根据普通高中课程标准实验教科书（人教·A版）编写

“伴你学”
新课程

数学

选 修4–1

几何证明选讲

新课程 新思想 新理念

XINKECHENG XINSIXIANG XINLINIAN

山东友谊出版社

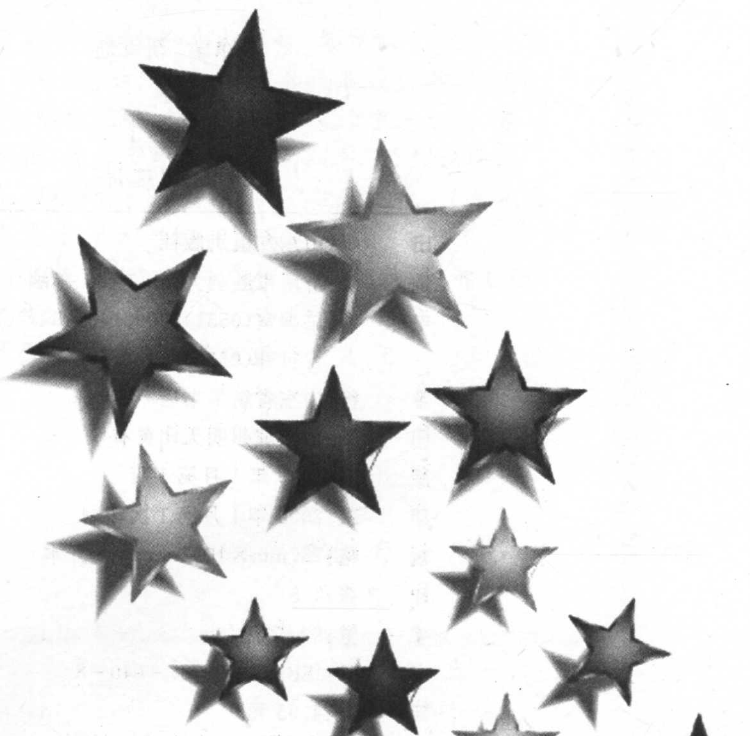
···“伴你学”新课程···

根据普通高中课程标准实验教科书(人教·A版)编写

数学

选修4－1

几何证明选讲



山东友谊出版社

"伴你学"新课程

数学

选修 4－1

几何证明选讲

出　　版:山东友谊出版社
地　　址:济南市胜利大街 39 号　**邮编**:250001
电　　话:总编室(0531)82098148　82098756
发行部(0531)82098147(传真)
发　　行:山东省新华书店
印　　刷:山东滨州明天印务有限公司
版　　次:2006 年 1 月第 1 版
印　　次:2006 年 1 月第 1 次印刷
规　　格:787mm×1092mm　16 开本
印　　张:4.5
字　　数:90 千字
书　　号:ISBN 7－80737－040－8
定　　价:4.95 元

编写说明

为了适应高中课程改革的需要，落实《基础教育课程改革纲要》中关于"注重培养学生的独立性和自主性"、"促进学生在教师的指导下主动地、富有个性地学习"的精神，体现教育教学改革最新成果，指导学生进行自主学习，减轻学生过重的课业负担，提高学习效率和质量，我们组织全省知名的教研员和骨干教师编写了这套《"伴你学"新课程》丛书.

《"伴你学"新课程》丛书包括9个学科.丛书编写以高中各学科课程标准为依据，以新的课程理念为指导，着眼于培养学生的创新精神和实践能力，侧重于学法指导和思维能力的培养.在栏目设置、习题编排上，紧扣课程标准的要求和高考改革的动向，突出应用性、新颖性和探究性，让学生巩固知识、发展能力、体验过程.

本书与高中数学实验教科书相配套，与教学同步，科学实用.收编的题目新颖、灵活、典型，知识和技能覆盖面广，重视解题方法、技巧归纳和思维训练等特色，设计理念独到.各模块按章节顺序编排，每章节均设有"学习目标"、"知识网络"、"学路导引"、"范例精析"、"过关评估"、"数学文化"、"单元检测"等自主性、探究性、开放性栏目.

本书主编：韩际清，参加编写的人员有：王洪涛、邢启强、徐晓祥、吕强、陈军.

殷切期望广大读者对本书提出宝贵意见，让我们与新课程改革一同成长.

编　者

2005年12月

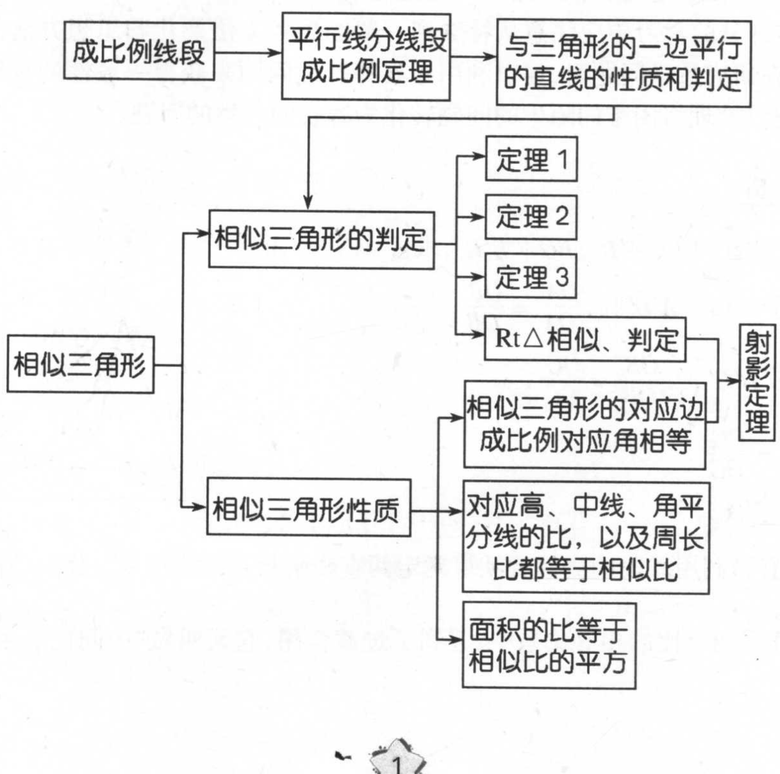
目 录

第一讲　相似三角形的判定及有关性质

学习目标

- 1. 理解平行线分线段成比例定理，能够应用平行线分线段成比例定理及其推论解决有关问题.
- 2. 掌握两三角形相似的判定定理.
- 3. 掌握相似三角形的性质定理，并能够应用他们解决一些有关三角形的问题.
- 4. 理解直角三角形的射影定理，掌握由相似三角形的性质定理及其推论推导直角三角形的射影定理.

知识网络



学路导引

学习重点

1. 平行线分线段成比例定理的理解和推导.
2. 相似三角形的判定定理和性质定理的理解和推导.
3. 对上述定理的应用.

学习难点

1. 平行线分线段成比例定理的掌握和应用.
2. 相似三角形的判定定理和性质定理的掌握和应用.
3. 直角三角形射影定理的应用.

学法指导

1. 对于平行线分线段成比例的学习应注意与以往所学习过的比例的有关性质如合比性质、等比性质相结合，注意新知识与旧知识的融会贯通，达到减小问题难度的目的.

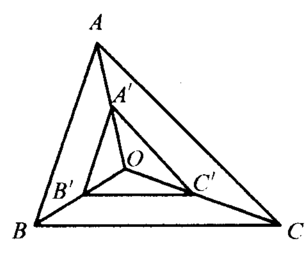
2. 对于相似三角形的学习，应该抓住判定和性质这两个重要环节，判定指的是什么情况时是这种关系，性质指的是这种关系有哪些特征.

3. 对于直角三角形射影定理的学习应结合相似三角形判定定理的应用及直角三角形的性质，应注意它是相似三角形判定定理的特例.

4. 在本部分的学习中应注意从特殊到一般的思考方法及化归思想方法的应用，因此，我们在研究数学问题时，可以利用考察特殊性问题来获得一般性的规律，或通过一定的逻辑推理将困难的陌生的问题转化为容易的熟悉的问题.

范例精析

【例 1】如图，$AB /\!/ A'B'$，$BC /\!/ B'C'$，求证：$A'C' /\!/ AC$.



【证明】$\because AB /\!/ A'B'$，$\therefore \dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{OB'}{OB}$.

$\because BC /\!/ B'C'$，$\therefore \dfrac{OB'}{OB}=\dfrac{OC'}{OC}$.

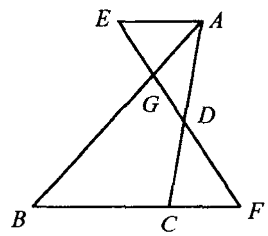
$\therefore \dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{OC'}{OC}$.

$\therefore A'C' /\!/ AC$.

【点评】(1)利用线段的比例关系可判定两直线平行；(2)这里$\dfrac{OB'}{OB}$分别等于$\dfrac{OA'}{OA}$和$\dfrac{OC'}{OC}$，它在证明两个比的相等关系中，起到了过渡作用，它又叫做“中间比”. 利用平行

线转移比例是常用的方法.

【例 2】如图,已知 D 为$\triangle ABC$ 中AC 边的中点,$AE /\!/ BC$,ED 交AB 于G,交 BC 延长线于 F,若 $BG:GA=3:1$,$BC=8$,求 AE 的长.



【精析】常用比例的方法结合方程来求未知线段.

【解】$\because AE /\!/ BC$,D 为AC 中点,

$\therefore AE=CF$.

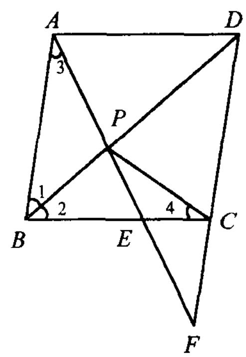
设 $AE=x$,

$\because AE /\!/ BC$,$\therefore \dfrac{AE}{BF}=\dfrac{AG}{BG}=\dfrac{1}{3}$.

又 $BC=8$,$\therefore \dfrac{x}{x+8}=\dfrac{1}{3}$,$3x=x+8$. $\therefore x=4$.

$\therefore AE=4$.

【例 3】如图,P 是菱形$ABCD$ 的对角线BD 上一点,连接 AP 并延长交BC 于E,与 DC 延长线交于F,连接 PC,求证:$AP^2=PE\cdot PF$.



【精析】(1)利用相似三角形证明线段成比例,是利用相似三角形解题的基础,也是证明比例式的重要方法.

(2)利用"基本图形",正确地找到"中间比",是常用的一种方法.

【证明】法一:$\because ABCD$ 为菱形,$\therefore \angle 1=\angle 2$,$AB=BC$.

又 BP 为公共边,$\therefore \triangle ABP \cong \triangle BPC$.

$\therefore AP=PC$,$\angle 3=\angle 4$.

$\because AB /\!/ CD$,$\therefore \angle F=\angle 3$.

$\therefore \angle 4=\angle F$.

又$\angle FPC$ 为公共角,$\therefore \triangle PEC \backsim \triangle PCF$.

$\therefore \dfrac{PC}{PF}=\dfrac{PE}{PC}$,即 $PC^2=PE\cdot PF$.

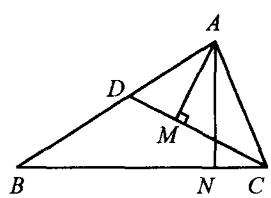
$\therefore AP^2=PE\cdot PF$.

法二$\because ABCD$ 为菱形,$\therefore AB /\!/ CD$,$AD /\!/ BC$.

$\therefore \dfrac{AP}{PE}=\dfrac{PD}{BP}$,$\dfrac{PD}{BP}=\dfrac{PF}{AP}$.

$\therefore \dfrac{AP}{PE}=\dfrac{PF}{AP}$,即 $AP^2=PE\cdot PF$.

【例 4】如图,已知$\triangle ABC$ 中,D 是AB 上一点,且$\angle ACD=\angle B$,$AM\perp CD$,$AN\perp BC$,垂足分别为 M、N,若 $AD=4$,$BD=5$,求$\dfrac{AM}{AN}$的值.



【解】$\because \angle ACD = \angle B, \angle CAD = \angle BAC$,

$\therefore \triangle ACD \backsim \triangle ABC$.

$\therefore \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AD}{AC}$,即 $AC^2 = AB \cdot CD$.

$\because AD = 4, BD = 5$,

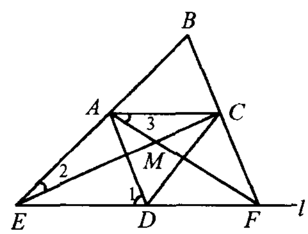
$\therefore AC^2 = (4+5) \times 4 = 36$. $\therefore AC = 6$.

$\because AM$、AN 分别是$\triangle ACD$、$\triangle ABC$ 对应边上的高,

$\therefore \dfrac{AM}{AN} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.

【点评】本题用相似三角形对应高的比等于相似比的性质解决问题,若用其他方法做,则比较困难.本题中把对应高换成对应中线或对应角平分线,结论是一样的.因此,解题时,应注意应用相似三角形的性质.

【例 5】如图,已知菱形 $ABCD$ 中,$\angle ABC = 60°$,直线 l 过点 D 点,但不与四边形 $ABCD$ 相交(D 点除外),l 与 BA、BC 的延长线分别交于 E、F,M 是 CE 与 AF 的交点.求证:$CA^2 = CM \cdot CE$.



【精析】本题难度较大,改成比例式后,要证$\triangle CAE \backsim \triangle CMA$,即要证$\angle CEA = \angle CAM$.由于$\angle EAC = 120°$,$\angle ACF = 120°$,故要证$\triangle EAC \backsim \triangle ACF$.又因为$\angle EAD = \angle DCF = 60°$,所以先要证明$\triangle AED \backsim \triangle CDF$.即要通过三对三角形相似才能解决问题.

【证明】在$\triangle EAD$ 和$\triangle CDF$ 中,$\angle EAD = \angle DCF = 60°$,

在菱形 $ABCD$ 中,$\angle ABC = 60°$,$AD /\!/ BC$,

$\therefore \angle 1 = \angle CFD$. $\therefore \triangle EAD \backsim \triangle DCF$.

$\therefore \dfrac{EA}{DA} = \dfrac{DC}{CF}$,即$\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AC}{CF}$.

$\because ABCD$ 为菱形,$\angle BAD = 120°$,

$\therefore \angle EAC = 120°$.同理$\angle ACF = 120°$.

$\therefore \triangle ACE \backsim \triangle ACF$. $\therefore \angle 2 = \angle 3$.

又$\angle ACM = \angle ECA$, $\therefore \triangle CAE \backsim \triangle CMA$.

$\therefore \dfrac{AC}{EC} = \dfrac{CM}{AC}$,即 $AC^2 = CM \cdot CE$.

【点评】本题要通过三对相似三角形不断加强条件,才能解决问题,因此解题中需要不断分析、探索.此外,要注意运用菱形四边相等来进行线段间的代换.

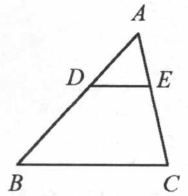
过关评估

1.1 平行线等分线段定理

A组

一、选择题

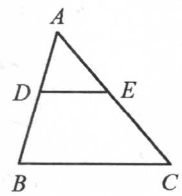
1.如图，$\triangle ABC$ 中，$DE \parallel BC$，则下列等式中不成立的是 ( )



A.$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$　　B.$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$

C.$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{DE}{BC}$　　D.$\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{DE}{BC}$

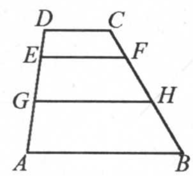
2.如图，$\triangle ABC$ 中，$DE \parallel BC$，$AD=1$，$DB=DE=2$，则 BC 长是 ( )



A.3　　B.4

C.5　　D.6

3.如图，梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel DC$，又 $EF \parallel GH \parallel AB$，若 $DE:EG:GA=2:3:4$，$AB=28$，$DC=10$，则 GH 的长为 ( )

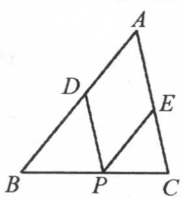


A.18　　B.20

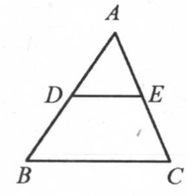
C.22　　D.19.5

二、填空题

4.如图，$\triangle ABC$ 中，点 P 在 BC 上，四边形 $ADPE$ 为平行四边形，则$\dfrac{BD}{DA}\cdot\dfrac{CE}{EA}=$__________.

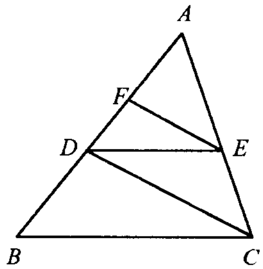


5.如图，DE 是$\triangle ABC$ 的中位线，且 $DE+BC=6$，则 BC 长为__________.

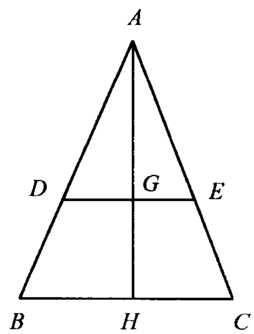


三、解答题

6. 如图，$\triangle ABC$ 中，$DE \parallel BC$，$FE \parallel DC$，$AF = 2$，$BF = 4$，求线段 DF 长.

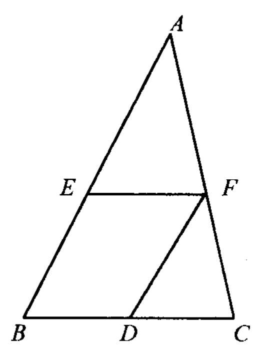


7. 如图，$\triangle ABC$ 中，$DE \parallel BC$，$AH \perp BC$ 于 F，AH 交 DE 于 G，$DE = 10$，$BC = 15$，$AG = 12$，求线段 AH 长.

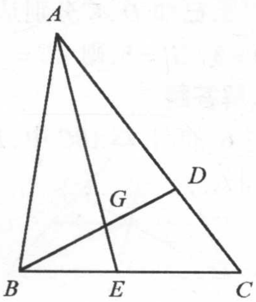


B组

1. 如图，$\triangle ABC$ 中，$EF \parallel BC$，$FD \parallel AB$，$AE = 18$，$CD = 14$，求线段 EF 的长.



2. 如图，$\triangle ABC$ 中，$AD=2DC$，G 是 BD 中点，AG 延长线交 BC 于 E，求 $\dfrac{BE}{EC}$ 的值.

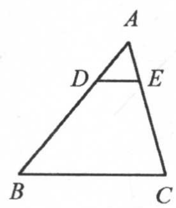


1.2　平行线分线段成比例定理

A组

一、选择题

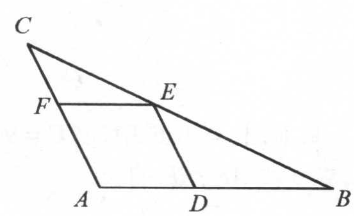
1. 如图，$\triangle ABC$ 中，$DE /\!/ BC$，$AD=1$，$EC=3$，则下列等式中成立的是　　（　　）



A. $DB:AE=1:3$　　B. $DE:AE=3:1$

C. $DB\cdot AE=3$　　D. $DB\cdot AE=\dfrac{1}{3}$

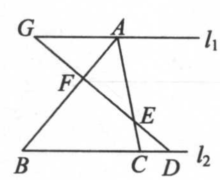
2. 如图，$\triangle ABC$ 中，D、E、F 分别是 AB、BC、AC 上的点，四边形 $ADEF$ 是菱形，$AB=15$，$AC=10$，则菱形的周长是　　（　　）



A. 6　　B. 16

C. 24　　D. 32

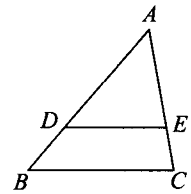
3. 如图，$l_1 /\!/ l_2$，$AF:FB=2:5$，$BC:CD=4:1$，则 $AE:EC=$　　（　　）



A. 5:2　　B. 4:1

C. 2:1　　D. 3:2

二、填空题

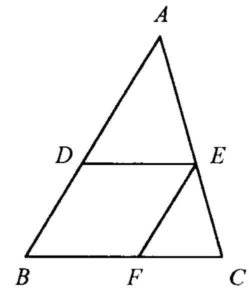


4.如图，$DE /\!/ BC$，$AB=15$，$AC=9$，$BD=4$，那么 $AE=$ ________.

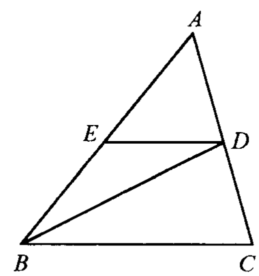
5.已知 D、E 分别是$\triangle ABC$ 边 AB、AC 上的点，$DE /\!/ BC$，$AE=6$，$AD=3$，$AB=5$，则 $AC=$ ________.

三、解答题

6.如图，$\triangle ABC$ 中，$DE /\!/ BC$，$EF /\!/ AB$，$AD:DB=3:2$，$FC=2$，$AC=6$，求 DE 和 CE 长.

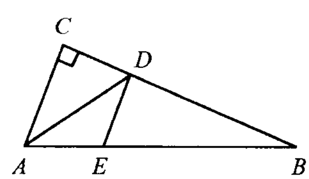


7.如图，$\triangle ABC$ 中，BD 是$\angle ABC$ 的平分线，$ED /\!/ BC$，$BC=7$，$AE=4$，求 ED 长.



B组

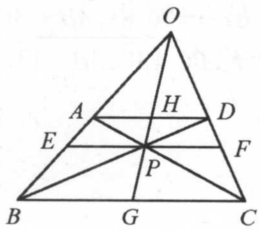
1.如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，AD 是$\angle BAC$ 的平分线，$DE /\!/ CA$，$CD=12$，$BD=15$，求线段 AE、BE 的长.



2.如图,已知梯形 $ABCD$ 对角线 AC 与 BD 相交于 P,两腰 BA、CD 的延长线相交于 O,$EF /\!/ BC$ 且 EF 过 P 点,求证:

(1)$EP=PF$;

(2)OP 平分 AD 和 BC.



1.3.1 相似三角形的判定

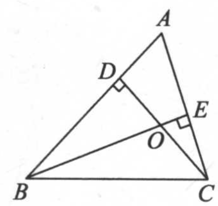
A组

一、选择题

1.如图,锐角三角形 ABC 的高 CD 和高 BE 相交于 O,则与 $\triangle DOB$ 相似的三角形个数是 ( )

A.1 B.2

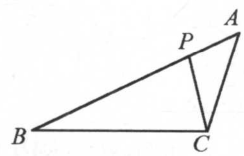
C.3 D.4



2.如图,$\triangle ABC$ 中,P 为 AB 上一点,下列四个条件:①$\angle ACP=\angle B$,②$\angle APC=\angle ACB$,③$AC^2=AP\cdot AB$,④$AB\cdot CP=AP\cdot CB$,其中能满足$\triangle APC$ 和$\triangle ACB$ 相似的条件是 ( )

A.①②④ B.①③④

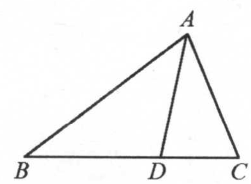
C.②③④ D.①②③



3.如图,要使$\triangle ACD \backsim \triangle BCA$,必须满足 ( )

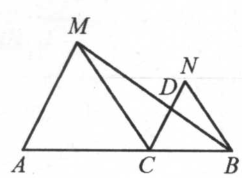
A.$\dfrac{AC}{CD}=\dfrac{AB}{AC}$ B.$\dfrac{CD}{AD}=\dfrac{BC}{AC}$

C.$AD^2=CD\cdot BD$ D.$AC^2=CD\cdot BC$

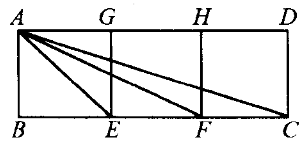


二、填空题

4.如图,C 为线段 AB 上一点,$\triangle ACM$、$\triangle CBN$ 都是等边三角形,若 $AC=3$,$BC=2$,则$\triangle MCD$ 与$\triangle BND$ 的面积比为________________.



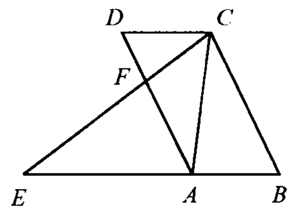
5.如图，$ABEG$，$GEFH$，$HFCD$ 都是正方形，则$\triangle AEC$相似于______________.



三、解答题

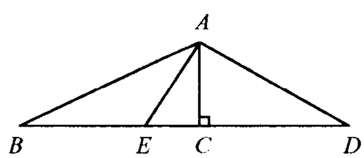
6.$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，AD 是底边 BC 上的高，BE 是 AC 上的中线，BE 和 AD 相交于 F，$BC=10$，$AB=13$，求 BF 长.

7.如图，$ABCD$ 是平行四边形，点 E 在边 BA 的延长线上，连接 CE 交 AD 于点 F，$\angle ECA=\angle D$，求证：$AC\cdot BE=CE\cdot AD$.



B组

1.如图，在$\triangle EAD$ 中，$\angle EAD=90°$，AC 是高，且$\angle BAE=\angle D$.求证：$BD\cdot EC=AB\cdot AC$.

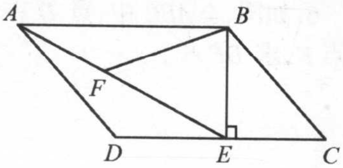


2.如图,在平行四边形 $ABCD$ 中,过点 B 作 $BE \perp CD$,垂足为 E,连接 AE,F 为 AE 上一点,且 $\angle BFE = \angle C$.

(1)求证:$\triangle ABF \backsim \triangle EAD$;

(2)若 $AB = 4$,$\angle BAE = 30°$,求 AE 的长;

(3)在(1)(2)条件下,若 $AD = 3$,求 BF 的长.



1.3.2 相似三角形的性质

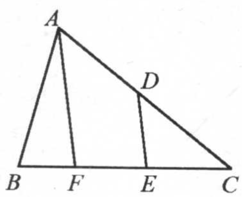
A组

一、选择题

1.两个相似三角形的相似比为4:9,那么这两个相似三角形的面积比为 (   )

A.2:3　　B.4:9　　C.4:81　　D.16:81

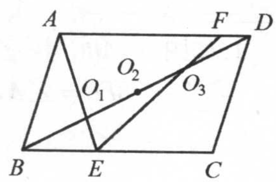
2.如图,$\triangle ABC$ 中,D 是 AC 中点,$AF /\!/ DE$,$S_{\triangle ABF} : S_{梯形AFED} = 1:3$,则 $S_{\triangle ABF} : S_{\triangle CDE} =$ (   )



A.1:2　　B.2:3

C.3:4　　D.1:1

3.如图,平行四边形 $ABCD$ 中,O_1、O_2、O_3 为对角线 BD 上三点,且 $BO_1 = O_1O_2 = O_2O_3 = O_3D$,连接 AO_1 并延长交 BC 于点 E,连接 EO_3 并延长交 AD 于 F,则 $AD:FD$ 等于 (   )

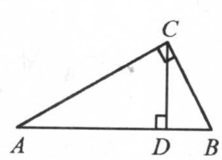


A.19:2　　B.9:1

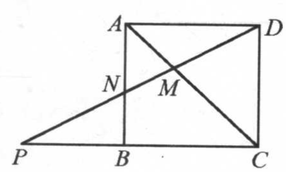
C.8:1　　D.7:1

二、填空题

4.如图,$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB = 90°$,$CD \perp AB$,D 为垂足,$AD = 8\text{cm}$,$DB = 2\text{cm}$,则 $CD =$ ______ cm.

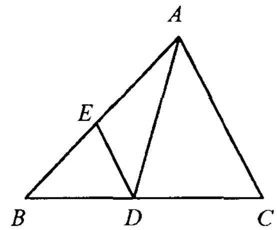


5.如图,正方形 $ABCD$ 中,过点 D 作 DP 交 AC 于点 M,交 AB 于点 N,交 CB 的延长线于点 P,若 $MN = 1$,$PN = 3$,则 DM 的长为______.

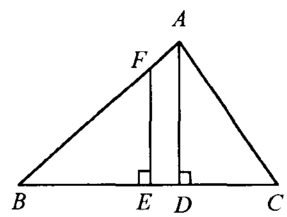


三、解答题

6.如图,$\triangle ABC$ 中,点 D 在 BC 上,$\angle DAC=\angle B$,$BD=4$,$DC=5$,$DE /\!/ AC$ 交 AB 于点 E,求 DE 长.



7.如图,$\triangle ABC$ 中,$AD\perp BC$,D 是垂足,E 是 BC 中点,$FE\perp BC$ 交 AB 于 F,$BD=6$,$DC=4$,$AB=8$,求 BF 长.



选修4—1 人教A版

B组

1.如图,$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,CD 是 AB 边上的高,E 是 AC 上一点,$CF\perp BE$ 于 F.求证:$\angle BFD=\angle A$.