（第二版）

JUZHENSHUZHIFENXI

矩阵数值分析

邢志栋　曹建荣　编著

陕西科学技术出版社

矩阵数值分析

（第二版）

邢志栋　曹建荣　编著

陕西科学技术出版社

内 容 提 要

本书较系统地论述了矩阵数值分析的基本理论和方法。主要内容包括:矩阵和向量的范数,线性代数方程组的直接解法和迭代解法,特征值问题的基本性态,求解特征值问题的直接方法和迭代方法,非线性方程求根的一些基本概念和基本方法等。各章内容相对独立,可适应不同读者的需要。可作为信息与计算科学、应用数学等专业的教材或教学参考书,也可供科学计算工作者、工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

矩阵数值分析/邢志栋 曹建荣 编著. -2 版. -西安:陕西科学技术出版社,2005.9

ISBN 7-5369-2970-6

Ⅰ.矩… Ⅱ.①邢… ②曹… Ⅲ.矩阵-计算方法 Ⅳ.0241.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 083425 号

出 版 者	陕西科学技术出版社
	西安北大街 131 号 邮编 710003
	电话 (029) 87211894 传真 (029) 87218236
	http://www.snstp.com
发 行 者	陕西科学技术出版社
	电话 (029) 87212206 87260001
印 刷	西安信达雅印务有限责任公司
规 格	880mm×1230mm 1/32 开本
字 数	184 千字
印 张	7.375
印 数	1001~4000 册
版 次	2005 年 8 月第 2 版
	2005 年 8 月第 1 次印刷
定 价	15.00 元

再版前言

为了适应21世纪本科专业人才培养的需要，西北大学设立了面向21世纪课程及教材改革项目。《矩阵数值分析》作为一部数学系本科基础理论教材，有幸列入其中。这部书是作者在多年开设数值代数课程所用讲义的基础上，经过不断的补充、整理编写而成，1998年出版后，承蒙西北大学、西安电子科技大学、西安理工大学同行的支持与厚爱，被用作信息与计算科学专业的试用教材。在几年的使用过程中，师生们对这部教材给予充分肯定，同时也指出了其中存在的个别问题。为了适应高校教改的需要，使这部教材更臻完善，作者借此次再版的机会，对其进行了认真的修订。

与第一版相比，此次再版修订时注意了以下几点：

1. 在保持原有重视基础理论的同时，更加注重对所讲方法实用性的体现。作者所在的西北大学数学系历来比较重视基础理论，秉承这一传统，在介绍方法的同时，尽可能阐明方法的设计思想和理论依据；并对有关的结论，尽量给出严格而简明的数学证明。

2. 在全书的叙述表达上更加注重通俗性，清晰易懂，便于教学及学生自学。

3. 增补了所论方法的例题和练习，为学生提供了尽可能多的实践素材，以便于学生的复习，巩固和拓展课堂

所学的知识。

4. 对全书进行了全面认真细致的校订，改正了初版中存在的错误和欠妥当之处。

《矩阵数值分析》的编写、出版和修订得到了西北大学教务处和西北大学数学系的大力支持，被列入西北大学面向21世纪的教材改革项目并得到资助；西安电子科技大学刘三阳教授、王金金教授、西安理工大学秦新强教授、苗宝山老师等同行对本书的修改提出了宝贵的意见和建议。陕西科学技术出版社赵生久先生为本书的再版付出了辛勤的劳动，在此一并表示感谢。限于作者水平，书中难免存在错误和不足，敬请批评指正。

作　者

2005.7

序　　言

西北大学历史悠久，在国内外享有声誉，数学系的信息与计算科学专业近二十年有很大的发展，在数值逼近，微分方程数值求解，矩阵计算理论，图形、图象处理与小波分析等领域都做了许多工作。我在西北大学数学系曾工作过二十多年，对西北大学总有一种特殊感情，与本书的作者曾共事多年。当他们拿书稿清样请我作序时，我有些为难，依我的水平和名气，自知是不能跻身于作序者之列。但在作者的真诚而恭谨面前，难以拒绝。好在作序，算不了什么严重问题，点头允诺。

矩阵计算的理论和方法已成为科学与工程计算的核心之一。计算机的广泛应用，计算方法和计算技术的快速发展为矩阵理论的应用提供了广阔的前景。科学计算能力是跨世纪人才不可或缺的，这种能力并非是计算机本身的产物，而是数学与计算机有机结合的结果。以现代化的计算机及数学软件为工具，以数学模型为基础进行模拟研究构成了科学计算能力的核心内容。

在矩阵计算领域内，本书为读者提供了一本既能反映基础理论、基本方法和最新进展，又具有实用性和启发性的书籍，使读者通过学习，对基本理论和方法有一较全面、系统的了解，为进一步学习与研究打下一个较好的基

础。

本书各部分的内容相对独立。主要包括线性方程组的求解,矩阵特征值问题的分析及求解和非线性方程的求解。以培养学生的科学计算能力为目标,在选材上力求精练、系统、严密。内容充实具有新意,收入了矩阵计算的一些新的算法,内容编排由浅入深,循序渐进。文字简洁,通俗易懂。每章后面都附有评注,评注中的内容实际上是作者自己的一些体会和看法,在同类书中见之不多,这样做的好处在于开阔读者的视野,也为在某一方面有兴趣而需要研究的同志提供一些线索。

阅读本书需要具备数学分析,高等代数或线性代数方面的知识。

基于上述原因,我愿将本书推荐给从事科学计算工作的教师、科研人员和工程技术人员,推荐给信息与计算科学专业和应用数学专业的本科生、研究生阅读和参考。

叶正麟

1998.7

目　录

第 1 章

向量范数和矩阵范数

在数值分析中，往往涉及的量是向量和矩阵. 在许多情形下，向量空间 X 同时也是一个度量空间. 为保证 X 上的代数和几何性质之间的有机结合，我们需要给出衡量它们“大小”的一种度量方法，这种度量方法就是我们引入的范数概念.

1.1　向量和矩阵序列的极限

设 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 是 R^n 中的向量序列，其中

$$\boldsymbol{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})^{\mathrm{T}} \tag{1.1.1}$$

若对 $i = 1, 2, \cdots, n$，存在实数 x_i，使得

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i, \tag{1.1.2}$$

则称向量序列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 收敛于向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$. 并记为

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{x}. \tag{1.1.3}$$

类似的，设 $\{A^{(k)}\}$ 是一个 $m \times n$ 阶的矩阵序列，若对任意的 i、j，$1 \leqslant i \leqslant m$，$1 \leqslant j \leqslant n$ 有

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij},$$

则称以 a_{ij} 为元素的矩阵 A 是矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$ 的极限. 记为

$$\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = A.$$

按照上述极限的定义，如果向量级数的部分和收敛，即极限 $\lim\limits_{k\to\infty}(\boldsymbol{x}^{(1)} + \boldsymbol{x}^{(2)} + \cdots + \boldsymbol{x}^{(k)})$ 存在，我们就说向量级数收敛，把这个极限称为该级数的和. 若要向量级数收敛，当且仅当每个分量组成的级数收敛.

类似的,若矩阵级数

$$A^{(1)} + A^{(2)} + \cdots + A^{(k)} + \cdots \tag{1.1.4}$$

的部分和 $B^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} A^{(i)}$ 收敛,则称矩阵级数是收敛的,并将 $\{B^{(k)}\}$ 的极限 A 称为矩阵级数的和,记为

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} = A. \tag{1.1.5}$$

1.2 向量范数

一个向量范数是一个定义在 n 维向量空间上的实值函数,记为 $\|\cdot\|$,它对任意向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 与任意数 α,满足下述三个条件:

(1)非负性:$\|\boldsymbol{x}\| \geqslant 0$,且 $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x} = 0$;

(2)齐次性:$\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\,\|\boldsymbol{x}\|$;

(3)三角不等式:$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

最著名的向量范数是 L_p 范数(也称 Hölder 范数)

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leqslant p < \infty. \tag{1.2.1}$$

其中最常用的是 $p=1$,$p=2$ 与 $p=\infty$ 时的范数,即

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|; \tag{1.2.2}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}; \tag{1.2.3}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|. \tag{1.2.4}$$

常称它们为 L_1,L_2,L_∞ 范数. $\|\cdot\|_2$ 范数也称为 Euclid 范数,另一种常见的向量范数称为加权范数或椭圆范数,它依据对称正定矩阵 A 来定义,即

$$\|\boldsymbol{x}\|_A = (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}G\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}} = (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}} = \|G\boldsymbol{x}\|_2, \tag{1.2.5}$$

其中 G 为非奇异矩阵且 $G^{\mathrm{T}}G = A$.

向量范数是其分量的连续函数,它的一个重要特性是任意向量范数的等价性,即对 n 维向量空间上的任意两个不同的向量范数 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|'$,存在常数 $c_2 \geqslant c_1 > 0$,使得对任意 $\boldsymbol{x}$,有

$$c_1 \|\boldsymbol{x}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|' \leqslant c_2 \|\boldsymbol{x}\|. \tag{1.2.6}$$

例如对 L_1, L_2, L_∞ 范数,不难验证有

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant n \|\boldsymbol{x}\|_\infty; \tag{1.2.7}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_2 \leqslant \sqrt{n} \|\boldsymbol{x}\|_\infty; \tag{1.2.8}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_2 \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_1. \tag{1.2.9}$$

1.3　矩阵范数

与向量范数相对应,矩阵范数是定义在全体 $m \times n$ 阶或 n 阶矩阵集合上的实值函数,对于任意 n 阶矩阵 A 和 B 与任意数 α,它满足下列四个条件:

(1)非负性:$\|A\| \geqslant 0$, $\|A\| = 0$ 当且仅当 $A = 0$;

(2)齐次性:$\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$;

(3)三角不等式:$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$;

(4)相容性:$\|AB\| \leqslant \|A\| \|B\|$.

同向量范数一样,矩阵范数也有多种. 对于任意 n 阶矩阵 A 和 n 维向量 $\boldsymbol{x}$,取定的向量范数 $\|\boldsymbol{x}\|$ 和矩阵范数 $\|A\|$ 如果满足

$$\|A\boldsymbol{x}\| \leqslant \|A\| \|\boldsymbol{x}\|, \tag{1.3.1}$$

则称范数 $\|A\|$ 是与向量范数 $\|\boldsymbol{x}\|$ 相容的矩阵范数.

对于矩阵范数,一般通过已知的向量范数来定义相容的矩阵范数. 设 $\|\boldsymbol{x}\|$ 为一种向量范数,对任意 n 阶矩阵 A,把向量 $A\boldsymbol{x}$ 的范数在单位球面 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ 上的最大值定义为矩阵 A 的范数,即

$$\|A\| = \max_{\|x\| = 1} \|A\boldsymbol{x}\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}, \tag{1.3.2}$$

并称这种范数是由向量范数导出的矩阵范数. 例如,由向量范数

$\|x\|_1,\|x\|_2,\|x\|_\infty$导出的矩阵范数分别为

$$\|A\|_1=\max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|;\qquad(1.3.3)$$

$$\|A\|_2=\sqrt{\Lambda_1};\qquad(1.3.4)$$

$$\|A\|_\infty=\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|.\qquad(1.3.5)$$

其中 Λ_1 为矩阵 A^TA 的最大特征值.

另一种常用且与 L_2 向量范数相容的矩阵范数是 Frobenius 矩阵范数

$$\|A\|_F=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.\qquad(1.3.6)$$

$\|A\|_F$ 可以看成是 n^2 维向量的欧氏范数,在矩阵计算中经常用到. 顺便指出,F 范数有两个其它矩阵范数不具备的良好性质:

(1)矩阵 A 乘以正交阵 Q 后,其 $\|\cdot\|_F$ 范数不变. 即

$$\|AQ\|_F=\|QA\|_F=\|A\|_F.\qquad(1.3.7)$$

(2)与 A 正交相似的矩阵 B,其 F 范数相同. 即

$$\|A\|_F=\|B\|_F.\qquad(1.3.8)$$

类似于向量范数,不同的矩阵范数之间同样具有等价关系,即任意一个 n 阶矩阵的任意两个由向量范数导出的矩阵范数 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|'$,存在 $0<d_1\leq d_2$,使得

$$d_1\|A\|\leq\|A\|'\leq d_2\|A\|.\qquad(1.3.9)$$

其中 $d_1=c_1/c_2,d_2=c_2/c_1;c_1,c_2$ 由(1.2.6)式给出.

例 1.1 设向量 $x=(1,2-3)^T$,则

$$\|x\|_1=6,\|x\|_2=\sqrt{14},\|x\|_\infty=3.$$

例 1.2 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$,则

$$\|A\|_1=7,\quad\|A\|_F=\sqrt{30},\quad\|A\|_\infty=6.$$

又 $A^TA=\begin{pmatrix}5&11\\11&25\end{pmatrix}$, 故 $\|A\|_2=\sqrt{15+\sqrt{221}}$.

1.4　谱半径与收敛性定理

与矩阵 A 有关的另一个重要的量是它的谱半径. 把矩阵 A 的特征值模的最大者定义为矩阵 A 的谱半径. 用 $\rho(A)$ 表示之,即

$$\rho(A) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i|, \tag{1.4.1}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值.

谱半径不满足矩阵范数的条件,所以它不是范数. 对任何一种相容的矩阵范数 $\|A\|$,均有

$$\rho(A) \leqslant \|A\|. \tag{1.4.2}$$

事实上,由 $Ax=\lambda x$ 得到

$$\|Ax\| = |\lambda| \|x\|,$$

又因为

$$\|Ax\| \leqslant \|A\| \|x\|,$$

故

$$\rho(A) \leqslant \|A\|.$$

有了矩阵范数,我们就可以讨论矩阵序列的收敛性定理.

定理 1　设 A 是 n 阶方阵,则 $A^m\to 0(m\to\infty)$ 的必要充分条件是 $\rho(A)<1$.

证明　设 A 的 Jordan 标准型为 J,即就是

$$J = \mathrm{diag}(J_{r_1}(\lambda_1),J_{r_2}(\lambda_2),\cdots,J_{r_p}(\lambda_p)),$$

其中 $J_{r_i}(\lambda_i)$ 是 Jordan 块. 设 T 是相似变换矩阵,则有

$$A = TJT^{-1}, \tag{1.4.3}$$

$$A^m = TJ^mT^{-1}, \tag{1.4.4}$$

于是 $A^m\to 0$ 的必充条件是 $J^m\to 0$,而

$$J^m = \mathrm{diag}(J_{r_1}^m(\lambda_1),J_{r_2}^m(\lambda_2),\cdots,J_{r_p}^m(\lambda_p)), \tag{1.4.5}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$ 是 A 的特征值,且 A 再没有其它不同于它们的特征值.

显然，$J^m \to 0$ 的必充条件是 $J_{r_i}^m(\lambda_i) \to 0$，而

$$J_{r_i}^m = \begin{bmatrix} f_m(\lambda_i) & f'_m(\lambda_i) & \cdots & \dfrac{f_m^{(r_i-1)}(\lambda_i)}{(r_i-1)!} \\ & f_m(\lambda_i) & \cdots & \dfrac{f_m^{(r_i-2)}(\lambda_i)}{(r_i-2)!} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & f_m(\lambda_i) \end{bmatrix}, \qquad (1.4.6)$$

其中 $f_m(\lambda) = \lambda^m, m > r_i$. 因此当 $\rho(A) < 1$ 时有

$$f_m^{(l)}(\lambda_i) \to 0, \qquad l = 0,1,2,\cdots,r_i - 1,$$

$$J_{r_i}^m(\lambda_i) \to 0, \qquad m \to \infty. \qquad (1.4.7)$$

反之，若有特征值如 $|\lambda_1| \geq 1$，则 $f_m^{(l)}(\lambda_1)$ $(l = 0,1,2,\cdots,r_1 - 1)$ 不收敛于 0，所以 $J_{r_l}^m(\lambda_1)$ 不收敛于 0，从而 J^m 也不收敛于 0. 因此 $J^m \to 0 (m \to \infty)$ 的必充条件是 $\rho(A) < 1$.

推论 1 当 $m \to \infty$ 时，$A^m \to 0$ 的充分条件是只要 A 的一种范数 $\|A\| < 1$.

因为

$$\|A^m\| \leq \|A^{m-1}\| \|A\| \leq \cdots \leq \|A\|^m,$$

若 $\|A\| < 1$，则当 $m \to \infty$ 时，$\|A\|^m \to 0$，所以 $\|A^m\| \to 0$.

定理 2 级数

$$I + A + A^2 + \cdots + A^m + \cdots \qquad (1.4.8)$$

收敛的充分必要条件是 $A^m \to 0 (m \to \infty)$，并且上述级数收敛时，其和为 $(I - A)^{-1}$.

证明 必要性：若记 $A^k = (a_{ij}^{(k)})$，于是级数 (1.4.8) 收敛取决于

$$\delta_{ij} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}, \qquad i,j = 1,\cdots,n$$

都收敛，而 $\delta_{ij} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}$ 收敛的必要条件是 $\lim\limits_{m\to\infty} a_{ij}^{(m)} = 0$，即 (1.4.

8)收敛的必要条件是 $A^m = (a_{ij}^{(m)}) \to 0 (m \to \infty)$.

充分性:由于 $\lim\limits_{m\to\infty} A^m = 0$,由定理 1,$A$ 的谱半径 $\rho(A) < 1$,因此 $\lambda(A) \neq 1$,,故 $I - A$ 的特征值不为 0,从而 $(I-A)^{-1}$ 存在. 另一方面,由恒等式

$$(I + A + A^2 + \cdots + A^k)(I - A) = I - A^{k+1} \tag{1.4.9}$$

得

$$I + A + A^2 + \cdots + A^k = (I - A)^{-1} - A^{k+1}(I - A)^{-1},$$

令 $k \to \infty$,因为 $A^{k+1}(I-A)^{-1} \to 0$,故

$$I + A + A^2 + \cdots + A^k \to (I - A)^{-1}.$$

定理 3　如果矩阵 A 的一种范数 $\|A\| < 1$,则对任何非负整数 k,下面关系式成立:

$$\|(I - A)^{-1} - (I + A + A^2 + \cdots + A^k)\| \leqslant \frac{\|A\|^{k+1}}{1 - \|A\|}. \tag{1.4.10}$$

证明　因为 $\|A\| < 1$,故 $(I-A)^{-1}$ 存在且 $A^m \to 0$. 对于任意整数 $k, l \geqslant 0$,有

$$I - \left(\sum_{i=0}^{k} A^i + \sum_{i=1}^{l} A^{k+i}\right)(I - A) = A^{k+l+1}, \tag{1.4.11}$$

等式两边同时右乘 $(I-A)^{-1}$ 得

$$(I - A)^{-1} - \sum_{i=0}^{k} A^i = A^{k+l+1}(I - A)^{-1} + \sum_{i=1}^{l} A^{k+i},$$

令　$B_l = \sum\limits_{i=1}^{l} A^{k+i}$,因为当 $l \to \infty$ 时,

$$A^{k+l+1}(I - A)^{-1} \to 0, \tag{1.4.12}$$

所以

$$\lim_{l\to\infty} B_l = (I - A)^{-1} - (I + A + \cdots + A^k), \tag{1.4.13}$$

由范数的连续性可知

$$\|(I - A)^{-1} - \sum_{i=0}^{k} A^i\| = \lim_{l\to\infty} \|B_l\|,$$

注意到

$$\begin{aligned}\|B_l\| &\leqslant \|A^{k+1}\| + \|A^{k+2}\| + \cdots + \|A^{k+l}\| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{l} \|A\|^{k+i} \\ &= \frac{\|A\|^{k+1}(1-\|A\|^{l})}{1-\|A\|},\end{aligned}$$

所以,对于一切正整数 l

$$\|B_l\| \leqslant \frac{\|A\|^{k+1}}{1-\|A\|}, \tag{1.4.14}$$

因此

$$\left\|(I-A)^{-1} - \sum_{i=0}^{k} A^i\right\| \leqslant \frac{\|A\|^{k+1}}{1-\|A\|}.$$

定理 3 表明当 $\|A\|<1$ 时,$I-A$ 就是可逆矩阵,其逆阵的范数是可控制的. 在许多问题中经常会遇到要判定一个线性算子 A 是否可逆的问题. 下述定理是更一般结果的一个特殊情形.

定理 4 设 A,C 是 n 阶矩阵,又设 A 可逆,并且 $\|A^{-1}\|\leqslant\alpha$,如果 $\|A-C\|\leqslant\beta,\alpha\beta<1$,那么,$C$ 也是可逆的,且

$$\|C^{-1}\| \leqslant \alpha/(1-\alpha\beta). \tag{1.4.15}$$

习题与注解

习题

1. 在 $\mathbf{R}^2$ 中将向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$ 表示成平面直角坐标系中的点(x_1,x_2),试分别画出下列不等式决定的 $\boldsymbol{x}$ 的全体所对应的几何图形:$\|\boldsymbol{x}\|_1<1$, $\|\boldsymbol{x}\|_2<1$, $\|\boldsymbol{x}\|_\infty<1$. 并且验证非负实数

$$\|\boldsymbol{x}\| = (|x_1|^{\frac{2}{3}}+|x_2|^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

是否满足向量范数公理.

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$,求 A 从属于向量范数 $\|\boldsymbol{x}\|_1$, $\|\boldsymbol{x}\|_2$,