本书获第六届全国高校出版社优秀畅销书奖

高中数学竞赛培优教程

（一试）

李名德　李胜宏　主编

浙江大學出版社

高中数学竞赛培优教程

（一试）

主编　李名德　李胜宏
编委　许纪传　马茂年
　　　占章根　赵庆跃
　　　石世昌

浙江大學出版社

图书在版编目（CIP）数据

高中数学竞赛培优教程. 一试 / 李名德，李胜宏主编.
杭州：浙江大学出版社，2003. 4
ISBN 7-308-03242-6

Ⅰ. 高...　Ⅱ. ①李...②李...　Ⅲ. 数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ. G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 000786 号

出版发行　浙江大学出版社
（杭州浙大路 38 号　邮政编码 310027）
（E-mail:zupress@mail. hz. zj. cn）
（网址:http://www. zjupress. com）
责任编辑　杨晓鸣
排　　版　浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷　浙江遂昌印业有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　24. 75
字　　数　600 千字
版 印 次　2003 年 4 月第 1 版　2006 年 1 月第 8 次印刷
印　　数　41000-50000
书　　号　ISBN 7-308-03242-6/G・593
定　　价　26. 00 元

前　言

我国自1985年首次参加国际中学生数学奥林匹克竞赛以来，连年取得了优异的成绩，多次获得团体总分第一，此事备受世界各国的关注，同时也激发了我国广大中学生对数学的热情与兴趣。这无疑对培养人才起到了积极的推动作用。我省在浙江省数学会的积极组织和推动下，自1997年至今每年假期举办为期1至2周的浙江省数学夏令营活动，邀请具有丰富教学经验的高级中学的特级教师、高级教师和大学的教授、专家授课。这项活动取得了显著的成绩。近几年来，我省在全国高中数学联合竞赛中成绩屡屡名列前茅。

为了适应广大中学生对数学奥林匹克竞赛指导教程的需要，以及为从事中学数学工作者指导学生提供有益的参考资料，我们邀请历年担任浙江省数学夏令营授课的大学教授，中学特级教师、高级教师，结合新编的高中数学教材内容，编写了针对全国高中数学联合竞赛（一试、二试）要求的高中数学竞赛同步辅导丛书。丛书是在历年（自1997年始）数学夏令营授课讲义的基础上，经修改、补充、完善而成。丛书由浙江大学教授、博士生导师、全国数学奥林匹克竞赛领队李胜宏和浙江大学教授李名德先生主编。

本书是按全国高中数学联合竞赛初试（一试）的要求编写的，与高中数学竞赛大纲和新编高中数学教材同步配套，并相应地分为若干章节，每个章节除精选典型例题外，还编拟了巩固练习题，供学生课外训练。本书对广大参加高考的学生也有一定的参考价值。

本书第三次重印时，立体几何部分增加了几组巩固练习题，同时纠正了一些笔误。本书在第六次重印时，作出了一定的修订，增加了概率与统计、极限和导数等内容。

参加本书编写的人员有：杭州高级中学特级教师许纪传，杭州十四中学特级教师占章根，杭州十四中学特级教师马茂年，杭州二中高级教师赵庆跃，杭州外国语学校特级教师石世昌。

本书出版以来，颇受读者青睐，售量不断攀升。2004年荣获全国高校出版社优秀畅销图书奖。同时，很多读者提出了宝贵的意见。根据广大读者的意见，我们作了较大的修订和内容调整，使本书日臻完善和成熟。感谢读者的厚爱，也希望广大读者一如既往关注本书。

2005 **年秋**

目　录

第一章　集合与简易逻辑

§1.1　集合的概念与运算

[内容提要]

1. 集合的概念

(1) 集合是一个原始概念，是数学中一个不定义的概念，但要掌握它的几个特性，这就是元素的确定性、元素的互异性、元素的无序性和元素的任意性.

(2) 可以按集合所含元素的个数加以分类：元素个数是有限个的集合称为有限集；元素个数是无限个的集合称为无限集. 特别地，不含任何元素的集合称作空集，用 $\varnothing$ 表示.

(3) 通常，可以用列举法与描述法来表示一个集合.

2. 子集的概念

(1) 应区分子集与真子集的概念. "A 是 B 的子集"记作 $A \subseteq B$，"M 是 P 的真子集"记作 $M \subsetneqq P$. 特别地，若 $A \subseteq B$，且 $B \subseteq A$，则称 A、B 两集合相等，记作 $A = B$.

(2) 空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集.

(3) 若一个集合含有 n 个元素，则这个集合共有 2^n 个子集(即 $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$)，共有 $2^n - 1$ 个真子集.

3. 集合的运算

(1) 应正确理解并熟练地进行集合的交、并、补的运算，并能善于运用韦恩图加以表示. $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$，$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$，$\complement_U A = \{x \mid x \in U, x \notin A, A \subseteq U\}$.

(2) 集合运算中一些常用结论如下：

① 交换律：$A \cap B = B \cap A$，$A \cup B = B \cup A$；

② 结合律：$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$，$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$；

③ 分配律：$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$，

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$；

④ 吸收律：$A \cup (A \cap B) = A$，$A \cap (A \cup B) = A$；

⑤ 反演律(摩根律)：$\complement_U (A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B$，

$$\complement_U(A \cup B) = \complement_U A \cap \complement_U B.$$

4. 有限集的元素个数

有限集元素的个数有如下性质：

对任意两个有限集合 A，B，有 $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$. 由摩根律，设 U 是全集，U，A，B 是有限集，有 $\text{card}[\complement_U(A \cup B)] = \text{card}(U) - \complement_U A - \complement_U B + \complement_U(A \cap B)$.

一般地，对任意 n 个有限集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有 $\text{card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1} \cup A_n) = [\text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) + \cdots + \text{card}(A_n)] - [\text{card}(A_1 \cap A_2) + \text{card}(A_1 \cap A_3) + \cdots + \text{card}(A_1 \cap A_n) + \cdots + \text{card}(A_{n-1} \cap A_n)] + [\text{card}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \cdots + \text{card}(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n)] - \cdots + (-1)^{n-1}\text{card}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$. ①

$\text{card}[\complement_U(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)] = \text{card}(U) - [\text{card}(A_1) + \text{card}(A_2) + \cdots + \text{card}(A_n)] + [\text{card}(A_1 \cap A_2) + \text{card}(A_1 \cap A_3) + \cdots + \text{card}(A_{n-1} \cap A_n)] - [\text{card}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \cdots + \text{card}(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n)] + \cdots + (-1)^n\text{card}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$. ②

公式 ①、② 叫做容斥原理，运用容斥原理，可解决一类求有限集合元素个数问题.

[方法导引]

在解与集合有关的题时，要明确集合中的元素是什么. 如"集合 $M = \{$抛物线$\}$，$N = \{$直线$\}$，那么 $M \cap N$ 中的元素个数是多少?"此题中 M 中的元素是抛物线，N 中的元素为直线，M 与 N 显然无公共元素. 又如集合 $\{3,4\}$ 与 $\{(3,4)\}$，$\varnothing$ 与 $\{\varnothing\}$ 均是不同的，需明确区分. 集合中元素的互异性也是要注意的.

由于 $\varnothing$ 的特殊性，解题时常被忽略而造成答案的不严密甚至错误，因此要特别注意 $\varnothing$.

[典例精析]

例 1.1 已知集合 $A = \{p \mid x^2 + 2(p-1)x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$，求一次函数 $y = 2x - 1, x \in A$ 的取值范围.

分析 关键是理解集合 A 中元素的属性. p 的取值范围必须满足关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2(p-1)x + 1 = 0$ 有实数根.

解 由已知 $\Delta = 4(p-1)^2 - 4 \geqslant 0$. 得 $p \geqslant 2$ 或 $p \leqslant 0$. 所以 $A = \{p \mid p \geqslant 2$ 或 $p \leqslant 0\}$. 因为 $x \in A$，所以 $x \geqslant 2$ 或 $x \leqslant 0$，所以 $2x - 1 \geqslant 3$ 或 $2x - 1 \leqslant -1$，所以 y 的取值范围是 $\{y \mid y \leqslant -1$ 或 $y \geqslant 3\}$.

例 1.2 已知 $A = \{x \mid x^2 + x - 6 = 0\}$，$B = \{x \mid mx + 1 = 0\}$，且 $B \cup A = A$，求实数 m 的取值范围.

错解 因为 $A = \{x \mid x^2 + x - 6 = 0\} = \{-3, 2\}$，且 $B \cup A = A$，

所以 $B = \{-3\}$，或 $B = \{2\}$，即 $-3m + 1 = 0$，或 $2m + 1 = 0$.

故 $m \in \left\{\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{2}\right\}$.

分析 问题错在对集合 B 考虑的不全面，$B = \{x \mid mx + 1 = 0\}$ 代表方程 $mx + 1 = 0$ 的解集，可以有一解，也可无解. 而无解的情况是 $B = \varnothing$，这种情况又恰恰满足 $B \cup A = A$ 的题设条件. 错的原因有两个，其一是忽略了 $mx + 1 = 0$ 会无解；其二是忽略了 $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$ 及 $\varnothing$ 是任何集合的子集.

正解 因为 $A = \{x \mid x^2 + x - 6 = 0\} = \{-3, 2\}$，且 $B = \{x \mid mx + 1 = 0\}$，$B \cup A = A$，

所以 $B=\{-3\}$，$B=\{2\}$，或 $B=\varnothing$，即 $-3m+1=0$，$2m+1=0$，或 $m=0$.

故实数 $m\in\left\{\frac{1}{3},-\frac{1}{2},0\right\}$.

例 1.3　已知集合 $A=\{x\mid x^2+ax+12b=0\}$ 和 $B=\{x\mid x^2-ax+b=0\}$，满足 $\complement_I A\cap B=\{2\}$，$A\cap\complement_I B=\{4\}$，$I=\mathbf{R}$，求实数 a、b 的值.

分析　解题关键是对交集 $\complement_I A\cap B$ 和 $A\cap\complement_I B$ 的理解．由交集定义知，若 $x\in(A\cap B)$，则 $x\in A$ 且 $x\in B$．由此可推得，若 $x\in(\complement_I A\cap B)$，则有 $x\in B$，但 $x\notin A$；若 $x\in(\complement_I A\cap\complement_I B)$，则有 $x\notin B$，且 $x\notin A$．这样将 2 和 4 代入相关的式中，就可以求出 a，b 的值.

解　由条件 $\complement_I A\cap B=\{2\}$ 和 $A\cap\complement_I B=\{4\}$ 知，$2\in B$，但 $2\notin A$；$4\in A$，但 $4\notin B$.

将 $x=2$ 和 $x=4$ 分别代入 B，A 两集合中的方程式，得 $\begin{cases}2^2-2a+b=0,\\4^2+4a+12b=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}4+a+3b=0,\\4-2a+b=0.\end{cases}$ 解得 $a=\frac{8}{7}$，$b=-\frac{12}{7}$.

例 1.4　已知 $A=\{x\mid |x-a|\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid x^2+7x-8>0\}$，分别就下面条件求 a 的取值范围．(1) $A\cap B=\varnothing$；(2) $A\cap B=B$.

分析　第一步先解绝对值不等式和一元二次不等式，然后根据 $A\cap B=\varnothing$ 和 $A\cap B=B(B\subseteq A)$ 这两个条件进行求解．此外，由 $A\cap B=\varnothing$ 和 $A\cap B=B$ 这两个条件可通过画数轴表示，以帮助思考.

解　(1) 因为 $A=\{x\mid |x-a|\leqslant 3\}=\{x\mid a-3\leqslant x\leqslant a+3\}$，$B=\{x\mid x^2+7x-8>0\}=\{x\mid x<-8$ 或 $x>1\}$，而 $A\cap B=\varnothing$，所以 $\begin{cases}a-3\geqslant -8,\\a+3\leqslant 1.\end{cases}$ 解不等式组，得 $-5\leqslant a\leqslant -2$.

(2) 因为 $A=\{x\mid a-3\leqslant x\leqslant a+3\}$，$B=\{x\mid x<-8$ 或 $x>1\}$，

又由 $A\cap B=B$，知 $B\subseteq A$．所以 $a+3<-8$，或 $a-3>1$．解之得 $a<-11$，或 $a>4$.

例 1.5　关于实数的不等式 $\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$ 与 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0(a\in\mathbf{R})$ 的解集分别为 A 与 B，求使 $A\subseteq B$ 的 a 的取值范围.

解法 1　由已知，$A=\{x\mid 2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$.

设 $f(x)=x^2-3(a+1)x+2(3a+1)$，$A\subseteq B$ 的充分必要条件是 $f(x)=0$ 的根分别在区间 $(-\infty,2a]$ 与 $[a^2+1,+\infty)$，于是 $\begin{cases}f(2a)=-2a^2+2\leqslant 0,\\f(a^2+1)=(a+1)\cdot a(a-1)(a-3)\leqslant 0,\end{cases}$

解得 $1\leqslant a\leqslant 3$，或 $a=-1$．所以 $1\leqslant a\leqslant 3$，或 $a=-1$．即 $a\in\{a\mid 1\leqslant a\leqslant 3$，或 $a=-1\}$.

解法 2　由已知，$A=\{x\mid 2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$，所以 $a^2+1\geqslant 2a$ 恒成立，解得 $A\neq\varnothing$.

若 $3a+1\geqslant 2$，则 $B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3a+1\}$.

若 $3a+1\leqslant 2$，则 $B=\{x\mid 3a+1\leqslant x\leqslant 2\}$.

$A\subseteq B$ 的充分必要条件是：$\begin{cases}3a+1\geqslant a^2+1,\\2a\geqslant 2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a^2+1\leqslant 2,\\3a+1\leqslant 2a,\end{cases}$

解得 $1\leqslant a\leqslant 3$，或 $a=-1$.

所以 $a\in\{a\mid 1\leqslant a\leqslant 3$，或 $a=-1\}$.

例 1.6　有 100 种食品，其中含维生素 A 的有 72 种，含维生素 C 的有 54 种，求同时含维生素 A，C 的

食品种数的最大值和最小值.

分析　解决这个问题有两种途径：一是利用容斥原理，将要求的两集合的交集的元素个数的最值问题转化为它们的并集的元素个数的最值问题；二是利用文氏图.

解法1　设含有维生素 A、C 的食品的集合分别为 M、N，则 $\mathrm{card}(M)=72$，$\mathrm{card}(N)=54$，得 $\mathrm{card}(M\cap N)=72+54-\mathrm{card}(M\cup N)$.

显然 $\mathrm{card}(M\cup N)$ 的最大值为 100，最小值为 72，故 $\mathrm{card}(M\cap N)$ 的最小值为 26，最大值为 54，即同时含有维生素 A、C 的食品种数的最小值为 26，最大值为 54.

解法2　如图 1-1，设 100 种食品的集合为 U. 当 M、N 被“拉开”到最大限度，即 $M\cup N$ 充满 U 时，M、N 掺合部分最小. 这时 $\mathrm{card}(M\cup N)=100$，$\mathrm{card}(M\cap N)$ 的最小值为 26，而 M、N 掺合部分最大时，即 $M\supsetneqq N$ 时，$\mathrm{card}(M\cap N)$ 最大，其值为 54.

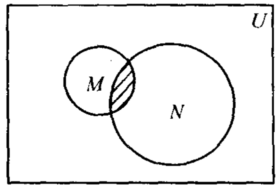

图 1-1

例 1.7　(1) 已知全集 $U=\{30\text{ 以内的质数}\}$，它的子集 A、B 满足 $\complement_U A\cap B=\{2,7,17\}$，$A\cap\complement_U B=\{3,23\}$，$\complement_U A\cap\complement_U B=\{5,13,29\}$，求集合 A 与 B；

(2) 已知集合 A、B 满足 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，求满足条件的有序二元组 (A,B) 的个数.

解　(1) 解法1　由 $\complement_U A\cap B=\{2,7,17\}$ 及 $\complement_U A\cap\complement_U B=\{5,13,29\}$，得 $\complement_U A=\{2,5,7,13,17,29\}$. 再由 $A\cap\complement_U B=\{3,23\}$ 及 $\complement_U A\cap\complement_U B=\{5,13,29\}$，又得 $\complement_U B=\{3,5,13,23,29\}$. 又全集 $U=\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29\}$，所以 $A=\{3,11,19,23\}$，$B=\{2,7,11,17,19\}$.

解法2　因为全集 $U=\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29\}$，我们画出韦恩图(图 1-2). 从图中可以立即求得 $A=\{3,11,19,23\}$，$B=\{2,7,11,17,19\}$.

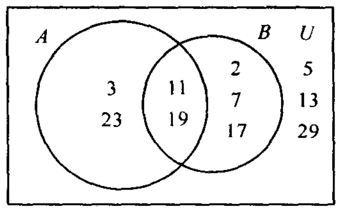

图 1-2

(2) 利用韦恩图(图 1-3)，我们可将 $A\cup B$ 划分成(1)、(2)、(3)三个区域，于是 1,2,3,4,5,6,7,8,9 中的每个数都可以有 3 种选择方法，故有序二元组 (A,B) 的个数应等于 3^9.

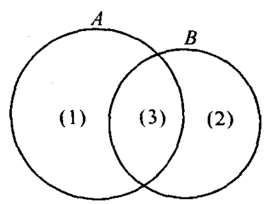

图 1-3

说明　第(1)小题的解法 1，我们利用了 $M=(M\cap P)\cup(M\cap\complement_U P)$ 这一性质，解法 2 及第(2)小题我们都利用了韦恩图. 显然后者能使抽象的概念形象化，从而使运算更为简捷.

例 1.8　已知集合 $M=\{x\mid f(x)-x=0,x\in\mathbf{R}\}$ 与集合 $P=\{x\mid f[f(x)]-x=0,x\in\mathbf{R}\}$，其中 $f(x)$ 是一个二次项系数为 1 的二次函数.

(1) 讨论 M 与 P 的关系；(2) 若 M 是单元素集，求证 $P=M$.

解　(1) 设 $x_0\in M$，则 $f(x_0)=x_0$，于是 $f[f(x_0)]=f(x_0)=x_0$，这说明 $x_0\in P$，由此得 $M\subseteq P$.

(2) 由题意可设 $M=\{a\}(a\in\mathbf{R})$，则关于 x 的一元二次方程 $f(x)-x=0$ 有两个相同的实根，即有 $f(x)-x=(x-a)^2$，由此得表达式 $f(x)=(x-a)^2+x$.

再由方程 $f[f(x)]-x=0$，得 $x=\{[(x-a)^2+x]-a\}^2+[(x-a)^2+x]$，整理得 $[(x-a)^2+(x-a)]^2+(x-a)^2=0$，即 $(x-a)^2[(x-a+1)^2+1]=0$. 因为 x、$a\in\mathbf{R}$，所以 $(x-a+1)^2+1\neq 0$，于

是 $x=a$. 这说明方程 $f[f(x)]-x=0$ 也仅有一实根 a，即 $P=\{a\}$，所以 $P=M$.

说明　集合与集合的关系是包含与不包含、相等与不相等的关系(当集合作为元素时例外). 要证明两个集合 A 与 B 相等，通常是证明 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$. 本题的证明方法是直接证明它们所含元素相同. 一般地说，在元素个数较少(1 个或 2 个) 的情况下，利用这一方法也比较简单.

例 1.9　已知 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x,y,\lg(xy)\}$，$B=\{0,|x|,|y|\}$. 若集合 $A\cap B=B$ 且 $A\cap(\complement_U B)=\varnothing$，求 $\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\cdots+\left(x^{2003}+\frac{1}{y^{2003}}\right)$ 的值.

分析　求值归结于求出 x、y，而这有两个未知数，需从已知条件中导出两个独立的等量关系. 由 $A\cap B=B$ 有 $A\supseteq B$，由 $A\cap(\complement_U B)=\varnothing$ 有 $A\subseteq B$. 于是 $A=B$，根据有限等集的性质有

$$\begin{cases}x+y+\lg(xy)=|x|+y,\\ xy\cdot\lg(xy)=|x|\cdot y\cdot 0.\end{cases}$$

这个方程组解起来比较复杂，如果注意到集合 B 中含有一个已知元素 0，从它出发，根据等集的定义(互为子集) 逐一讨论便可确定 x、y 的值.

解　根据元素的互异性，由 B 知 $x\neq 0$，$y\neq 0$.

$\because 0\in B$，且 $A=B$，$\therefore 0\in A$.

故只有 $\lg(xy)=0$，从而 $xy=1$.

又由 $1\in A$ 及 $A=B$，得 $1\in B$. 于是有 $\begin{cases}|x|=1,\\ xy=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}xy=1,\\ y=1.\end{cases}$

其中 $x=y=1$ 与元素的互异性矛盾，所以 $x=y=-1$ 代入得

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\cdots+\left(x^{2003}+\frac{1}{y^{2003}}\right)=-2+2-2+\cdots+2-2=-2.$$

说明　本题主要应用了集合相等的概念和集合中元素的性质，计算量不大，概念性较强. 关于子集有下述重要刻画：$A\subseteq B\Leftrightarrow\complement_U B\subseteq\complement_U A\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow A\cap(\complement_U B)=\varnothing$.

求解集合问题的关键是认清集合的元素，认清集合之后，往往还需要借助于语言转换(将正规的集合语言转化为通俗的非集合语言) 来弄懂题意，进而去解决问题.

例 1.10　已知集合 $P=\{x\mid x^2+2tx-4t-3>0\}$，$Q=\{x\mid x^2+2tx-2t=0\}$，定义 $A=\{t\mid P=\mathbf{R}\}$，集合 $B=\{t\mid Q\neq\varnothing\}$，其中 x，t 均为实数.

(1) 求 $A\cap B$；(2) 设 m 为实数，$g(m)=m^2-3$，求 $M=\{m\mid g(m)\in A\cap B\}$.

分析　集合 A 实质上为使得不等式 $x^2+2tx-4t-3>0$ 恒成立的实数 t 的取值范围；集合 B 实质上为使得方程 $x^2+2tx-2t=0$ 解集非空的实数 t 的取值范围.

解　(1) 集合 A 实际上是：使得 $x^2+2tx-4t-3>0$ 恒成立的所有实数 t 的集合，故令 $\Delta_1=(2t)^2-4(-4t-3)<0$，解得 $-3<t<-1$.

集合 B 实际上是：使得方程 $x^2+2tx-2t=0$ 有解的所有实数 t 的集合. 故令 $\Delta_2=(2t)^2-4\cdot(-2t)\geqslant 0$，解得 $t\geqslant 0$ 或 $t\leqslant -2$.

所以，$A=(-3,-1)$，$B=(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$，$A\cap B=(-3,-2]$.

(2) 设 $g(m)=u$，则问题(2) 可转化为：已知函数 $u=g(m)$ 的值域为 $u\in(-3,-2]$，求其定义域. 令 $-3<m^2-3\leqslant -2$，可解得 $-1\leqslant m\leqslant 0$ 或 $0<m\leqslant 1$.

所以，$M=\{m\mid -1\leqslant m<0$ 或 $0<m\leqslant 1\}$.

说明 集合作为近、现代数学的重要基础，集合语言、集合思想也已经渗透到数学的方方面面．集合和简易逻辑，是学习、掌握和使用数学语言的基础．本题以集合和逻辑为背景，主要考查对数学符号语言的阅读、理解以及迁移转化的能力．对于两个相等的有限数集，有时需用到它们的简单性质：① 相等两集合的元素个数相等；② 相等两集合的元素之和相等；③ 相等两集合的元素之积相等．

[巩固练习]

一、选择题

1. 记全集 $U=\{x\mid 1\leqslant x<11,x\in\mathbf{N}\}$，则满足 $\{1,3,5,7,9,10\}\cap \complement_U P=\{1,5,7,9\}$ 的所有集合 P 的个数是（　　）

(A)4　　(B)6　　(C)8　　(D)16

2. 已知不等式 $(k^2+4k-5)x^2+4(1-k)x+3>0$ 对任何实数 x 都成立，则关于 x 的方程 $3x^2+2\sqrt{2}(k-\sqrt{2})x+k-8\sqrt{10}=0$（　　）

(A) 有两个相等的实根　　(B) 有两个不等的实根

(C) 无实根　　(D) 有无实根不确定

3. 满足 $\{a_1,a_2\}\subseteq P\subsetneqq\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{n-1},a_n\}(n\in\mathbf{N},n\geqslant 3)$ 的集合 P 共有（　　）

(A)$2^{n-3}-1$ 个　　(B)$2^{n-2}-1$ 个　　(C)$2^{n-1}-1$ 个　　(D)2^n-1 个

4. 已知集合 M 与 P 满足 $M\cup P=\{a,b,c\}$．当 $M\neq P$ 时 (M,P) 与 (P,M) 看作不同的一对，则这样的 (M,P) 对的个数是（　　）

(A)8 个　　(B)9 个　　(C)26 个　　(D)27 个

5. 已知集合 $P=\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$，它的所有非空子集记作 $P_k(k\in\mathbf{N},1\leqslant k\leqslant 2047)$，每一个 P_k 中所有元素的乘积记作 $p_k(k\in\mathbf{N},1\leqslant k\leqslant 2047)$，则所有 p_k 之和 $p_1+p_2+p_3+\cdots+p_{2047}$ 的值等于（　　）

(A)-1　　(B)0　　(C)1　　(D)240

6. 在全集 $U=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 100,x\in\mathbf{N}\}$ 的所有子集中，最大元素为 66 的子集个数为 p，最小元素为 33 的子集个数为 q，最大元素为最小元素的 3 倍的子集个数为 r，则 p、q、r 的大小关系是（　　）

(A)$p<q<r$　　(B)$q<r<p$　　(C)$r<p<q$　　(D)$p<r<q$

二、填空题

7. 用列举法表示集合 $\left\{u\ \middle|\ u=\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{z}{|z|}+\frac{xy}{|xy|}+\frac{xyz}{|xyz|},xyz\neq 0,x、y、z\in\mathbf{R}\right\}$ $=$ ________．

8. 已知集合 $M=\{t\mid t^2-5t+6<0\}$，$x=\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{4}}+\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{7}}\frac{1}{4}}$，则 x 与 M 的关系是________．

9. 已知集合 $A=\{x\mid ax^2-3x+2=0,x\in\mathbf{R}\}$．

(1) 若 A 是空集，则实数 a 的取值范围是________；

(2) 若 A 仅含一个元素（即 A 是单元素集），则实数 $a=$ ________．

10. 已知集合 $M=\left\{n\ \middle|\ -\frac{1}{2}<\log_{\frac{1}{n}}10\leqslant-\frac{1}{3},n\in\mathbf{N},n>1\right\}$，则 M 的非空真子集个数是________

个.

11. 已知集合 $A=\{y \mid y=-x^2-2x, x\in \mathbf{R}\}$，$B=\{y \mid y=2x^2+2x+1, x\in \mathbf{R}\}$，则 $A\cap B=$ ________.

12. 已知集合 $P=\{(x,y) \mid x^2+(y-b)^2\leqslant 1\}$ 与 $M=\{(x,y) \mid x^2\leqslant y\}$ 满足 $P\cap M=P$，则实数 b 的取值范围是________.

三、解答题

13. 已知集合 $M=\{x \mid x^2+px+q<0\}$ 与 $P=\{x \mid x^2-7x+10\leqslant 0\}$ 满足 $M\cap P\neq\varnothing$，$M\cap P=\{x \mid x-3<4\leqslant 2x\}$，记 $T=\{x \mid x=p+q\}$，求集合 T.

14. 已知 a、b 是关于 x 的方程 $x^2-mx+n=0$ 的两实根，c、d 是关于 x 的方程 $x^2-nx+t=0$ 的两实根，记 $P=\{a,b,c,d\}$，$S=\{\alpha \mid \alpha=u+v, u\in P, v\in P, u\neq v\}=\{5,7,8,9,10,12\}$，$T=\{\beta \mid \beta=uv, u\in P, v\in P, u\neq v\}=\{6,10,14,15,21,35\}$，求集合 P.

15. 已知集合 $P=\{x \mid x=m^2-n^2, m\in \mathbf{Z}, n\in \mathbf{Z}\}$，$A=\{x \mid x=2k-1, k\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{x \mid x=4k-2, k\in \mathbf{Z}\}$，求证：(1) $A\subsetneqq P$； (2) $B\cap P=\varnothing$； (3) 若 $\alpha\in P$，$\beta\in P$，则 $\alpha\beta\in P$.

§1.2 集合的划分与覆盖

[内容提要]

1. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是集合 A 的非空子集，满足条件：

①$A_i\cap A_j=\varnothing\ (i\neq j)$，

②$A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是集合 A 的一个划分.

而如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 只满足条件②，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是集合 A 的一个覆盖.

2. 划分和覆盖都是反映全集和子集的关系，划分是覆盖的一个特殊情况.

3. 如果 A 是有限集，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是集合 A 的一个划分，则有如下的加法原理：

$$\operatorname{card}(A)=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{card}(A_i).$$

而如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是集合 A 的一个覆盖，则有容斥原理：

$$\operatorname{card}(A)=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{card}(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\operatorname{card}(A_i\cap A_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}\operatorname{card}(A_i\cap A_j\cap A_k)-\cdots+(-1)^{n-1}\operatorname{card}(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n).$$

4. 映射

映射在计数方面的应用：假定 A，B 都是有限集合，

而 $f: A\longrightarrow B$ 是一个映射，则有如下结论：

(1) 如果 $f: A\longrightarrow B$ 是单射，则 $\operatorname{card}(A)\leqslant\operatorname{card}(B)$；

(2) 如果 $f: A\longrightarrow B$ 是满射，则 $\operatorname{card}(A)\geqslant\operatorname{card}(B)$；

(3) 如果 $f: A \longrightarrow B$ 是双射(一一映射)，则 $\mathrm{card}(A)=\mathrm{card}(B)$.

5. 子集族

(1) 以集合 A 的子集为元素的集合，称为集合 A 的子集族.

(2) C 族，设 $\mathrm{card}(A)=n$，由集合 A 的所有子集构成的子集族称为 C 族，记做 $\sigma=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$.

(3) R 族，设 $\mathrm{card}(A)=n$，$\sigma=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 是 A 的一个子集族，若存在 $k(2\leqslant k\leqslant m-1)$，使得：①$\sigma$ 中任意 k 个 A_i 都相交；②σ 中任意 $k+1$ 个 A_i 都不相交，则称 σ 为 A 的一个指数为 k 的 R 族.

定理 1　如果 $\sigma=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 是 A 的一个指数为 k 的 R 族，$\mathrm{card}(A)=n$，则 $C_m^k\leqslant n$.

(4) K 族

设 A 为一个 n 阶集合，$\sigma=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$ 是 A 的一个子集族.

若 σ 中任何两个 A 的子集 A_i 与 A_j 互不包含，即 $A_i\nsubseteq A_j$ 且 $A_j\nsubseteq A_i$，则称 σ 是 A 的一个 K 族.

由定义容易知 R 族也是 K 族.

定理 2　设 σ 为 n 阶集合 A 的 K 族中阶数最高者，则 $\mathrm{card}(\sigma)=C_n^{[\frac{n}{2}]}$.

[方法导引]

确定元素、集合间的关系和性质，集合的运算和性质的应用，映射与配对方法的应用，是高中联赛一试中常考的内容. 集合的分划、子集族，利用映射方法来证明组合问题则是联赛二试、冬令营、集训队或 IMO 中考试的热点内容.

[典例精析]

例 1.11　(2002 年高中联赛试题) 已知两个实数集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{100}\}$ 与 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_{50}\}$. 若从 A 到 B 的映射 f 使得 B 中每个元素都有原象，且

$f(a_1)\leqslant f(a_2)\leqslant\cdots\leqslant f(a_{100})$

则这样的映射共有多少个?

解　不妨设 $b_1<b_2<\cdots<b_{50}$，将 A 中元素 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$ 按顺序分为非空的 50 组. 定义映射 f：$A\to B$，使第 i 组的元素在 f 之下的象都是 $b_i(i=1,2,\cdots,50)$. 易知这样的 f 满足题设要求，而所有这样的分组与满足条件的映射一一对应，于是满足题设要求的映射 f 的个数与 A 按下标顺序分为 50 组的分法数相等，而 A 的分法数为 C_{99}^{49}，故这样的映射共有 C_{99}^{49} 个.

例 1.12　(1991 年河南省集训题) 设集合 $A\subseteq\{1,2,3,\cdots,100\}$，且对任意的 $x,y\in A$，必有 $2x\neq y$. 求子集 A 中所含元素个数的最大值.

解　令 $M_1=\{51,52,\cdots,100\}$，$M_2=\{26,27,\cdots,50\}$，$M_3=\{13,14,\cdots,25\}$，$M_4=\{7,8,9,10,11,12\}$，$M_5=\{4,5,6\}$，$M_6=\{2,3\}$，$M_7=\{1\}$. 则 $M_1\cup M_3\cup M_5\cup M_7$ 含有 $50+13+3+1=67$ 个元素，其中每一个数都不是另一个数的 2 倍.

现设 $A\subseteq\{1,2,\cdots,100\}$，其中每一个数都不是另一个的 2 倍，则当 $a\in(A\cap M_2)$ 时，$2a\notin A$(但 $2a\in M_1$)，故 $\mathrm{card}(A\cap(M_1\cup M_2))=\mathrm{card}(A\cap M_1)+\mathrm{card}(A\cap M_2)\leqslant 50$，

同理，$\mathrm{card}(A\cap(M_3\cup M_4))=\mathrm{card}(A\cap M_3)+\mathrm{card}(A\cap M_4)\leqslant 13$，

$\mathrm{card}(A\cap(M_5\cup M_6))=\mathrm{card}(A\cap M_5)+\mathrm{card}(A\cap M_6)\leqslant 3$.

因此，$\mathrm{card}(A)\leqslant 50+13+3+1=67$，故子集 A 中元素个数的最大值为 67.

例 1.13　设 A 是 $\{1,2,\cdots,2000\}$ 的子集，$\mathrm{card}(A)\geqslant 1000$. 证明：要么 A 中有一个数为 2 的幂，要么 A 中存在两个数 a,b，使得 $a+b$ 为 2 的幂.

分析　这是一个存在性问题的证明，可尝试用抽屉原理，并从结论出发来构造抽屉.

证明　注意到 $2048=48+2000=49+1999=\cdots=1023+1025$

$64=17+47=18+46=\cdots=31+33$

$16=1+15=2+14=\cdots=7+9$

于是集合 $\{48,2000\},\{49,1999\},\cdots,\{1023,1025\};\{17,47\},\{18,46\},\cdots,\{31,33\};\{1,15\},\{2,14\},\cdots,\{7,9\}$ 中，每个集合中的两个数之和都是 2 的幂，这样的二元集共有 $976+15+7=998$ 个. 又在 $1,2,\cdots,2000$ 中，剩余的 5 个数分别为 8,16,32,64,1024，它们全为 2 的幂.

因为 $A\subseteq\{1,2,\cdots,2000\}$，$\mathrm{card}(A)\geqslant 1000$，利用上面的抽屉，由抽屉原理可知，原命题成立.

例 1.14　设集合 A、B、X 满足：$A\cap X=B\cap X=A\cap B$，$A\cup B\cup X=A\cup B$，若 A、B 为已知集合，试求集合 X.

分析　由题设可知 $X\subseteq A\cup B$，$X\supseteq A\cap B$. 猜想 $X=A\cap B$，关键在于证明 $X\subseteq A\cap B$.

解一　因为 $A\cap X=B\cap X=A\cap B$，所以 $X\supseteq A\cap B$. 又因 $A\cup B\cup X=A\cup B$，所以 $X\subseteq A\cup B$. 下证 $X\subseteq A\cap B$. 事实上，$\forall a\in X$，有 $a\in A\cup B$，即 $a\in A$ 或 $a\in B$，从而 $a\in A\cap X$ 或 $a\in B\cap X$. 由已知 $A\cap X=B\cap X=A\cap B$，故 $a\in A\cap B$，所以 $X\subseteq A\cap B$. 因此 $X=A\cap B$.

解二　由题设得

$X\supseteq A\cap B$，$X\subseteq A\cup B$

注意到 $A\cap X=B\cap X=A\cap B$，所以

$$X=X\cap(A\cup B)=(X\cap A)\cup(X\cap B)$$
$$=(A\cap B)\cup(A\cap B)=A\cap B.$$

评注　前一种解法从元素与集合的关系入手，由小见大，思路流畅；后一种解法则始终把握着 X 这个整体和条件的整体处理，不拘细节，揭示本质.

例 1.15　已知集合 $P=\{1,2,3,4,5,6\}$，当 $A\subseteq P$ 时，记 $S(A)$ 是集合 A 中所有元素之和，求所有 $S(A)$ 的总和 S.

解　由 $A\subseteq P$ 知 A 是 P 的子集，共有 $2^6=64$ 个. 显然 $S(\varnothing)=0$，$S(P)=1+2+3+4+5+6=21$.

记 $A_{1,j}$ 表示单元素集，共有 6 个($j=1,2,3,4,5,6$)，于是所有单元素集的元素和 $S_1=1+2+3+4+5+6$(元素 1,2,3,4,5,6 各有 1 个)；

记 $A_{2,j}$ 表示含 2 个元素的集合，共有 15 个，且元素 1,2,3,4,5,6 各在 5 个集合中出现，于是所有含 2 个元素的集合的元素和 $S_2=5(1+2+3+4+5+6)$；

同理，所有含 3 个元素的集合(共有 20 个)的元素和 $S_3=10(1+2+3+4+5+6)$(元素 1,2,3,4,5,6 各在 10 个集合中出现)；

所有含 4 个元素的集合(共有 15 个)的元素和 $S_4=10(1+2+3+4+5+6)$(元素 1,2,3,4,5,6 各在 10 个集合中出现)；

所有含 5 个元素的集合(共有 6 个)的元素和 $S_5=5(1+2+3+4+5+6)$(元素 1,2,3,4,5,6 各在 5 个集合中出现).

由上可得，$S = S(\varnothing) + S(P) + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 0 + (1+2+3+4+5+6)(1+5+10) \cdot 2 = 672$.

说明　一般地，如集合 $P = \{1,2,3,\cdots,n\}$（即 P 含有 n 个元素，$n \in \mathbf{N}^*$），则集合 P 的所有子集的所有元素之和 $S = (1+2+3+\cdots+n)(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \cdots + C_{n-1}^{n-1}) = \dfrac{n(n+1)}{2} \cdot 2^{n-1} = n(n+1) \cdot 2^{n-2}$，这里的记号 C_n^m 表示"从 n 个不同元素中任取 m 个元素的组合数"，它满足 $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$.

例 1.16　对于集合 $S = \{(a_1,a_2,\cdots,a_5) \mid a_i = 0$ 或 $1, i = 1,2,\cdots,5\}$ 中的任意两个元素 $A = (a_1, a_2,\cdots,a_5)$ 和 $B = (b_1,b_2,\cdots,b_5)$ 定义它们的距离为：$d(A,B) = |a_1 - b_1| + \cdots + |a_5 - b_5|$，取 S 的一个子集 T，使 T 中任意两个元素之间的距离都大于 2. 问子集 T 中最多含多少个元素？证明你的结论.

解　T 中最多有 4 个元素.

假设有一个 5 个元素以上的子集也符合条件，则这 5 个元素中至少有 3 个的第一位数码相同. 不妨设 A、B、C 这三个元素的第一位数码相同.

同样，在 A、B、C 中，第二、三、四、五个数码上，每一位都至少有两个元素的对应数码相同. 但 A、B、C 三元素两两分组只有 3 组，故至少有两个元素，它们除第一位数码相同外，至少还有两位数码相同，不妨设 A 与 B，则 A,B 的距离不大于 2. 矛盾.

故 T 的元素不多于 4 个.

可令 $T = \{(1,1,1,1,1),(0,0,0,1,1),(1,1,0,0,0),(0,0,1,0,0)\}$，则不难验证结论成立，所以 $|T|_{\max} = 4$.

例 1.17　设 n 是大于 3 的自然数，且具有下列性质：把集合 $S_n = \{1,2,\cdots,n\}$ 任意分为两组，总有某个组，它含有三个数 a、b、c（允许 $a = b$），使得 $ab = c$. 求这样的 n 的最小值.

解　若 $n \geqslant 3^5$，则 $3, 3^2, 3^4, 3^5 \in S_n$.

设集合 S_n 分为两组 A 和 B，$3 \in A$，且 A 和 B 不满足题中条件.

如果 $3^2 \in A$，那么 $3, 3, 3^2 \in A$，这不可能，从而推得 $3^2 \in B$.

如果 $3^4 \in B$，那么 $3^2, 3^2, 3^4 \in B$，这不可能，从而推得 $3^4 \in A$.

如果 $3^3 \in A$，那么 $3, 3^3, 3^4 = 3 \cdot 3^3 \in A$，这不可能，从而推得 $3^3 \in B$.

于是，$3, 3^4 \in A$，$3^5 \in B$，这时 B 中三个元素 $3^2, 3^3, 3^5$ 满足 $ab = c$. 矛盾.

这表明 $n \geqslant 3^5$ 时，把集合 S_n 任意分为两组，总有某个组，具有题中性质，即所求最小值不超过 $3^5 = 243$.

另一方面，取 $n = 242$，且设 $A = \{k \mid 9 \leqslant k \leqslant 80\}$，$B = \{k \mid 3 \leqslant k \leqslant 8$，或 $81 \leqslant k \leqslant 242\}$，则 $S_{242} = A \cup B$，而且 A 和 B 都不具有题中性质.

当 $n < 242$ 时，将 S_n 分为两组 $A \cap S_n$ 和 $B \cap S_n$，则 $A \cap S_n$ 和 $B \cap S_n$ 也都不具有题中性质.

故满足题中要求的 n 的最小值为 243.

例 1.18　已知集合 P 是集合 $M = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 2000, x \in \mathbf{N}\}$ 的任一至少含两个元素的子集，令 a_p 是集合 P 中最大数与最小数之和，求所有满足条件的 a_p 的算术平均值.

解　设 P 是 M 的一个至少含两个元素的子集，则 $P' = \{y \mid y = 2001 - x, x \in P\}$ 也是 M 的一个至少含两个元素的子集，于是除集合 M 外（M 也是 M 的满足条件的一个子集），集合 M 的满足条件的子集可分为两类：一类是 $P' = P$（例如：$P = \{1000,1001\}$，则 $P' = \{1001,1000\}$，$P = \{2,4,1997,1999\}$，则 $P' = \{1999,1997,4,2\}$，$\cdots$）；另一类是 $P' \neq P$（例如：$P = \{1,6\}$，则 $P' = \{2000,1995\}$；$P = \{5,8,1995,$