面上($z=\pm t/2$) 不受力，所以有

$$(\sigma_z)_{z=\pm t/2}=0,(\tau_{zx})_{z=\pm t/2}=0,(\tau_{zy})_{z=\pm t/2}=0$$

由于板很薄，外力不沿厚度变化，而且应力沿板的厚度又是连续分布的，因此，可以认为在板内的各个点都有

$$\sigma_z=0,\tau_{zx}=0,\tau_{zy}=0$$

根据剪应力互等定理可知

$$\tau_{xz}=0,\tau_{yz}=0$$

这样一来，在薄板中只存在同处于 xOy 面的3个应力分量，即 $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}=\tau_{yx}$。应力单元体如图 2-2 所示。

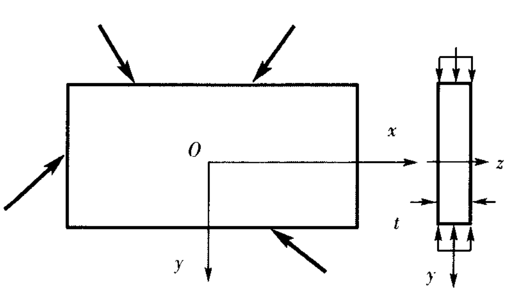


图 2-1　平板的受力特点

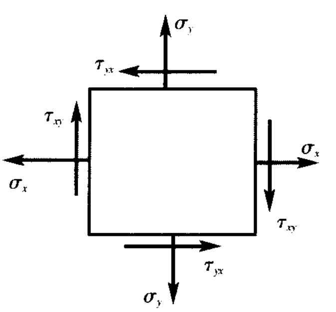


图 2-2　单元体上的应力

对于仅存在平行于 xOy 面的三个应力分量的均质薄板类问题，就称为平面应力问题。由于平面应力问题中板的表面不受约束，所以会发生 z 向的变形，即有 $\varepsilon_z \neq 0$。它可以按照广义胡克定律由 σ_x, σ_y 计算得到，所以并不是独立的未知函数。

2. 平面应变问题

在工程实践中还常常可以遇到如挡土墙、水坝、隧洞等一类的结构物。这类结构物的几何特点是长，在一个方向上的尺寸要远远大于另外两个方向上尺寸的最大值。其受力特点是载荷平行于结构物的横截面，并且沿结构物的轴线方向均匀分布。此外，结构所受的约束沿长度也不变。

这类结构简化为长度很长的等截面柱体：有的可以视为无限长柱体，有的可以把约束看作是刚性的，不允许物体内部沿长度方向有任何位移。结构无限长，那么任意一个横截面都可看成对称截面，而对称截面上的各点是不能产生沿 z 向位移的。我们在结构中任意取一个单位厚度的薄片（图 2-3）来研究。如果把约束看作是刚性的，那么横截面沿 z 向的任何线位移或倾斜同样也是不允许的。因此，对任意一个截面都有

$$w = 0, \varepsilon_z = 0$$

仅有

$$u = u(x, y), v = v(x, y)$$

此外

$$\gamma_{zx} = 0, \gamma_{zy} = 0$$

根据剪应力互等定理

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}, \tau_{zy} = \tau_{yz}$$

所以必然有

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = 0, \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0$$

其应变分量仅仅有

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy} = \gamma_{yx}$$

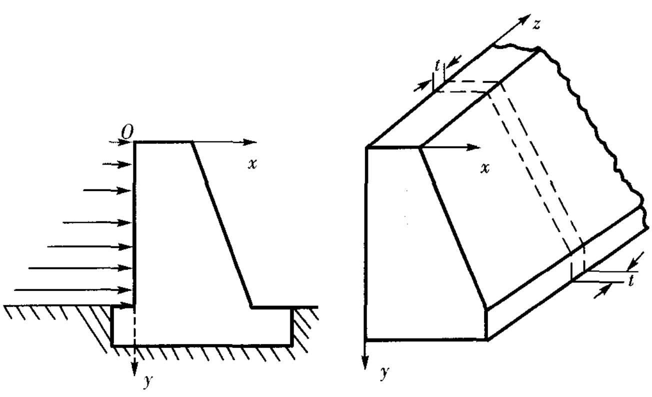


图 2-3　坝体结构及计算模型

对于满足上述条件的无限长柱体来说，所有的应变与位移都发生在 xOy 面内的问题就称为平面应变问题。在平面应变问题中，约束限制了结构内部质点在 z 向的位移，所以在 z 向就会存在约束反力。平面应变问题中存在 z 向的应力，因此应力分量有 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}$。由于根据广义胡克定律可以由 σ_x 和 σ_y 导出 σ_z，所以今后在解题中并不作为未知函数。

平面应力状态和平面应变状态的定义是严谨的，但是，实际工程中能严格满足平面应力或平

面应变条件的结构是很少的。尽管如此，我们仍然可以把相当一部分几何特点和受力与所述条件相近的结构按平面应力或平面应变问题求解。虽然求得的结果会和实际问题有一些差异，如果精度要求不高，这样处理问题还是可行的。

总之，把问题简化为平面问题之后，就是要求解出三个应力未知函数 $\sigma_x(x,y)$，$\sigma_y(x,y)$，$\tau_{xy}(x,y)$，三个应变未知函数 $\varepsilon_x(x,y)$，$\varepsilon_y(x,y)$，$\gamma_{xy}(x,y)$ 和两个位移未知函数 $u(x,y)$，$v(x,y)$。

2.2　平衡微分方程

——应力分量与体力分量之间的关系

要求得弹性体内的应力和位移分布状态，必须建立起用 2.1 节所述的八个未知函数描述的平衡方程、几何方程和物理方程。

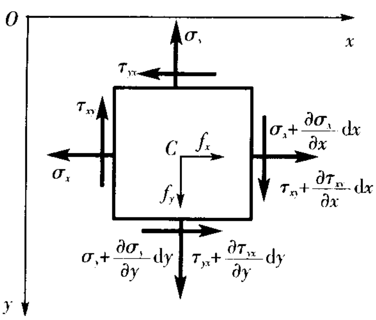


图 2-4　单元体上的应力及体积力

这里我们首先研究平面应力问题的平衡方程。为此，我们在单位厚度的弹性体内任意一点 $C(x,y)$ 的邻域内取一个边长分别是 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 的微单元体(图 2-4)。由于应力分量是点的坐标的函数，所以在单元体两个相对的平面上应力相差一个微量。由于单元体是微小的，故它的各个面上所受应力可认为是均匀分布的，体力也是均匀分布的。单元体上所受的应力为：x 面的应力为 σ_x,τ_{xy}；$x+\mathrm{d}x$ 面的应力为 $\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x,\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}y$；$y$ 面的应力为 σ_y,τ_{yx}；$y+\mathrm{d}y$ 面的应力为 $\sigma_y+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\mathrm{d}y,\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y$；体积力为 f_x,f_y。对单元体形心 C 的力矩平衡方程为

$$\sum M_C=0$$

$$\left(\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\,\frac{\mathrm{d}x}{2}+\tau_{xy}\mathrm{d}y\,\frac{\mathrm{d}x}{2}-\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}y}{2}-\tau_{yx}\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}y}{2}=0$$

化简后

$$\tau_{xy}+\frac{1}{2}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\mathrm{d}x=\tau_{yx}+\frac{1}{2}\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y$$

略去高阶微量，则有

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}\tag{2.1}$$

这再次证明了剪应力互等定理。建立单元体上所有力在 x 向的平衡方程

$$\sum F_x=0$$

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y-\sigma_x\mathrm{d}y+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x-\tau_{yx}\mathrm{d}x+f_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

化简后略去高阶微量得

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+f_x=0$$

同理，取 y 向的平衡方程

$$\sum F_y=0$$

可以得出另一个相似的平衡方程

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+f_y=0$$

把两个方程联立，并利用 $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ 关系后得到用偏微分方程组描述的平衡方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+f_x=0\\[2ex]\dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y}+f_y=0\end{cases}\tag{2.2}$$

写成矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{yx} & \sigma_y\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial y}\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}f_x\\ f_y\end{Bmatrix}=0\tag{2.2$'$}$$

由于平面应变问题中 z 方向的力自平衡，不能提供独立的求解应力的平衡方程。所以，平面应变状态下的平衡方程和平面应力的完全相同。平面问题的平衡微分方程又称纳维叶方程。

2.3　几何方程

——应变分量与位移分量之间的关系

我们取和坐标轴同向的两条正交微分线段 P_0A_0 和 P_0B_0 研究，而且 $P_0A_0=\mathrm{d}x$，$P_0B_0=\mathrm{d}y$。受力后两条线段位移到了新位置 P_1A_1 和 P_1B_1（图 2-5）。P_0 在 x 向的位移是 u，在 y 向的位移是 v。由于位移分量是点的位置坐标的函数，因此线段另外两个端点 A_0 和 B_0 的位移和 P_0 相差一个微量。P_0，A_0 和 B_0 在 x 向和 y 向的位移分别列于表 2-1。

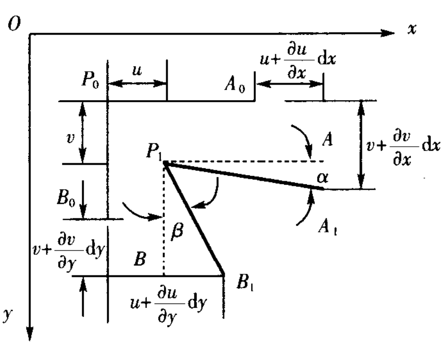


图 2-5　正交线段的位移

表 2-1　两条正交线段端点的位移

点	x 向位移	y 向位移
P_0	u	v
A_0	$u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x$	$v+\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x$
B_0	$u+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$	$v+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y$