

新课程 新考纲



2007

GAOKAO BEIKAO ZHINAN

高考备考指南

数学(文科)

系统复习用书习题解答

广州市教育局教学研究室 编

华南理工大学出版社

2007 高考备考指南

数 学(文科)

系统复习用书习题解答

广州市教育局教学研究室 编

华南理工大学出版社

·广州·

《2007 高考备考指南》编委会

主 编 麦 曦 黄 宪

副主编 张经纬

编 委 谭健文(语文分册主编) 李月容(语文分册主编)
谭国华(数学分册主编) 陈镇民(数学分册主编)
黄丽燕(英语分册主编) 周文筑(英语分册主编)
云大堂(政治分册主编) 张云平(政治分册主编)
胡志桥(政治分册主编) 周鼎勋(历史分册主编)
何 琼(历史分册主编) 许少星(地理分册主编)
刘雄硕(物理分册主编) 符东生(物理分册主编)
马文龙(化学分册主编) 李南萍(化学分册主编)
麦纪青(生物分册主编) 钟 阳(生物分册主编)

图书在版编目(CIP)数据

数学(文科)系统复习用书习题解答/谭国华,陈镇民主编. —广州:华南理工大学出版社,2006.7

(2007 高考备考指南/麦曦,黄宪主编)

ISBN 7-5623-2415-8

I. 数… II. ①谭… ②陈… III. 数学课-高中-解题-升学参考资料
IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 061279 号

总 发 行:华南理工大学出版社(广州五山华南理工大学 17 号楼,邮编 510640)

发行部电话:020-87113487 87110964 87111048(传真)

E-mail:scutcl3@scut.edu.cn

http://www.scutpress.com.cn

出版策划:范家巧 潘宜玲

责任编辑:吴兆强

印 刷 者:广州市师范学校印刷厂

开 本:787×1092 1/16 印张:7.5 字数:243 千

版 次:2006 年 7 月第 1 版第 1 次印刷

定 价:9.90 元

版权所有 盗版必究

前言

新一轮高考改革的重点是考试内容的改革,这是我们在复习备考中应该首先关注的。因此,学生复习资料的编写和使用,就成为备考复习的重要环节之一。

本书的前身是《高考备考丛书》,初版于1994年,是根据当时广州市有关领导的指示,为提高广州地区学生系统复习备考的效率,由广州市教育局教研室组织广州市一百多名特级教师和骨干高级教师编写的。1997年更名为《高考备考指南》,由华南理工大学出版社出版。出版以来,为适应新的情况,吸收新的经验,每年更新内容,修订改版。多年打造,广受欢迎,成为广州市连续十多年使用的高考备考主流资料。

“应试”和“素质”并不是完全对立的矛盾。目前高三教学还存在诸多弊端,正需要通过教学研究和教学改革去克服和解决。广州市从上个世纪80年代开始组建了全市性的高考备考研究队伍,依循现代教学理念,着眼于学生,着眼于效率,探索和研究高考备考的教学规律。通过探索和努力,积累和形成了丰富的具有广州特色的高考备考经验体系,凭着这些凝聚了广州市20多年来一批又一批优秀高三教师心血结晶的经验,广州的高考已经连续多年在全省显现出高位稳定。《高考备考指南》,就是广州多年高考备考研究的成果之一,它全面体现了广州备考理念和备考经验。

《高考备考指南》是为广东学生参加广东高考而编写的,所以,一方面,在内容上紧靠广东高考的考试大纲,力求让师生明确考试大纲规定考点的要求,明确考点对应的课本内容,明确考点对应的试题题目,成为当年考试大纲的“解读”。另一方面,在体例上充分考虑了我省学生的学习基础、学习习惯和心理特点,力求精练,强调实用。所以,重视基础,舍弃繁难,反对题海,针对性强,简明扼要,让学生以最少的时间获得最好的复习效果,是本书编写思路的鲜明特点。

由于高考改革的逐年深入,本丛书出版以来,每年都根据高考命题趋势,对内容范围和难度要求进行修改、补充和调整。为适应我省“3+X”高考改革,2000年的第四版,新增了生物和地理,2001年又增加了《文理综合》,科目增加到十科。2007年将是新课程实施后的首次高考,根据2007年新高考方案的变化,《高考备考指南》(第十版)由全市十多所名校一百多名教学骨干,根据新课程高考要求重新编写,全书的结构、内容、题例和练习都全新改版,以求尽力体现目前能广泛收集到的我省2007年高考考试信息。

《高考备考指南》(第十版)包括语文、数学(分文科数学和理科数学)、英语、文科基础/理科基础、政治、历史、地理、物理、化学、生物10个学科,每个学科分为《系统复习用书》和《专题训练用书》。《系统复习用书》包括学科各必修模块和列进考试范围的选修模块的基础知识的系统梳理和题型示例,既保留了新教材的改革亮点,又根据新考纲初稿的要求,加强了知识的系统性,每单元(或章节)附有供学生思考与训练的题目(数学另有配套的《习题解答》)。《专题训练用书》提供与系统复习配套使用的单元(或专题)训练和综合训练,可以按照需要随堂测试或课外使用。

《高考备考指南》丛书编写委员会由广州市教育局教研室组建。第十版由麦曦、黄宪任主编,张经纬任副主编。华南理工大学出版社大力协助并促成本丛书出版,在此谨表谢意。

编者

2006年6月于广州

说 明

《高考备考指南·数学(文科)》包括系统复习用书、专题训练用书和习题解答共三册书,三册书相互配套,构成了一个特别适合数学高考复习特点的内容体系。

其中,系统复习用书包含了高中数学课程标准中必修课程和选修系列1的全部内容。在充分考虑高中数学课程标准各种不同版本的实验教科书的基础上,根据2007年新课程标准高考数学考试大纲和历年来高考数学命题的特点,系统复习用书将高中数学课程标准中的必修内容和选修内容进行了有机的整合,使得知识之间的内在联系更加紧凑、连贯。为方便使用,系统复习用书按课时编写,而且将每课时的配套练习分为基础训练和综合提高两个部分。系统复习用书可供考生作为数学高考第一轮复习使用。

专题训练用书配合系统复习用书,为每章提供了一套测试卷,既可作为班级单元测试用,也可作为考生自行检测用。

习题解答一书给出了系统复习用书中全部习题的详尽解答,以方便考生解题时及时查对答案,比较解法的优劣。

《高考备考指南·数学(文科)》由广州市教育局教研室高中数学教研员谭国华、陈镇民担任主编。参加编写的人员分别是:许建中(第一章、第八章),杨仁宽(第二章),伍晓焰(第三章),罗华(第四章),陈镇民、谭国华(第五章),周伟锋(第六章),曾辛金(第七章),翁之英(第九章),肖凌慧(第十章),肖勇钢(第十一章),彭雨茂(第十二章),赵霞(第十三章),严运华(第十四章),谭曙光(第十五章)。所有参加编写的人员均为广州市重点中学的数学骨干教师,他们有着丰富的数学高考复习的实践经验,同时又都是高中数学课程标准实验的亲身参与者。

为了保证书稿的质量,《高考备考指南·数学(文科)》还邀请了一批无论在数学专业上、还是在课堂教学上都具有较高造诣的广州市高中数学青年教师参与审校工作。他们是:康元胜(第一章、第十五章),刘德远、郑勇(第二章),温效良、沈秋怡(第三章),宋洁云、何倩明(第四章),陈镇民、邓军民(第五章),刘殷、吴慧华(第六章),赖青松、董晓忠(第七章),罗晓斌(第八章、第十一章),李菊(第九章),闵长江(第十章),邹传庆、张蜀青、徐全德(第十二章、第十四章),庞新军(第十三章)。

感谢华南理工大学出版社的编辑和校对人员,正是由于他们的帮助,才使本书得以顺利出版。

尽管参与本书编写、编辑和校对的人员均抱着非常严肃认真的态度从事着本书的编写与出版工作,但由于水平有限,或偶有疏忽,本书必定还存在一些不足之处,恳请广大教师和学生提出批评、建议,以便再版时修订。

编 者

2006年6月

目 录

第一章 集合与常用逻辑用语	(1)
1.1 集合	(1)
1.2 充分条件与必要条件	(2)
1.3 常用逻辑用语	(3)
习题	(4)
第二章 函数概念与幂函数、指数函数、对数函数	(6)
2.1 函数及其表示	(6)
2.2 函数的基本性质	(7)
2.3 幂函数、指数函数、对数函数	(8)
2.4 函数的图象	(9)
2.5 抽象函数	(9)
2.6 函数与方程	(9)
2.7 函数综合性问题	(10)
2.8 函数应用性问题	(11)
习题二	(11)
第三章 平面向量	(13)
3.1 平面向量及其线性运算	(13)
3.2 平面向量的坐标运算	(14)
3.3 平面向量的数量积	(15)
3.4 平面向量的应用	(16)
习题三	(20)
第四章 三角函数、三角恒等变换与解三角形	(22)
4.1 任意角的三角函数	(22)
4.2 简单的三角恒等变换	(23)
4.3 三角函数的图象	(25)
4.4 三角函数的性质	(27)
4.5 解三角形	(29)
4.6 三角应用问题	(30)
习题四	(32)
第五章 数列	(35)
5.1 数列的概念	(35)
5.2 等差数列	(36)
5.3 等比数列	(37)
5.4 数列求和	(38)
5.5 数列综合问题	(39)
5.6 数列应用题	(42)
习题五	(43)



第六章 不等式	(46)
6.1 不等式的基本性质	(46)
6.2 一元二次不等式	(46)
6.3 二元一次不等式组与简单线性规划问题	(47)
6.4 基本不等式	(49)
习题六	(51)
第七章 立体几何初步	(54)
7.1 空间几何体的结构特征	(54)
7.2 简单空间图形的三视图和直观图	(55)
7.3 平面的性质、异面直线	(55)
7.4 平行问题	(56)
7.5 垂直问题	(57)
7.6 空间几何体的表面积与体积	(58)
7.7 立体几何综合问题	(60)
习题七	(63)
第八章 直线和圆的方程	(66)
8.1 直线的方程	(66)
8.2 两条直线的位置关系	(67)
8.3 圆的方程	(68)
8.4 直线与圆、圆与圆的位置关系	(70)
8.5 空间直角坐标系	(72)
习题八	(73)
第九章 圆锥曲线方程	(76)
9.1 椭圆	(76)
9.2 双曲线	(77)
9.3 抛物线	(77)
9.4 直线与圆锥曲线	(78)
9.5 轨迹方程的求法	(80)
习题九	(80)
第十章 导数及其应用	(83)
10.1 导数的概念及其运算	(83)
10.2 导数在研究函数中的应用	(84)
10.3 导数的综合应用	(85)
10.4 导数的实际应用	(87)
习题十	(88)
第十一章 算法初步与框图	(92)
11.1 算法的含义与程序框图	(92)
11.2 基本算法语句	(92)
11.3 算法案例	(93)
11.4 流程图与结构图	(94)
习题十一	(94)

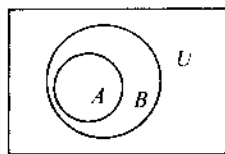
第十二章 统计	(96)
12.1 随机抽样和用样本估计总体	(96)
12.2 变量的相关性、回归分析和独立性检验	(97)
习题十二	(98)
第十三章 概率	(99)
13.1 随机事件的概率	(99)
13.2 古典概型	(100)
13.3 几何概型	(101)
习题十三	(102)
第十四章 推理与证明	(105)
14.1 合情推理与演绎推理	(105)
14.2 直接证明与间接证明	(106)
习题十四	(107)
第十五章 复数	(109)
15.1 复数的概念及其表示法	(109)
15.2 复数代数形式的运算	(110)
习题十五	(110)

第一章 集合与常用逻辑用语

1.1 集合

1. (D). $\complement_U B = \{1, 3, 4\}$, $A \cap (\complement_U B) = \{1, 3\}$, 故选 (D).

2. (C). $A = \{x | x < -2 \text{ 或 } x > 1\}$, $B = \{x | -3 \leq x \leq 2\}$, $A \cap B = \{x | -3 \leq x < -2 \text{ 或 } 1 < x \leq 2\}$.



3. (B). 如图, 可知 (B) 错误.

4. (C). 由图可知, 阴影部分是 M 与 P 的公共部分, 且又在 S 的外部, 再与选择支对照, 故应选 (C).

5. $P \cap \complement_U Q$. 因为 $Q = \{x | g(x) \geq 0\}$, 故 $\complement_U Q = \{x | g(x) < 0\}$. 不等式组 $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$ 的解集为 $\{x | \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}\} = \{x | f(x) < 0\} \cap \{x | g(x) < 0\} = P \cap (\complement_U Q)$.

6. $\{1, 2, 5\}$. 因 $A \cap B = \{2\}$, 则有 $\log_2(a+3) = 2$, 故 $a = 1$, 在 $B = \{a, b\}$ 中, 必有 $b = 2$, 故 $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$, 得 $A \cup B = \{1, 2, 5\}$.

7. 解: 因 $A \cap B = \{-3\}$, 故 $-3 \in B$, 由已知得 $a^2 + 1$

$$\neq -3, \text{ 且 } a^2 + 1 \neq a^2. \text{ 故 } \begin{cases} a - 3 = -3 \\ a^2 \neq 2a - 1 \text{ 或} \\ a + 1 \neq a^2 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a - 1 = -3 \\ a^2 \neq a - 3 \\ a + 1 \neq a^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a \neq 1 \\ a \neq 0 \text{ 且 } a \neq 1 \end{cases} \text{ 或}$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ a \neq 0 \text{ 且 } a \neq 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1.$$

8. (1) 因 $B = \{1, 2\}$, 而 $A \cup B = B$, 故 $A \subseteq B$. 故 A 可能有下列四种情形:

① $A = \{1, 2\}$, ② $A = \{1\}$, ③ $A = \{2\}$, ④ $A = \emptyset$.

① 当 $A = \{1, 2\}$ 时, $p = -3$, $q = 2$;

② 当 $A = \{1\}$ 时, $p = -2$, $q = 1$;

③ 当 $A = \{2\}$ 时, $p = -4$, $q = 4$;

④ 当 $A = \emptyset$ 时, p, q 满足 $p^2 < 4q$.

(2) 解法 1: 由 $A \cap \mathbf{R}^+ = \emptyset$ 可知 ① $A = \emptyset$, ② $A \neq \emptyset$

但 $A \subseteq \{x | x \leq 0\}$. ① 当 $A = \emptyset$ 时, 则 $\Delta < 0$, 即 $(2+p)^2 - 4 < 0$, 得 $-4 < p < 0$; ② 当 $A \neq \emptyset$ 时, 因 $x^2 + (2+p)x + 1 = 0$, 不可能有 0 根, 且两根必同号, 即 $A \subseteq \mathbf{R}^+$. 故必有 $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$, 即

$$\begin{cases} p^2 + 4p \geq 0 \\ 2 + p > 0 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} p \leq -4 \text{ 或 } p \geq 0 \\ p > -2 \end{cases}, \text{ 故 } p \geq 0.$$

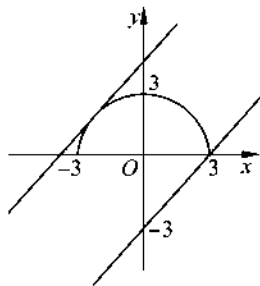
综合①、②可知, p 的取值范围是 $\{p | p > -4\}$.

解法 2: 由于方程 $x^2 + (2+p)x + 1 = 0$ 不可能有根为 0, 且两根必同号.

所以当 $A \cap \mathbf{R}^+ \neq \emptyset$ 时的条件是 $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$, 即

$$\begin{cases} p^2 + 4p \geq 0 \\ 2 + p < 0 \end{cases}, \text{ 故 } p \leq -4. \text{ 满足 } A \cap \mathbf{R}^+ = \emptyset \text{ 条件的 } p \text{ 的取值范围是 } p > -4.$$

9. (D). 如图 M 是以原点为圆心, 3 为半径的上半圆, M 与 N 有 $M \cap N = \emptyset$, 表明直线 $l: y = x + b$ 与半圆没有公共点, 所以 b 的取值范围只能是 $(-\infty, -3) \cup (3\sqrt{2}, \infty)$.



10. $[-3, -1) \cup (1, +\infty)$.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \{x | 4x^2 - 4 > 0\} \cap \{y | y \geq -3\} \\ &= \{x | x > 1 \text{ 或 } x < -1\} \cap \{y | y \geq -3\} \\ &= [-3, -1) \cup (1, +\infty). \end{aligned}$$

11. $(\frac{2}{3}, 1] \cup [-\frac{1}{3}, 0)$. 因 $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}, \theta \in$

$[0, \pi]$, 消参得 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ($0 \leq y \leq 1$), 把

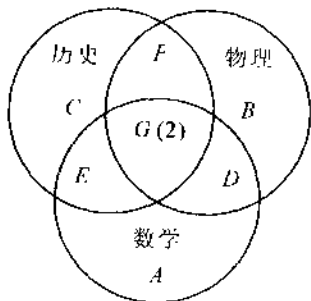
$$\begin{aligned} y &= kx + k + 1 \text{ 代入得 } (\frac{1}{4} + k^2)x^2 + (2k^2 + 2k)x \\ &+ k^2 + 2k = 0, \text{ 由 } \Delta = 3k^2 - 2k = 0 \text{ 得 } k = 0 \text{ 或 } k = \\ &\frac{2}{3}; \text{ 又直线 } y = kx + k + 1 \text{ 恒过点 } (-1, 1), \text{ 其与} \end{aligned}$$



$(-2, 0)$ 连线的斜率为1, 与 $(2, 0)$ 连线的斜率为 $-\frac{1}{3}$, 可由数形结合得到.

12. 分析: 这里的数量关系错综复杂, 采用韦恩图可以加强直观性.

解: 该校参加3个小组的情况如图所示, 有互不包含的集合: A, B, C, D, E, F, G . 集合 G 表示同时参加3个小组的学生集合, 其人数为2, 记作 $\text{card}(G) = 2$. 由于同时参加数学、物理、数学、历史、历史、物理各小组的人数分别为12人, 6人, 5人, 故可知 $\text{card}(D) = 12 - 2 = 10$, $\text{card}(E) = 6 - 2 = 4$, $\text{card}(F) = 5 - 2 = 3$. 又由于参加数学、物理、历史小组的人数分别为21人, 17人, 10人, 可知 $\text{card}(A) = 21 - 2 - 10 - 4 = 5$, $\text{card}(B) = 17 - 2 - 10 - 3 = 2$, $\text{card}(C) = 10 - 2 - 4 - 3 = 1$. 故需要预订座位数为 $5 + 2 + 1 + 10 + 4 + 3 + 2 = 27$.



13. 解: (1) 当 $a = 4$ 时, 原不等式可化为 $\frac{4x-5}{x^2-4} < 0$,

解得 $x < -2$ 或 $\frac{5}{4} < x < 2$, 故 $M \in (-\infty, -2) \cup (\frac{5}{4}, 2)$.

(2) 由 $3 \in M$, 得 $\frac{3a-5}{3^2-a} < 0$ 且 $5 \notin M$, 得 $\frac{5a-5}{5^2-a} \geq 0$,

0, 解之得 $a \in [1, \frac{5}{3}) \cup (9, 25)$.

14. 解: 由 $\begin{cases} x^2 + mx - y + 2 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \quad (0 \leq x \leq 2)$,

得 $x^2 + (m-1)x + 1 = 0$, $f(x) = x^2 + (m-1)x + 1$. 因 $A \cap B \neq \emptyset$, 故 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上至少与 x 轴有一个交点, 即等价于

$$f(0)f(2) \leq 0 \text{ 或 } \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ f(0) \geq 0 \\ f(2) \geq 0 \\ 0 \leq -\frac{m-1}{2} \leq 2 \end{cases},$$

$$\text{即 } 2m+3 \leq 0 \text{ 或 } \begin{cases} m^2 - 2m - 3 \geq 0 \\ 2m+3 \geq 0 \\ -4 \leq m-1 \leq 0 \end{cases}.$$

得 $m \leq -\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{3}{2} \leq m \leq -1$, 所以 m 的取值范围为 $(-\infty, -1]$.

1.2 充分条件与必要条件

1. (B). $a \cdot b = a \cdot c \Leftrightarrow a(b-c) = 0 \nRightarrow b=c$, 而 $b=c \Rightarrow a \cdot (b-c) = 0$, 则甲是乙的必要不充分条件.

2. (A). 由选择支观察, 先判断命题①的正确性, 其逆命题是: “ $x > 1 \Rightarrow \sqrt{x^2} = x$ ”为真命题, 故①为真, 因而排除了(B)、(D). 而对(A)、(C)中只需判断命题④或⑤, 显然⑤易判断, 其否命题是: “ $ab \neq 0 \Rightarrow a=0$ 且 $b \neq 0$ ”, 显然是假命题.

3. (C). 方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ ($a \neq 0$) 有一个正根和一个负根的充要条件是 $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{a} < 0$, 即 $a < 0$.

4. (B). 当 $c=0$, a, b 不为0时, $ac=bc \nRightarrow a=b$, 所以①是假命题; 当 $a=2, b=-3$ 时, $a > b \nRightarrow a^2 > b^2$, 所以③是假命题. ②、④显然正确.

5. $ab > 0$ 是 $\frac{a}{b} > 0$ 的充要条件; 而 $ab \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a \leq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$, $\frac{a}{b} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a \leq 0 \\ b < 0 \end{cases}$, 因此 $ab \geq 0$ 是 $\frac{a}{b} \geq 0$ 的必要但不充分条件.

6. $[0, \frac{1}{2}]$. 解: $|4x-3| \leq 1$, 得 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$, 解 q 得 $a \leq x \leq a+1$, 由题设条件得 q 是 p 的必要不充分条件, 即 $p \Rightarrow q, q \nRightarrow p$, 故 $[\frac{1}{2}, 1] \subsetneq [a, a+1]$.

故 $a \leq \frac{1}{2}$, 且 $a+1 \geq 1$, 得 $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$.

7. 逆命题: “已知 a, b, c, d 是实数, 若 $a+c > b+d$, 则 $a > b$ 且 $c > d$ ”是假命题.

否命题: “已知 a, b, c, d 是实数, 若 $a \leq b$ 或 $c \leq d$, 则 $a+c \leq b+d$ ”是假命题. (因逆、否命题同真假)

逆否命题: “已知 a, b, c, d 是实数, 若 $a+c \leq b+d$, 则 $a \leq b$ 或 $c \leq d$ ”是真命题. (因原命题为真)

8. 证明: 用反证法. 假设 a, b 都不能被5整除, 则 a, b 的质因数分解中一定没有5. 所以 ab 的质因数分解中也没有5. 故 ab 不能被5整除. 这个结论与已知矛盾, 所以假设不成立, 原命题成立.

即 a, b 中至少有一个能被 5 整除.

9. (D). 对(A), 因为 c 的正负未知, 因而 a 与 b 的大小不定, 所以(A)假; 对(B), 逆命题是“若 $b^2 = 9$, 则 $b = 3$ ”, 它未必成立, 因为 b 可能等于 -3 , 所以(B)假; 对(C), 否命题为“当 $x \neq 2$ 时, $x^2 - 3x + 2 \neq 0$ 为假”, 因为 $x \neq 2$, 但可以为 1, 使 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 成立; 对(D), 其逆否命题为“两个三角形的对应角不相等, 则这两个三角形不相似”为真, 因为与原命题为等价命题. 原命题为真.

10. (A). 由 $A \subseteq B$, 利用韦恩图得 $(\complement_U A) \cup B = U$, 故 $A \subseteq B$ 是 $(\complement_U A) \cup B = U$ 的充分条件, 而 $A = B$ 时, $(\complement_U A) \cup B = U$, 故 $A \subseteq B$ 不是 $(\complement_U A) \cup B = U$ 的必要条件.

11. (D). (D)中, 因 $b \parallel \beta$, $\alpha \cap \beta = a$, 故 a 与 b 无交点, 若 $a \parallel b$, 由 $b \perp \alpha$, 得 $a \perp \alpha$, 由题设有 $a \subseteq \alpha$, 故 a, b 不可能平行, a 与 b 无交点, 故 a, b 是异面直线.

12. $1 \leq m < 2$. 因 $|x| + |x-1| > m$ 解集为 $\mathbf{R}$, 故 $m < (|x| + |x-1|)_{\min}$, $|x| + |x-1| \geq |x - (x-1)| = 1$, 故 $m < 1$, 由已知 $(5-2x)^x$ 为增函数, 故 $5-2x > 1$, $m < 2$. 由 p, q 中一真一假, 故

$$\begin{cases} m \geq 1 \\ m < 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m < 1 \\ m \geq 2 \end{cases}, \text{ 所以 } 1 \leq m < 2.$$

13. 证明: 原命题的逆否命题为“已知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的增函数, $a, b \in \mathbf{R}$, 若 $a+b < 0$, 则 $f(a) + f(b) < f(-a) + f(-b)$ ”; 若 $a+b < 0$, 则 $a < -b$, $b < -a$, 因 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数, 故 $f(a) < f(-b)$, $f(b) < f(-a)$, 故 $f(a) + f(b) < f(-a) + f(-b)$, 即逆否命题为真命题, 所以原命题为真.

14. 解: $M \cap N \neq \emptyset$ 的充要条件是方程组
$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ (x-a)^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$
 至少有一个实数解, 即 $x^2 + 2(1-a)x + a^2 - 9 = 0$ 至少有一个非负根, 由 $\Delta \geq 0$ 得 $a \leq 5$. 又因为方程有两个负根的充要条件是 $x_1 + x_2 < 0$ 且 $x_1 \cdot x_2 > 0$, 即 $-2(1-a) < 0$ 且 $a^2 - 9 > 0$, 解得 $a < -3$, 于是使这个方程至少有一个非负根的取值范围是 $-3 \leq a \leq 5$.

1.3 常用逻辑用语

1. (B). 显然 p 真 q 假, 只有 $p \vee q$ 为真命题.
2. (D). 因 $|a+b| \leq |a| + |b|$, 故 $|a+b| > 1 \Rightarrow |a| + |b| > 1$, 而 $|a| + |b| > 1$ 并不一定能推出 $|a+b| > 1$, 所以 p 是假命题; 而 q : 由 $|x-1| - 2$

≥ 0 , 得 $|x-1| \geq 2$, 故 $x-1 \leq -2$ 或 $x-1 \geq 2$, 即 $x \leq -1$ 或 $x \geq 3$, 故 q 命题为真, 所以选(D).

3. (C). 因为 $p \vee q$ 为真, 则 p, q 中至少有一个真; $p \wedge q$ 为假, 则 p, q 中至少有一个假; 从而 p, q 中必有一真一假, 即 p, q 中有且只有一个为真.
4. (D). 因为(A)的否定是 $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 3x + 4 \leq 0$, 假命题;

(B)的否定是 $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x - 3 > 0$, 假命题;

(C)的否定是所有三角形不是锐角三角形, 假命题;

(D)的否定是有些一元二次方程不一定有实数解, 真命题.

5. $\{-1, 0, 1, 2\}$. 因为 $\neg q$ 为假, 故 q 为真, 又因 $p \wedge q$ 假, 故 p 必假, 故 $\begin{cases} |x^2 - x| < 6 \\ x \in \mathbf{Z} \end{cases}$, 即 $\begin{cases} -6 < x^2 - x < 6 \\ x \in \mathbf{Z} \end{cases}$, 得 $\begin{cases} -2 < x < 3 \\ x \in \mathbf{Z} \end{cases}$, 所以 $x = -1, 0, 1, 2$.

6. $[1, 2)$. 因为 p 中, $|x| + |x-1| \geq 1$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 所以要使不等式 $|x| + |x-1| > m$ 恒成立, 只需 $m < 1$ 即可. 在 q 中, 因 $f(x)$ 是减函数, 所以 $g(x) = (5-2m)^x$ 就是增函数, 即 $5-2m > 1$, 故 $m < 2$. 因 $p \vee q$ 为真, $p \wedge q$ 为假, 故 p 与 q 有且只有一个真.

(1) 若 p 真 q 假, 则 $\begin{cases} m < 1 \\ m \geq 2 \end{cases}$, 解集为 $\emptyset$;

(2) 若 q 真, p 假, 则 $\begin{cases} m \geq 1 \\ m < 2 \end{cases}$, 故 $1 \leq m < 2$.

7. 解: (1) 因 $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$. 故命题为真命题;

(2) 真命题;

(3) 因 $\alpha = \beta = 0$ 时, $\sin(\alpha + \beta) = 0$, $\sin \alpha = \sin \beta = 0$, 故 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$, 故命题为真命题;

(4) 因 $x = y = 10$ 时, $3x - 2y = 10$, 故命题为真命题;

(5) 因 $a = 0, b = 1$ 时, $ax + b = 1 \neq 0$, 故 $a = 0, b = 1, ax + b = 0$ 无解, 故命题为假命题.

8. 解: (1) 命题的否定: $\exists x \in \mathbf{R}$, 使 $3x - 5 \neq 0$, 当 $x = 3$ 时, $3 \times 3 - 5 = 4 \neq 0$, 故命题的否定为真;

(2) 命题的否定: $\exists x \in \mathbf{R}$, 使 $x^2 \leq 0$, 当 $x = 0$ 时, $0^2 = 0$, 故命题的否定为真;

(3) 命题的否定: $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 \neq 1$, 当 $x = 1$ 时, $x^2 = 1$, 故命题的否定是假;

(4) 命题的否定: $\forall x \in \mathbf{R}, x$ 不是方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的根, 因当 $x = 1$ 时, $x^2 - 3x + 2 = 0$ 成立, 故命





题的否定为假.

9. (C). “ $\neg(p \text{ 或 } q)$ ”为假命题, 则“ $p \text{ 或 } q$ ”为真命题, 也即 p, q 中至少有一个为真命题.

10. (C). ①的否定是: 有些实数的平方不是正数, 因当 $x=0$ 时, $x^2=0$ 不是正数, 故命题为真命题; ②的否定是: 有些实数 x 不都是方程 $5x-12=0$ 的根, 当 $x=1$, 而 $5 \times 1 - 12 \neq 0$, 故命题为真命题; ③的否定是: 有些数能被 8 整除但不能被 4 整除, 假; ④的否定是: $\exists$ 四边形, 若它是正方形, 则它的 4 条边中, 至少有 2 条边不相等, 这个命题是假命题.

11. 解: 逆命题: 若 $a=0$ 或 $b=0$, 则 $ab=0$, 逆命题为真命题;

否命题: 若 $ab \neq 0$, 则 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$, 否命题为真命题;

逆否命题: 若 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$, 则 $ab \neq 0$, 逆否命题为真命题.

12. 解: (1) p 且 q, p : 梯形的中位线平行于两底, q : 梯形的中位线等于两底和的一半;

(2) $\neg p, p: \sqrt{3} < 2$;

(3) p 或 q, p : 方程 $x^2-16=0$ 的一个解是 $x=4$, q : 方程 $x^2-16=0$ 的一个解是 $x=-4$.

13. 解: (1) 任意一个有理数都能写成分数形式;

(2) 一切 n 边形的内角和都等于 $(n-2) \times 180^\circ$;

(3) 任意两个有理数之间, 都有一个有理数;

(4) 存在一个实数, 它乘以任意一个实数都等于 0.

14. (1) 命题的否定: 某些正方形不都是菱形, 假命题;

(2) 命题的否定: $\forall x \in \mathbf{R}, 4x-3 \leq x$, 当 $x=2$ 时, $4 \times 2 - 3 = 5 > 2$, 故“ $\forall x \in \mathbf{R}, 4x-3 \leq x$ ”是假命题;

(3) 命题的否定: $\exists x \in \mathbf{R}$, 使 $x+1 \neq 2x$, 因 $x=2$ 时, $x+1=2+1=3 \neq 2 \times 2$, 故“ $\exists x \in \mathbf{R}$, 使 $x+1 \neq 2x$ ”是真命题;

(4) 命题的否定: 集合 A 既不是集合 $A \cap B$ 的子集, 也不是集合 $A \cup B$ 的子集, 是假命题.

习题一

1. (D). 方法 1: 因集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{2, 5, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$.

故 $\complement_U A = \{1, 3, 4, 6, 7\}$, $(\complement_U A) \cap B = \{1, 3, 7\}$, 选 (D).

方法 2: 由选择支, 得 (B)、(C) 必被排除, 因

$(\complement_U A) \cap B$ 中的元素必是 B 的元素, 从选择支 (A) 可知 5 只能是 A 的元素, 并不是 $(\complement_U A)$ 中的元素, 故排除 (A). 选 (D).

2. (A). 方法 1: 因 $\frac{x-1}{x-2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-2} - \frac{1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < 2$, 故 $M = \{x | 0 \leq x < 2\}$. 因 $x^2 + 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1$, 故 $N = \{x | -3 < x < 1\}$, $M \cap N = \{x | 0 \leq x < 1\}$. 故选 (A).

方法 2: 由选择支, 只需先验证 $x=1$ 时是不是两个不等式都成立.

显然 $x^2 + 2x - 3 < 0$ 不成立. 故选 (A).

3. (D). $\forall k = 2n \ (n \in \mathbf{Z})$ 时, $Q = \left\{ y \mid y = \frac{n}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi, n \in \mathbf{Z} \right\}$; $\forall k = 2n - 1$ 时, $Q = \left\{ y \mid y = \frac{n}{2}\pi + \frac{1}{4}\pi, n \in \mathbf{Z} \right\}$. 故 $P \not\subseteq Q$, 选 (D).

4. (C). 因 $a+b < 0$, 故 $b < -a$. 不等式 $\frac{a+x}{b-x} < 0 \Leftrightarrow (x+a)(x-b) > 0$, 故 $x > -a$ 或 $x < b$. 选 (C).

5. (A). 因 $|x| = x \Leftrightarrow x \geq 0$, 而 $x^2 \geq -x \Leftrightarrow x \leq -1$ 或 $x \geq 0$, 故 $p \Rightarrow q$, 但 $q \not\Rightarrow p$, 故 p 是 q 的充分不必要条件. 选 (A).

6. (D). a, b, c 不全为零, 即 a, b, c 中至少有一个不为零. 故选 (D).

7. (A). 因 $a > b$ 与 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 同时成立 $\Leftrightarrow \begin{cases} ab > 0 \\ a > b \end{cases} \Leftrightarrow a > b > 0$ 或 $b < a < 0$. 故选 (A).

8. (C). ①是真命题, ③是真命题, 其余均为假命题. 故选 (C).

9. (C). 对于 (A) 的否定是: $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 < 0$, 因 $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$, 故为假命题; 对于 (B) 的否定是: 有些四边形内角和不等 360° , 故为假命题; 对于 (D) 的否定是: 至少存在一个分数不是有理数, 故为假命题; 而对于 (C) 的否定是: $\forall x \in \mathbf{R}, \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, 故为真命题. 故选 (C).

10. (C). 方法 1: 因方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 没有实根或有两个正根的条件是 $\Delta < 0$ 或 $\begin{cases} -2a > 0 \\ a > 0 \end{cases}$, 即 $4 - 4a < 0$ 或 $a \in \emptyset$. 故 $a > 1$. 由此, 方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 至少有一个负根的条件是 $a \leq 1$. 故选 (C).

方法 2: 方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 有且只有一个负根的条件是 $a \leq 0$. 方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 有两个负

根的条件是 $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ \frac{1}{a} > 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a \leq 1 \\ a > 0 \end{cases}$, 故 $0 < a \leq 1$, 从

而方程至少有一个负根的充要条件是 $a \leq 1$.

11. 因 $A = \{y | y = x^2, x \in \mathbf{R}\} = \{y | y \geq 0\}$,

$$B = \{y | y = 2 - |x|, x \in \mathbf{R}\} = \{y | y \leq 2\},$$

$$\text{故 } A \cap B = \{y | 0 \leq y \leq 2\}. \text{ 因 } \complement_{\mathbf{R}} B = \{y | y > 2\},$$

$$\text{故 } A \cap \complement_{\mathbf{R}} B = \{y | y > 2\}.$$

12. 因 $P \not\subseteq Q \not\subseteq U$, 故 $P \cap \complement_U Q = \emptyset$.

13. $B = \left\{ (x, y) \mid \frac{y-1}{x-2} = \frac{1}{2}, x, y \in \mathbf{R} \right\} = \{ (x, y) \mid$

$$|x-2y=0 \text{ 且 } x \neq 2, y \neq 1, \text{ 且 } x, y \in \mathbf{R} \}.$$

$$\text{故 } \complement_U B = \{ (x, y) \mid x-2y \neq 0 \text{ 或 } x=2 \text{ 或 } y=1 \text{ 且 } x, y \in \mathbf{R} \}.$$

$$\text{故 } A \cap (\complement_U B) = \{ (x, y) \mid x=2 \text{ 且 } y=1 \} = \{ (2, 1) \}.$$

14. 否命题是: 若 $(x-1)(y+2)=0$, 则 $x=1$ 或 $y=-2$.

$$\text{逆否命题是: 若 } x=1 \text{ 或 } y=-2, \text{ 则 } (x-1)(y+2)=0.$$

15. 此命题的逆命题: 两个三角形全等, 两个三角形面积相等且两边对应相等, 是真命题. 但原命题假, 如在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中, $AB=A'B', AC=A'C'$, 但 $\angle BAC=60^\circ$, 而 $\angle B'A'C'=120^\circ$. 显然 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle A'B'C'}$, 但 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 不全等, 故是必要不充分条件.

16. 由 $|x-a| < 2$, 得 $a-2 < x < a+2$, 故 $A = \{x | a-2 < x < a+2\}$. 由 $\frac{2x-1}{x+2} < 1$, 得 $\frac{x-3}{x+2} < 0$, 即 $-2 < x < 3$, 故 $B = \{x | -2 < x < 3\}$. 因 $A \subseteq B$,

$$\text{故 } \begin{cases} a-2 \geq -2 \\ a+2 \leq 3 \end{cases}, \text{ 得 } 0 \leq a \leq 1, \text{ 故 } a \text{ 的取值范围是 } [0, 1].$$

17. 解: 由 $a(x-2)+1 > 0, a > 2$, 得 $x > 2 - \frac{1}{a}$, 由

$$(x-1)^2 > a(x-2)+1, \text{ 得 } (x-a)(x-2) > 0, \text{ 因 } a > 2, \text{ 故解得 } x < 2 \text{ 或 } x > a. \text{ 由 } a > 2, \text{ 得 } 0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} < -\frac{1}{a} < 0, \text{ 即 } \frac{3}{2} < 2 - \frac{1}{a} < 2.$$

$$\text{因使 } p, q \text{ 都成立的条件是 } 2 - \frac{1}{a} < x < 2 \text{ 或 } x >$$

$$a, \text{ 故使得 } p, q \text{ 都成立的 } x \text{ 集合为 } \{x | 2 - \frac{1}{a} < x < 2 \text{ 或 } x > a\}.$$

18. 证明: 反证法. 假设两个方程都没有实数根, 则 $\Delta_1 < 0$ 且 $\Delta_2 < 0$, 从而 $\Delta_1 + \Delta_2 < 0 \cdots \text{①}$. 又因 $\Delta_1 + \Delta_2 = (p_1^2 - 4q_1) + (p_2^2 - 4q_2) = p_1^2 + p_2^2 - 4(q_1 + q_2)$. 因 $2(q_1 + q_2) = p_1 p_2$, 故 $\Delta_1 + \Delta_2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 = (p_1 - p_2)^2 \geq 0$. 这与①相矛盾, 所以所给两方程中至少有一个方程有实根.

19. 解: 因 p 条件可化为 $3a < x < a$ ($a < 0$),

$$q \text{ 条件可化为 } -2 \leq x \leq 3 \text{ 或 } x < -4 \text{ 或 } x > 2.$$

$$\text{即 } p: (3a, a) (a < 0), q: (-\infty, -4) \cup [-2, +\infty). \text{ 因 } \neg p \text{ 是 } \neg q \text{ 的必要不充分条件, 故 } p \text{ 是 } q \text{ 的充分不必要条件, 故 } (3a, a) \subseteq (-\infty, -4) \cup [-2, +\infty), \text{ 即 } a \leq -4 \text{ 或}$$

$$\begin{cases} 3a \geq -2 \\ a < 0 \end{cases}, \text{ 得 } a \leq -4 \text{ 或 } -\frac{2}{3} \leq a < 0, \text{ 故 } a \text{ 的取}$$

$$\text{值范围是 } (-\infty, -4] \cup [-\frac{2}{3}, 0).$$

20. 证明: (1) 必要性“ $\Leftarrow$ ”, 因 $x=1$ 是方程 $ax^2 - bx + c = 0$ 的一个根, 故 $a - b + c = 0$.

$$(2) \text{ 充分性“} \Rightarrow \text{”, 因 } a - b + c = 0, \text{ 故 } c = b - a,$$

$$\text{故 } ax^2 - bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 - bx + b - a = 0 \Leftrightarrow (x-1)(ax + a - b) = 0. \text{ 若 } a = 0, \text{ 则 } b \neq 0, \text{ 故}$$

$$x=1; \text{ 若 } a \neq 0, \text{ 则 } x=1 \text{ 或 } x = \frac{b}{a} - 1. \text{ 即方程 } ax^2 - bx + c = 0 \text{ 有一根 } x=1. \text{ 由 (1), (2) 知, 命题成立.}$$

第二章 函数概念与幂函数、指数函数、对数函数

2.1 函数及其表示

第一课时

- (C). 由 $20 = 2^4 + 4 = 2^n + n$ 可知.
- (B). 由函数的表达式可知, 当 $x = 3 > 1$ 时, $f(3) = 2 \times 3 - 1 = 5$.
- (C). 由 $-2 \leq x^2 - 1 \leq 2, 0 \leq x^2 \leq 3$, 于是 $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$.
- (D). 易知(A)满足③, (B)满足①, (C)满足②, (D)不满足任何等式.
- 可用配方法: 由 $f(x - x^{-1}) = (x - x^{-1})^2 + 2$, 得 $f(x) = x^2 + 2$.
- 依题意, 当 $0 < s \leq 3$ 时, $Q = 7$; 当 $s > 3$ 时, $Q = 7 + 2.6(s - 3)$, 故

$$Q = \begin{cases} 7, & 0 < s \leq 3 \\ 7 + 2.6(s - 3), & s > 3 \end{cases}$$
- 依题意, 不等式 $-x^2 + ax + b \geq 0$ 的解集是 $[1, 2]$, 所以方程 $-x^2 + ax + b = 0$ 的根是 1 与 2, 从而 $a = 3, b = -2, a + b = 1$.
- 由映射 $f: x \rightarrow y = 3x + 1$, 知 $f(1) = 4, f(2) = 7, f(3) = 10 \in \mathbf{R}$, 由 $a \in \mathbf{N}$, 知 $10 \neq a^4$, 从而 $10 = a^2 + 3a$, 解此得 $a = 2$ 或 $a = -5$ (舍去), 于是 $f(k) = 3k + 1 = a^4 = 16, k = 5$, 即 $a = 2, k = 5$ 为所求.
- (B). 原函数的定义域是 $\mathbf{R}$, 即 $x^2 + (k+3)x + \frac{9}{4} > 0$ 对一切实数 x 恒成立, 只需 $\Delta = (k+3)^2 - 9 < 0$, 解此得 $-6 < k < 0$.
- (C). 因 $-9 = -10 + 1 < 0, \frac{1}{2}\pi > 0$, 故 $f(\frac{1}{2}\pi + 1) \times f(-9) = f(\frac{1}{2}\pi + 1) \times f(-10 + 1) = \sin \frac{\pi}{2} \times \lg 10 = 1$.
- 当 $a < 0$ 时, 由 $2^{-a} - 1 > 1$, 得 $a < -1$; 当 $a > 0$ 时, 由 $\sqrt{a} > 1$, 得 $a > 1$. 故 a 的取值范围是 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
- 假设存在正的自然数 a, b , 满足已知条件, 则由 $f(b) = b$, 得 $2 = b(a - 1)$, 由于 $a, b \in \mathbf{N}^*$, 从而

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}, \text{ 当 } \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \text{ 时, } f(x) = \frac{x^2}{3x - 2}, \text{ 由}$$

$$-b = -1, f(-b) = f(-1) = -\frac{1}{\sqrt{5}} > -1 = -\frac{1}{b} \text{ (舍去); 当 } \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \text{ 时, } f(x) = \frac{x^2}{2x - 2}, \text{ 由 } -b = -2, f(-2) = -\frac{2}{3} < -\frac{1}{2} = -\frac{1}{b}, \text{ 符合条件②, 故存在正自然数 } a = b = 2, \text{ 符合题中的条件.}$$

第二课时

- (A). 由 $y = 3^x > 0, y = x^2 - 1 \geq -1$ 可知.
- (B). 由于 $y = 3^{x-1} = \frac{1}{3}x^x > 0$, 其他各函数的值域均不是 $\mathbf{R}^+$.
- (D). 由 $3 + 2x - x^2 \geq 0$, 得定义域是 $-1 \leq x \leq 3$, 从而函数必有最大值和最小值, 易得最小值是 $f(1) = 2$. 于是选(D).
- 由 $x = 0, 1, 2, 3$, 可知原函数的值域是 $\{0, 4\}$.
- 由 $a^x = \frac{1+y}{1-y} > 0$, 得 $\frac{1+y}{1-y} > 0$, 即 $(1-y)(1+y) > 0$, 解得 $-1 < y < 1$.
- 设长为 $x(\text{m})$, 则宽为 $\frac{4-2x}{3}(\text{m})$, 窗户的面积

$$S = x \cdot \frac{4-2x}{3} = -\frac{2}{3}(x-1)^2 + \frac{2}{3} \leq \frac{2}{3}, \text{ 当 } x = 1 \text{ 时, 窗户的面积 } S \text{ 有最大值. 故当长为 } 1\text{m, 宽为 } \frac{2}{3}\text{m 时, 窗户透过的光线最多.}$$
- (1) 由 $f(x) = 2^{x-5}$ 和 $g(x) = \log_3 \sqrt{x-1}$ 在区间 $[2, 10]$ 上均为增函数, 而原函数在已知区间上也是增函数, 从而可求得值域是 $[\frac{1}{8}, 33]$.
 (2) 由于 $\sin x = \frac{2(1-y)}{1+y}$, 由 $|\sin x| \leq 1$, 得 $2|1-y| \leq |1+y|$, 解得 $y \in [\frac{1}{3}, 3]$.
- (1) 当 $0 < x \leq 2$ 时, $y = \frac{1}{2}|AB| \times |BM| = x$; 当 $2 < x \leq 4$ 时, $y = \frac{1}{2}|AB| \times |BC| = 2$; 当 $4 < x < 6$ 时, $y = \frac{1}{2}|AB| \times |AM| = \frac{1}{2} \times 2(6-x) = 6-x$,



$$\text{所以, } f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 2 \\ 2, & 2 < x \leq 4. \\ 6-x, & 4 < x < 6 \end{cases}$$

(2) 此函数的定义域是 $(0, 6)$, 值域是 $(0, 2] \cup \{2\} \cup (0, 2) = (0, 2]$.

9. (A). 在同一坐标系中作出两函数的图象, 可知

$$F(x) = \begin{cases} 2-x^2, & x < -2 \text{ 或 } x > 1 \\ x, & -2 \leq x \leq 1 \end{cases}, \text{ 于是 } F(x) \text{ 的}$$

最大值是 $F(1) = 1$.

10. (D). 设 $t = \sin x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, 则 $y = -\sin^2 x + \sin x + 1 = -t^2 + t + 1$, 由二次函数的单调性可知.

11. 易知 $f(x)$ 的最大与最小值之和总是 $f(0) + f(1) = 1 + a + \log_2 2 = a$, 于是 $a = \frac{1}{2}$.

12. 由 $3+2x-x^2 > 0$, 得 $M = (-1, 3)$, 设 $t = 2^x$, 则 $t \in (\frac{1}{2}, 8)$, 从而 $f(x) = g(t) = 4t - 3t^2$, 由二次函数的图象及其性质可知 $g(8) < g(t) \leq g(\frac{2}{3})$, 当且仅当 $2^x = \frac{2}{3}$, 即当 $x = \log_2 \frac{2}{3} = 1 - \log_2 3$ 时, $f(x)$ 取得最大值是 $\frac{4}{3}$, 没有最小值. 所以 $f(x)$ 的值域是 $(-\infty, \frac{4}{3}]$.

2.2 函数的基本性质

第一课时

1. (A). $-g(x)$ 是增函数, 则 $f(x) + (-g(x))$ 为增函数.

2. (B). 可用排除法.

3. (B). 由 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 递增和函数图象的平移可知.

4. $(-4, -1]$. 求出 $u = -x^2 - 2x + 8$ 的单调增区间, 结合原函数的定义域可得.

5. $[-16, +\infty)$. 依题意, 对称轴 $-\frac{a}{16} \leq 1$.

6. $(\frac{1}{2}, +\infty)$. 原函数化成 $f(x) = a + \frac{1-2a}{x+2}$, 任取 x_1, x_2 , 且 $-2 < x_1 < x_2$, 则由不等式 $f(x_1) - f(x_2) < 0$ 可解出 a 取值的范围.

7. 任取 x_1, x_2 , 且 $0 < x_1 < x_2$, $f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} (1 - x_1 x_2)$, 其中 $\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} > 0$, 则当 $0 < x_1 < x_2 \leq 1$ 时, $f(x_1) - f(x_2) > 0$, 即 $x \in (0, 1]$, $f(x)$ 为单调递减; 当 $1 < x_1 < x_2$ 时, $f(x_1) - f(x_2) < 0$,

即 $x \in (1, +\infty)$, $f(x)$ 为单调递增.

8. 由 $f(-x^2 + x - 2) > f(-kx)$, 得 $-x^2 + x - 2 < -kx$, 即 $x^2 - (k+1)x + 2 > 0$ 对一切实数 x 恒成立, 于是 $8 - (k+1)^2 > 0$, 解得 $-2\sqrt{2} - 1 < k < 2\sqrt{2} - 1$.

9. (D). 由 $a+b \leq 0$, 得 $a \leq -b$, $f(a) \geq f(-b)$; 由 $b \leq -a$, 所以两式相加可得.

10. (B). 依题意 $f(x)$ 为增函数, 由 $f(x^2) < f(-x)$, 得 $x^2 < -x$, 解此可得.

11. 由对数函数的单调性, 分类讨论可得 x 的集合为 $(0, \frac{2}{3}) \cup (1, +\infty)$.

12. $f(4) = f(2) + f(2) = 2$, 则 $f(8) = 3$, 原不等式 $\Leftrightarrow f(x(x-2)) < f(8)$, 则有 $x(x-2) < 8$, 且 $x \in (2, +\infty)$, 解得 $x \in (2, 4)$.

第二课时

1. (D). 设 $x < 0$, 则 $-x > 0$, $f(-x) = -x(1 + \sqrt[3]{-x}) = -x(1 - \sqrt[3]{x})$, 由 $f(x)$ 是奇函数, 得 $f(x) = -f(-x) = x(1 - \sqrt[3]{x})$.

2. (B). 由 $f(x) = f(x+4)$, 得 $f(7.5) = f(8-0.5) = f(-0.5) = -f(0.5) = -0.5$.

3. (A). 由 $y = f(x+2)$ 的对称轴是 $x=0$, 得 $y = f(x)$ 的对称轴是 $x=2$, 由 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 上是增函数, 得 $f(-1) < f(1) = f(3)$.

4. 由 $f(x) = x^2 + a \sin x + x + 8 \Rightarrow f(-2) = 2^2 - a \sin x - 2 + 8 = 10$, 得 $f(2) = 2^2 + a \sin x + 2 + 8 = 14$.

5. 由 $g(x)$ 与 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称, $x \in [-1, 0]$, $f(x) = g(2-x) = -x + 4x^3$, 得
$$f(x) = \begin{cases} -x + 4x^3, & x \in [-1, 0] \\ x - 4x^3, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

6. 易知 $f(x)$ 是偶函数, 且 $f(x) + f(x^{-1}) = 1$, 于是原式 $= 1 + 1 + 1 + f(-1) = \frac{7}{2}$.

7. 因 $f(x)$ 是定义在 $(-1, 1)$ 上的奇函数, 且在区间 $[0, 1)$ 上单调递增, $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上是递增的. 由 $f(1-a) + f(1-a^2) < 0 \Rightarrow f(1-a) < -f(1-a^2) = f(a^2-1)$, 得

$$\begin{cases} -1 < 1-a < 1 \\ -1 < a^2-1 < 1 \\ 1-a < a^2-1 \end{cases}$$

解得 $1 < a < \sqrt{2}$.

8. 设 $g(x) = \frac{9^x - 1}{3^{x+1}} - x$, 则易知它是奇函数, 即 $f(x) + f(-x) = 2$, 从而 $f(-a) = 2 - f(a) = 2 - \sqrt{3}$.

9. (B). 由偶函数的性质, 得 $|1-m| > |m|$, 结合定

义域 $|1-m| \leq 2$, 解得 $m \in [-1, \frac{1}{2}]$.

10. (C). $f(10) = f(4+6) = f(4+1) = f(5) = f(-1+6) = f(-1+1) = f(0) = 0$, $f(4) = f(-1+5) = f(-1) = -f(1) = -2$, $f(10) + f(4) = -2$.
11. 由图象关于 $x=2$ 对称, 得 $f(x+2) = f(4+x) = f(-x) = f(x)$, 4 是原函数的周期, 于是 $x \in [-6, -2]$ 时, $x+4 \in [-2, 2]$, $f(x) = f(x+4) = -(x+4)^2 + 1 = -x^2 - 8x - 15$.
12. 依题意 $f(-x) = -f(x) \Rightarrow \frac{ax^2+1}{-bx+c} = -\frac{ax^2+1}{bx+c} \Rightarrow -bx+c = -bx-c \Rightarrow c=0$, 又 $f(x) = \frac{ax^2+1}{bx} = \frac{ax}{b} + \frac{1}{bx} \geq 2\sqrt{\frac{ax}{b} \times \frac{1}{bx}} = 2\sqrt{\frac{a}{b^2}} \geq 2 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b^2}} = 1 \Rightarrow a=b^2$, $f(x) = \frac{b^2x+1}{bx} \Rightarrow f(1) = \frac{b^2+1}{b} = b + \frac{1}{b} < \frac{5}{2}$, $b \in \mathbf{N}^* \Rightarrow b=a=1$, 故 $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

2.3 幂函数、指数函数、对数函数

第一课时

1. (C). 原方程为 $5^{4x-1} = 1$, 从而 $4x-1=0$, $x = \frac{1}{4}$.
2. (C). 由题意, $y-x > 0 > x-y$, $x-1 > 0 > 1-y$, 由指数函数的单调性可知.
3. (B). 由 $y = a^{x-1}$ 过点 $(1, 1)$ 可知.
4. 由题意有 $x^2 - 8 < 2x$, 解此得 $-2 < x < 4$.
5. $-x^2 + 6x - 17 = -(x-3)^2 - 8 \leq -8$, 值域为 $(0, 2^{-8}]$, 递增区间是 $(-\infty, 3]$.
6. 由幂函数的定义, 知 $m^2 - 3m + 3 = 1$, 解得 $m=1$ 或 $m=2$, 函数为 $y=x$ 或 $y=x^{-1}$.
7. 由 $y=2^x$ 的反函数为 $y = \log_2 x$, $f(4x-x^2) = \log_2(4x-x^2)$ 中, 由 $4x-x^2 > 0$ 得 $0 < x < 4$, 而 $t = 4x-x^2$ 的对称轴是 $x=2$, 于是 $[2, 4)$ 为所求.
8. 当 $a > 1$ 时, 原式为 $\frac{x+1}{1-x} > 1$, 解得 $0 < x < 1$; 当 $0 < a < 1$ 时, 原式为 $0 < \frac{x+1}{1-x} < 1$, 解得 $-1 < x < 0$. 所以, x 的取值范围: 当 $a > 1$ 时为 $0 < x < 1$; 当 $0 < a < 1$ 时为 $-1 < x < 0$.
9. (D). $y=2^x$ 向下平移 1 个单位, 得 $y=2^x-1$, 再作关于直线 $y=x$ 对称图, 得 $y = \log_2(x+1)$ 的图象.
10. (C). 由 $0 < a < 1$, 得 $\log_a(x-3) > 0$; 由 $0 < b < 1$, 得 $0 < x-3 < 1$, 即 $3 < x < 4$.
11. 由于 $f(x) = (2^x - a)^2 + (b - a^2)$, 依题意, 当 2^x

$=4$ 时, $f(x) = 10$, 所以有 $4-a=0$, $b-a^2=10$, 从而 $a=4$, $b=26$, $a+b=30$.

12. 因 $f(x) = 1 + \frac{2}{3^{2x}-1}$, 其定义域是 $|x| \neq 0$.

(1) 由于 $f(-x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数.

(2) 提示: 可由函数单调性的定义证明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增, 由偶函数图象的对称性可知它在 $(-\infty, 0)$ 上递减.

(3) 由 $3^{2x} = \frac{y+1}{y-1} > 0$, 得 $(y+1)(y-1) > 0$, $y > 1$ 或 $y < -1$, 即 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 是所求值域.

第二课时

1. (D). 由判别式非负, 得 $a \geq 4$, $b \geq 2$.
2. (C). 由底数大于 1, 得 $m^2 + 3m + 3 > 1$, 解得 $m > 1$ 或 $m < -2$.
3. (B). 因 $f(x) + 8$ 是奇函数, $[f(-2) + 8] + [f(2) + 8] = 0$, 结合已知, 得 $f(2) = -26$.
4. (A). 由 $x, y > 0$, 得 $4 = x + y \geq 2\sqrt{xy}$, $xy \leq 4$, $\log_2 x + \log_2 y = \log_2(xy) \leq \log_2 4$.
5. 由对数函数的单调性, 结合分类讨论, 得 $(0, 1) \cup (3, +\infty)$.
6. 由 $|x-1| \geq 0$, 得 $f(x) \geq 3^0 = 1$, 值域是 $[1, +\infty)$.
7. 当 $x \leq 1$ 时, 由 $2^{-x} = 2$, 得 $x = -1$; 当 $x > 1$ 时, 由 $\log_3 x = 2$, 得 $x = 9$.
8. 根据指数函数的图象和性质, 得 $0 < 2a - 3 < 3^{-1}$, 解此, 得 $a \in (\frac{3}{2}, \frac{5}{3})$.
9. (C). 因 $b < 0 < a < \log_2 0.7 = 1 = 1.1^0 < 1.1^{0.9}$.
10. (D). 易知 $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, 令 $t = 2x - x^2 > 0$, 则 $0 < x < 2$, 由于 $t = 2x - x^2$ 的顶点是 $(1, 1)$, 所以 $f(2x - x^2)$ 的增区间是 $[1, 2)$.
11. 由 $f(x)$ 是奇函数, 得 $a=1$, $f(x) = \frac{2^x-1}{2^x+1}$.

(1) 利用定义域可以证明 $f(x)$ 在实数集上是增函数;

(2) 由 $2^x = \frac{1+y}{1-y} > 0$, 得 $(1+y)(1-y) > 0$, 所以 $-1 < y < 1$;

(3) 由 $2^x = \frac{1+y}{1-y}$, 得原函数的反函数是

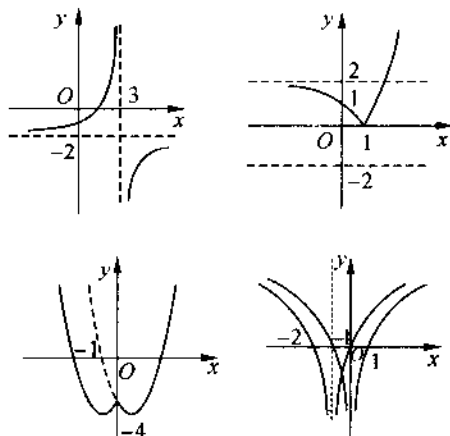
$g(x) = \log_2 \frac{1+x}{1-x}$, 原不等式化为 $\frac{1+x}{1-x} > \frac{1+x}{k} > 0$... ①, 注意到 $k > 0$, $1 \pm x > 0$, 解不等式 ①, 得 $\begin{cases} k > 1-x \\ 1 > x > -1 \end{cases}$, 当 $0 < k < 2$ 时, $1-k < x < 1$; 当 k



≥ 2 时, $-1 < x < 1$.

2.4 函数的图象

- (A). 依题意, $f(x) = \lg\left(\frac{3-x}{x+3}\right)$, 则 $f(-x) = \lg\left(\frac{3+x}{3-x}\right) = -\lg\left(\frac{3-x}{3+x}\right) = -f(x)$.
- (D). 由 $g(x) = 2^x$, 得 $g(a) \times g(b) = 16$ 为 $2^{a+b} = 16$, $a+b=4$, $f(4) = \log_2 4 = 2$.
- (C). 由直线的纵截距和对数函数的单调性可知.
- 在同一坐标系中画出 $y = \lg x$ 与 $y = 2-x$ 的图象, 可知原方程的实根个数为 1.
- 依题意 $-a^2 = -(2a+3)$, 得 $a = -1$ 或 $a = 3$, 但 $f(x) = 3x+8$ 不是奇函数, 故 $a = -1$.
- 各小题的图象依次如下:



- (A). 由复合函数单调性得函数 $y = a^x$ 为增函数, 即 $a > 1$, 当 $x \in (-\infty, 1]$ 时, $a^x < a$, 又 $2-a > 0$, 故 $1 < a < 2$.
- (D). 由特例函数 $y = 2^{x-1}$ 与 $y = 2^{1-x}$ 的图象可知.
- 函数 $f(2x+1)$ 是偶函数, 图象关于 y 轴对称, 函数 $f(2x) = f\left[2\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1\right]$, 其图象由 $f(2x+1)$ 的图象向右平移 $\frac{1}{2}$ 个单位而得, 故对称轴是 $x = \frac{1}{2}$.
- 设函数 $f(x)$ 过 (x_0, y_0) , 则 $y_0 = f(x_0) = f[a - (a - x_0)] = -f[a + (a - x_0)] = -f(2a - x_0)$, 即函数必过点 $(2a - x_0, -y_0)$, 点 (x_0, y_0) 与点 $(2a - x_0, -y_0)$ 关于点 $(a, 0)$ 成中心对称, 故函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(a, 0)$ 成中心对称图形.

2.5 抽象函数

- (B). 利用函数的奇偶性和单调性, 作出简图可得.
- (A). 由题意作出简图可知 x 与 $f(x)$ 在 $(-2, 0)$ 与 $(0, 2)$ 上是异号的.
- 令 $x=1, y=2$, 得 $f(1) + f(2) = f(2)$, 即 $f(1) = 0$, 而 $f(4) = f(2 \times 2) = f(2) + f(2) = 1 + 1 = 2$.
- $y = \lg x$ (答案不惟一) 对任意 $0 < x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 得 $f(x)$ 为增函数, 又 $f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 x_2)$, 满足对数函数的形式.
- 由题意可知 $f(x) = f(x+5)$, 且 $f(-x) = -f(x)$, 得 $f(4) + f(5) = f(-1+5) + f(0+5) = f(-1) + f(0) = -(-2007) + 0 = 2007$.
- 由 $x \in [0, 1]$, 知 $2^x \in [1, 2]$, 所以由 $\lg x \in [1, 2]$, 得 $x \in [10, 100]$ 为所求定义域.
- (1) 令 $x=y=0$, 得 $f(0) = 0 \cdot f(0) + 0 \cdot f(x)$, 即 $f(0) = 0$. 取 $x=y=1$, 得 $f(1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$, $f(1) = 0$. 所以 $f(0) = 1, f(1) = 0$.
(2) 由 $f(1) = f((-1)(-1)) = -f(-1) + (-1)f(-1) = 0$, 知 $f(-1) = 0$, 在已知等式中, 取 $y = -1$, 可得 $f(-x) = -f(x)$, $f(x)$ 是奇函数.
- (B). 由题意 $f(x) = f(x+2008)$, 令 $1004+x=t$, 即 $x=t-1004$, 则有 $f(t) = f(1004-t+1004) = f(2008-t) = f(-t)$, 所以为偶函数.
- 单调递增. 由函数的单调性与周期性可求得.
- $t > 0, x+t > x$ 和 $f(x+t) < f(x)$, 知 $f(x)$ 是减函数, 由 $f(1-a) < f(a^2-1)$ 和 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$, 得 $\begin{cases} 1-a > a^2-1 \\ -1 < 1-a < 1, \text{解得 } 0 < a < 1. \\ -1 < a^2 < 1 \end{cases}$

2.6 函数与方程

- (A). 令 $x^2 - 4x + 3 = 0$, 解得 $x = 1$ 或 3 .
- (B). 由 $f(0) = 3 > 0, f(1) = -e < 0$ 即得.
- (B). 作出 $y = 2^{-x}$ 和 $y = \ln x$ 的图象有 1 个交点, 知原方程有 1 个实根.
- (B). 若 a 是奇函数 $f(x)$ 的零点, 则 $-a$ 也是其零点, 并且 $f(0) = 0$, 于是得 (B).
- $x^3 + 3x = x(x^2 + 3) = 0$ 有惟一的实数解是 $x = 0$.
- 当原函数有 1 个零点时, $x^2 - ax + 1 = 0$ 有惟一的实根, 故由 $\Delta = a^2 - 4 = 0$, 解得 $a = \pm 2$; 当原函数有 2 个零点时, $x^2 - ax + 1 = 0$ 有两个不等的实根, 故 $\Delta = a^2 - 4 > 0$, 解得 $a < -2$ 或 $a > 2$.

