南京邮电大学《高等数学》教研室　编写

高等数学

（上册）

清华大学出版社

高等数学

（上册）

南京邮电大学《高等数学》教研室　编写

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书为理工科通用的《高等数学》上册，包括极限与连续、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分及应用、多元函数微分学及其应用等．本教材将复变量微积分与实变量微积分教学结合，突出思想、方法，节省课时；内容深浅适宜，注意与中学数学的衔接；保持工科特色；例题结合内容，注重层次、典型，例题与习题适当加强应用；为便于读者复习和系统掌握，每章结尾配备本章小节，列出教学基本要求和内容提要，并配备了总习题．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．上册/南京邮电大学《高等数学》教研室编写．—北京：清华大学出版社，2006.8

ISBN 7-302-12932-0

Ⅰ．高…　Ⅱ．南…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 039852 号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦

http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084

社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969

责任编辑：丁　岭

印 刷 者：北京密云胶印厂

装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂

发 行 者：新华书店总店北京发行所

开　　本：185×230　**印张**：17.25　**字数**：421 千字

版　　次：2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 1 次印刷

书　　号：ISBN 7-302-12932-0/O·530

印　　数：1～6000

定　　价：23.00 元

前言

FOREWORD

本书是由从事高等数学教学多年的教师，按照原国家教委工科数学教学指导委员会颁布的“高等数学课程教学基本要求”，在我校原数学教研室1997年编写的校内教材(杨应弼、邱中华、赵洪牛执笔)的基础上，结合长期教学实践和近年来高等学校逐步进入大众化教育的现状编写而成．本书注意将数学素质的培养融合在教学内容中，突出微积分的基本思想和方法．在内容上力求适用、简明、易懂；在例题的选择上力求具有层次性、全面、典型，为了便于读者复习，每章后面都配备了小结，列出教学基本要求和内容提要，并配备了总习题．

本书上册各章分别由王晓平、张爱华、邱中华、赵洪牛撰写，最后由邱中华统一整理编写完成．

本书经刘颖范教授、李雷教授审阅，在两届学生的试用过程中，王健明、欧阳金丽、宋洪雪、严珍珍等老师对本书提出了不少修改意见，南京邮电大学教务处、数理学院对本书编写给予了很大的支持，在此表示衷心的感谢．

限于编者水平，书中仍有诸多不足甚至错误，恳请使用者批评指正．

编　者

2006年6月

目录

CONTENTS

第1章 极限与连续

初等数学的研究对象基本上是不变的量，高等数学则以变量为研究对象. 所谓函数关系就是变量之间的关系，极限方法是研究变量的一种基本方法，它是微积分学的基础. 本章介绍集合、变量、函数等基本概念，以及极限和函数连续的概念和它们的一些性质.

预备知识

1. 集合

集合是现代数学中最基本的概念之一，研究任何对象都不可避免地用到集合. 例如：所有自然数的集合；一个教室内所有学生的集合等.

一般地，把具有某种性质的对象的全体称为**集合**，简称集，其中的对象称为集合的元素. 通常用大写字母 $A,B,C,M\cdots$ 等表示集合，而用小写字母 $a,b,c,x\cdots$ 等表示集合的元素.

若 a 是集合 A 的元素，则记做 $a\in A$（读做 a 属于 A）；若 a 不是集合 A 的元素，则记做 $a\notin A$（读做 a 不属于 A）. 不含任何元素的集合，称为空集，记做 $\varnothing$. 含有限个元素的集合称为有限集；既不是**有限集**，又不是空集的集合称为**无限集**.

表示集合的方法有两种：一种是列举法，就是把它的所有元素一一列出来，写在一个花括号内. 例如，方程 $x^2-1=0$ 的解集可以表示为 $S=\{-1,1\}$. 另一种方法是描述集合中的元素所具有的确定性质. 将具有性质 $P(x)$ 的对象 x 所构成的集合表示 $M=\{x|x$ 具有性质 $P(x)\}$. 例如，方程 $x^2-1=0$ 的解集也可以表示为 $S=\{x|x^2-1=0,x\in R\}$.

今后用$\mathbb{N}$表示自然数集，用$\mathbb{Z}$表示整数集，用$\mathbb{Q}$表示有理数集，用$\mathbb{R}$表示实数集.

设 A、B 是两个集合，若集合 A 的每个元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记做 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$ 读做“A 含于 B”或“B 包含 A”. 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记做 $A=B$. 若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称集合 A 为集合 B 的真子集，记做 $A\subset B$.

对任何集合 A，规定$\varnothing\subseteq A$；显然 $A\subseteq A$，$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

集合的基本运算有三种：并、交、差.

设 A,B 是两个集合，由属于 A 或属于 B 的元素所构成的集合称为 A 与 B 的并集合（简称并），记做 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

由同时属于 A 和 B 的元素所构成的集合称为 A 与 B 的交集合（简称交），记做 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.

由属于 A 而不属于 B 的元素所构成的集合称为 A 与 B 的差集合（简称差），记做 $A\backslash B$，即 $A\backslash B=\{x\mid x\in A$ 但 $x\notin B\}$. 如图 1.1 所示.

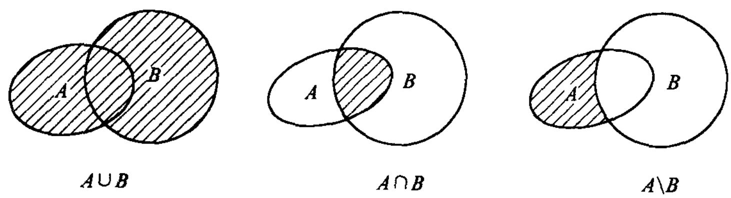

图 1.1

两个集合的并、交、差可以用图形直观表示（上图中的阴影部分）.

通常所讨论的问题是在一个大的集合 Ω（常称为全集）中进行，所研究的集合 A 都是 Ω 的子集，此时称 $\Omega\backslash A$ 为集合 A 的补集，记做 A^c.

2. 区间与邻域

本书中用得较多的是数集. 最常用的数集是区间，它包括以下几种：

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\} \tag{1}$$

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\} \tag{2}$$

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\} \tag{3}$$

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\} \tag{4}$$

$$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\} \tag{5}$$

$$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\} \tag{6}$$

$$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\} \tag{7}$$

$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\} \tag{8}$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<\infty\} \tag{9}$$

其中 a,b 是给定实数，$a<b$，$+\infty$，$-\infty$ 是两个记号（不是数！），分别读做正无穷大与负无穷大. 称区间(1)为闭区间，区间(2)为开区间，(3)为左闭右开区间，(4)为左开右闭区间. 称区间(5)，(6)，(7)，(8)，(9)为无限区间.

这些区间也可以用数轴表示（如图 1.2 所示）.

邻域也是一个经常用到的概念. 以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的**邻域**，记做 $U(a)$.

设 δ 是任一正数，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域，这个邻域称为点 a 的 δ 邻

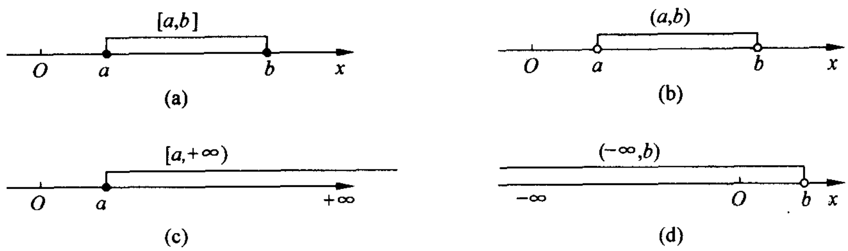

图 1.2

域，记做 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径（如图 1.3 所示）.

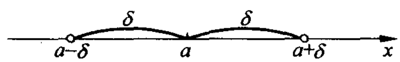

图 1.3

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心 δ 邻域，记做 $U^{\circ}(a,\delta)$，即

$$U^{\circ}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

这里 $0<|x-a|$ 表示点 $x\neq a$，即点 a 不含在邻域内.

3. 常用逻辑符号

下面介绍一些逻辑符号，是本课程学习中常用的.

设 P 与 Q 是两个命题，规定：

$P\Rightarrow Q$ 表示命题"若 P 则 Q"，或"P 是 Q 的充分条件"，或"Q 是 P 的必要条件"；

$P\Leftrightarrow Q$ 表示命题"P 当且仅当 Q"，或"P 等价于 Q"，或"P 的充要条件是 Q"；

$\forall$：表示"对任给的"，"对所有的".

例如用"$\forall x\in A$，P"表示："对集合 A 中的所有元素 x，都具有性质 P".

$\exists$：表示"存在"，"有".

例如用"$\exists x\in A, P$"表示："对集合 A 中存在一个元素 x，具有性质 P".

借助于逻辑符号，可将一些数学命题表达得非常简洁. 因此熟悉逻辑符号的用法，对于本课程的学习非常重要.

4. 常用不等式

(1) 三角不等式：对 $\forall x,y\in R$，都有 $|x+y|\leqslant|x|+|y|$.

利用三角形边与边关系证明.

(2) 算术平均值与几何平均值不等式：对 $\forall x,y\in R^{+}$，都有 $\sqrt{xy}\leqslant\dfrac{x+y}{2}$.

利用$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\geqslant 0$证明.

推广：对$\forall x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\in R^+$，都有$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.

等式只当$x_1=x_2=\cdots=x_n$时成立.

(3) 柯西(Cauchy)不等式：对$\forall x_1,x_2,y_1,y_2\in R$，$x_1y_1+x_2y_2\leqslant\sqrt{x_1^2+x_2^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2}$.

利用向量不等式$|\alpha\beta|\leqslant|\alpha\|\beta|$证明.

推广：对$\forall x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n\in R$，都有

$$(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)^2\leqslant(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\cdot(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2).$$

等式只当$\dfrac{x_1}{y_1}=\dfrac{x_2}{y_2}=\cdots=\dfrac{x_n}{y_n}$时成立.

5. 极坐标表示

在中学我们学习了平面直角坐标系，在本课程中我们还要用到平面上另外一种坐标表示的形式，这就是极坐标. 在直角坐标系中，平面上的任何点可以由坐标(x,y)表示，现在我们也可以利用有序数偶(r,θ)来表示平面上的任一点P，其中$r(r\geqslant 0)$是该点到坐标原点的距离；而$\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$则表示该点与原点的连线与$x$轴正向的夹角(如图1.4所示)，可以看出这里的$(r,\theta)$与平面上的点具有一一对应关系，这种利用数偶$(r,\theta)$表示平面上点的方法，称为极坐标表示法. 下面我们看一下极坐标表示中的坐标(r,θ)与直角坐标表示中的坐标(x,y)的关系，由图1.4有

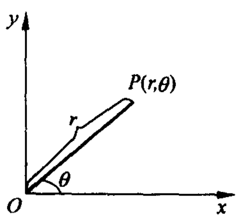

图 1.4

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2}\\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}\end{cases}$$

利用上面的关系式，我们可以将同一曲线在不同的坐标下表示出来，如圆$x^2+y^2=a^2$在极坐标表示下的方程就是$r=a$；而极坐标表示下的方程$r=2a\sin\theta$就是圆$x^2+y^2=2ay$，再如双扭线$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$的极坐标表示下的方程就是$r^2=a^2\cos2\theta$(如图1.5所示)，而心形线$r=a(1-\cos\theta)$的图形则如图1.6所示.

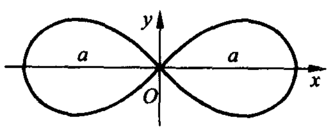

图 1.5

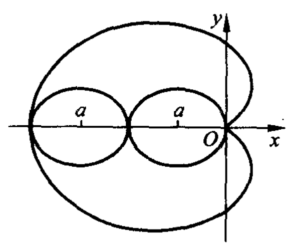

图 1.6

1.1 函数

1.1.1 函数概念

1. 函数的定义

定义 1.1.1 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集．如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记做 $y=f(x)$，$x\in D$．数集 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量．

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记做 $f(x_0)$．当 x 遍取 D 的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集

$$W=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数的值域．

函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可改写其他字母，例如"φ"，"F"等．这时函数就记做 $y=\varphi(x)$，$y=F(x)$，等等．

注意 (1) 函数的两要素：定义域和对应法则，两个函数相等当且仅当它们的定义域与对应法则分别相同．

(2) 在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的．对于用数学式子给出的函数，函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的所有实数值．

(3) 多值函数与单值函数．如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值总是只有一个，这种函数叫做单值函数，否则叫做多值函数．

(4) 函数 $y=f(x)$ 的图形可看做平面上的点集 $C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$（如图 1.7 所示）．

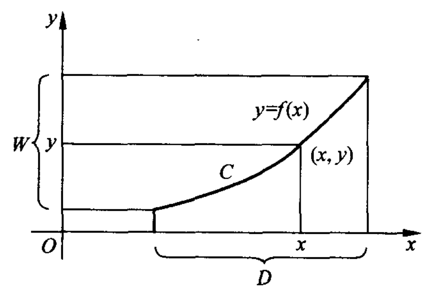

图 1.7

2. 分段表示的函数

函数的对应法则 f 是因变量 y 与自变量 x 的函数关系的具体表现，值得注意的是，在函数定义中，并不要求在整个定义域上只能用一个表达式来表示对应法则．我们把在不同的定义域上用不同的表达式来表示对应法则的函数称为**分段表示的函数**，简称**分段函数**．例如，在电子技术中的三角波、方波、半波整流都是用分段函数表示的函数．

(1) 三角波在一个波形的表达式为：$u=u(t)=\begin{cases} t & 0\leqslant t\leqslant 1 \\ 2-t & 1<t\leqslant 2 \end{cases}$

(2) 方波在一个波形的表达式为：$u=u(t)=\begin{cases} 1 & -T/4\leqslant t\leqslant T/4 \\ -1 & T/4<t\leqslant 3T/4 \end{cases}$

(3) 半波整流在一个波形的表达式为：$i=i(t)=\begin{cases} I_0\sin\omega t & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{\pi}{\omega} \\ 0 & \dfrac{\pi}{\omega}<t\leqslant \dfrac{2\pi}{\omega} \end{cases}$

它们的图形如图 1.8 所示.

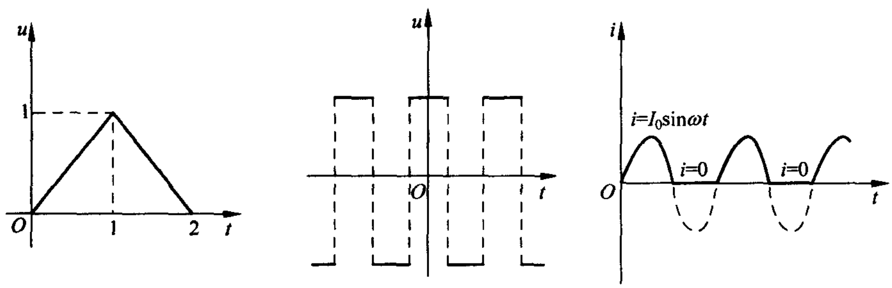

图 1.8

注意 分段函数是一个整体，不是几个函数. 分段函数的图形应分段作出. 求函数值 $f(x_0)$ 要先判断 x_0 所在的范围，再用对应的法则求函数值.

例 1 已知分段函数

$$y=f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x} & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 1+x & x>1 \end{cases}$$

求函数值 $f(0)$，$f(2)$，并画出函数的图形.

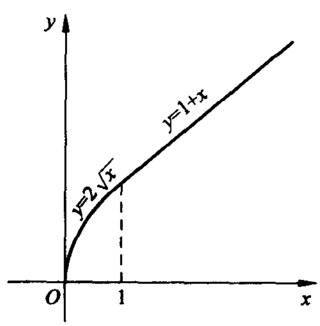

图 1.9

解 ∵ $0\in[0,1]$， ∴ $f(0)=2\sqrt{0}=0$；

又∵ $2\in(1,+\infty)$， ∴ $f(2)=1+2=3$

函数的图形如图 1.9 所示.

下面介绍一些重要的分段函数.

(1) 绝对值函数：$y=|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$

(2) 符号函数：$y=\mathrm{sgn}x=\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$