广义周期时变系统

●苏晓明 张庆灵 著

科学出版社
www.sciencep.com

广义周期时变系统

苏晓明　张庆灵　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书以广义线性周期系统为研究对象，系统介绍作者近年来的最新研究成果及其应用. 主要内容包括：广义周期系统的工程背景，线性系统理论及数学基础知识；广义周期系统的基本特征，包括脉冲能控性、渐近稳定性、R 能观性、R 能控性和允许性等；广义周期 Lyapunov 方程、广义周期 Riccati 方程和广义 Lyapunov 不等式，并用其讨论了广义周期系统的强渐近稳定性、能稳定性和二次允许性；基于状态反馈的 H_∞ 控制；利用几何方法研究了广义离散周期系统的因果能控和鲁棒因果能控问题；采用分散控制技术介绍了等价系统法，研究了广义离散周期系统若干等价性；在此基础上又进一步讨论了与之相关的广义区间系统的正则性、允许性和一般动态系统的无穷远能控性、无穷远能观性以及在网络控制方面的应用.

本书可作为控制理论与控制工程、系统工程、应用数学以及与之相关的工程与应用专业的硕士、博士研究生的教材或参考用书，也可供从事相关专业教学和科研工作的人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

广义周期时变系统/苏晓明，张庆灵著. —北京：科学出版社，2006

ISBN 7-03-016647-7

Ⅰ. 广… Ⅱ. ①苏… ②张… Ⅲ. 时变系统 Ⅳ. O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 152257 号

责任编辑：鄢德平 陈玉琢 / 责任校对：赵桂芬
责任印制：钱玉芬 / 封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2006年1月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2006年1月第一次印刷 印张：8 3/4
印数：1—2 500 字数：158 000

定价：28.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉）

前　言

自 20 世纪 70 年代, D. G. Luenberger 等人先后在经济系统、电力系统、化工过程等领域发现并提出广义系统以来, 理论研究和实际应用发展很快, 已经成为一类具有比较完备系统理论和广泛应用背景的研究领域. 随着研究的不断深入和实际问题的需要, 人们的研究从传统的广义定常系统转移到广义时变系统上, 这一成果被称之为现代控制理论的伟大成就之一. 由于广义时变系统的研究难度较大, 因此研究进展缓慢, 仅在结构分析方面取得了一些成果. 进入20世纪90年代, 受航空、航天、网络控制、受限机器人等领域飞速发展的推动, 这类系统中的广义周期系统倍受国内外众多学者的关注, 特别是近十年来对广义线性周期系统的结构分析及其相关控制问题进行了深入的研究, 取得了很多有价值的重要成果, 并将其成果应用于实际工作中.

本书以广义线性周期系统为研究对象, 参照国内外广义周期系统的研究现状, 主要介绍了作者近年来的最新研究成果及其应用. 全书共分 12 章, 主要内容包括: 广义周期系统的工程背景, 线性系统理论及数学基础知识; 广义周期系统的基本特征, 包括脉冲能控性、渐近稳定性、R 能观性、R 能控性和允许性等; 广义周期 Lyapunov 方程、Riccati 方程和广义 Lyapunov 不等式, 并用其讨论了广义周期系统的强渐近稳定性、能稳定性和二次允许性; 基于状态反馈的 H_∞控制; 利用几何方法研究了广义离散周期系统的因果能控和鲁棒因果能控问题; 采用分散控制技术介绍了等价系统法, 研究了广义离散周期系统若干等价性; 在此基础上又进一步讨论了与之相关的广义区间系统的正则性、允许性和一般动态系统的无穷远能控性、无穷远能观性以及在网络控制方面的应用.

本书是一本系统、全面地介绍广义周期系统的各类基本问题的专业性著作, 可作为控制理论与控制工程、系统工程、应用数学以及与之相关的工程与应用专业的硕士、博士研究生的教材或参考用书, 也可供从事相关专业教学和科研工作的人员参考.

本书在编写过程中得到了中科院院士黄琳教授和东北大学赵军教授的悉心指导, 他们对全书的各章节进行了认真的评阅和指点, 提出了许多宝贵的意见和

建议, 在此表示衷心的感谢. 本书的第 10 章由邱战芝完成, 沈阳工业大学研究生王刚对全书内容的整理和校对做了许多工作. 此外本书在完成过程中还参考了 "Singular Control Systems" (Dai L 著)、《广义系统》(杨冬梅, 张庆灵编著)等近年来的研究著作, 还得到了沈阳工业大学和东北大学博士后基金的资金资助. 在此一并表示感谢.

由于作者学识与研究水平有限, 加之时间仓促, 书中难免有许多不妥之处, 恳请读者批评指正.

作 者

2005 年 10 月 10 日

目　　录

第1章　绪　　论

1.1　广义系统模型

随着现代控制理论研究的不断深入，以及向其他学科诸如航空、航天、机械、能源、网络、电力、石油、化工和通讯等应用领域的渗透，人们发现了一类更具广泛形式的动力系统，这就是广义系统. 广义系统与我们通常所讨论的正常系统形式相似，一般由如下形式的微分方程来述：

$$\begin{aligned} E(x,t)\dot{x} &= f(x,u,t) \\ y &= g(x,u,t) \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

其中 x,u,t 依次表示状态向量、输入向量和时间变量，$f(x,u,t)$，$g(x,u,t)$ 分别表示 x,u,t 的 n 维和 p 维向量函数. $E(x,t)\in\mathbf{R}^{n\times n}$，当 $\operatorname{rank}(E)=n$ 时，式(1.1.1)表示一个连续的正常系统；当 $\operatorname{rank}(E)=r<n$ 时，式(1.1.1)表示一个连续的广义系统(当 $f(x,u,t)$ 为非线性函数时，式(1.1.1)表示一个非线性广义系统；当 $f(x,u,t)$ 为线性函数时，式(1.1.1)表示一个线性广义系统). 则线性时不变广义系统可以表示为

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t)+Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

其中 x,u,y 分别为 n 维状态向量、m 维输入向量和 p 维输出向量，E,A,B,C 分别为具有适当维数的定常实矩阵. 对于广义系统(1.1.2)，若存在常数 s_0 使得 $\det(s_0E-A)\neq 0$，则称系统是正则的；若 $\det(sE-A)=0$ 的所有有限零点都具有负实部，则称系统是稳定的；若 $\deg\det(sE-A)=r$，则称系统是无脉冲的；若 $\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} sE-A & B\end{bmatrix}\right)=n$ 且 $\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} E & B\end{bmatrix}\right)=n$，则称系统是完全能控的. 广义系统(1.1.2)是允许的充要条件是系统正则、稳定、无脉冲. 当广义系统(1.1.2)正则时，对于给定的允许初态，系统的解存在且唯一. 相应地，定义在无穷区间上的广义离散系统表示为

$$\begin{aligned} Ex(t+1) &= Ax(t)+Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad t=0,1,\cdots \tag{1.1.3}$$

其中 $x(t),u(t),y(t)$ 依次为 t 时刻的 n 维状态向量、m 维为输入向量和 p 维输出向量.

1.2 广义系统与正常系统的联系和区别

广义系统与正常系统相互对应，既存在内在的联系又有着本质的区别.

广义系统与正常系统的联系在于：如果上述各式中的 E 非奇异，则广义系统成为一个正常系统，因此，如果从矩阵 E 的广泛取值的意义来考虑，广义系统是对正常系统的推广. 由于正常系统理论的研究基本成熟，已形成一套较为完善的理论体系，所以，为了与之区别，习惯上以 E 为奇异矩阵作为广义系统的明显标志，从而使广义系统理论成为一个独立的研究分支.

除上述矩阵 E 的明显差异之外，广义系统与正常系统还存在许多本质的区别. 例如，考虑线性时不变的情形，广义系统与正常系统的区别主要体现在以下六个方面：

(1) 广义系统(1.1.2)的解中通常不仅含有正常系统所具有的指数解(对应于有穷极点)，而且还含有正常系统解中所不出现的脉冲解和静态解(对应于无穷远极点)，以及输入的导数项. 在离散时间情况下，求解广义系统(1.1.3)不仅需要 t 时刻以前的信息，还需要 t 时刻以后的信息，即离散广义系统不再具有传统的因果性.

(2) 正常系统的动态阶为 n (等于系统的维数)，而广义系统的动态阶仅为 $r(=\mathrm{rank}(E))$.

(3) 正常系统的传递函数矩阵为真有理分式矩阵，而广义系统的传递函数矩阵通常包含次数大于 1 的多项式矩阵.

(4) 正常系统的齐次初值问题的解存在且唯一. 但对于广义系统，齐次初值问题可能是不相容的，即可能不存在解；即使有解，也不一定唯一.

(5) 广义系统具有层次性，一层为对象的动态特性(由微分或差分方程描述)，另一层为管理特征的静态特性(由代数方程描述)，而正常系统没有静态特性.

(6) 广义系统的极点，除了具有 $r(=\deg\det(sE-A))$ 个有穷极点外，还有正常系统不具有的 $n-q$ 个无穷远极点，在这些无穷极点中又分为动态无穷极点和静态无穷极点.

通过以上比较可知，在系统结构参数扰动下，广义系统通常不再具有结构稳定性. 广义系统在结构上变得复杂而富于新颖性，在研究上变得困难而富于挑战性，因此吸引了国内外许多学者的极大兴趣，并取得了丰富的研究成果.

1.3 广义系统的实际应用

广义系统除了具有学术价值外，还具有极大的应用价值. 发掘广义系统的实际应用背景，将广义系统理论用于解决工程实际问题，从而实现广义系统的应用，才能真正体现广义系统的价值. 下面将举例说明.

例 1.3.1 Hopfield 神经网络模型的输入包括两部分，其一是模型的外部输入，其二是神经元输出信号的加权和. 模型可表示为

$$\begin{bmatrix} cI & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\dot{x}=\begin{bmatrix} -gI & 0 & 0 & -W_1 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & -W_2 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 0 \\ -g(x_1) \\ -i_B \\ -f(x_3) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}v \tag{1.3.1a}$$

$$y=[0,\ I,\ 0,\ 0]x, \quad x^{\mathrm{T}}=\left[x_1^{\mathrm{T}},\ x_2^{\mathrm{T}},\ x_3^{\mathrm{T}},\ x_4^{\mathrm{T}}\right] \tag{1.3.1b}$$

其中 W_1, W_2 是两个加权矩阵， $f(x_3), g(x_1)$ 是非线性函数. 这是一个非线性广义系统模型.

例 1.3.2 人们熟知的 Leontief 动态投入产出模型表示为

$$x(t)=Ax(t)+B\left[x(t+1)-x(t)\right]+w(t)+d(t) \tag{1.3.2}$$

其中 A 为消耗系数矩阵，B 为投资系数矩阵，它们均具有适当的维数. $x(t)$ 为 t 时刻的产量， $d(t)+w(t)$ 为 t 时刻的最终产品量，而 $d(t)$ 为确定性的，被称为计划中的最终消费， $w(t)$ 为市场波动对消费的影响. 在多部门的经济系统中，当各部门之间不存在投资时，在矩阵 B 中对应的行为零，从而可知 B 不满秩. 则系统(1.1.4)表示的是不确定线性时不变离散广义系统.

例 1.3.3 神经网络系统

$$\dot{x}_i=a_i(x_i)\left(b_i(x_i)-\sum_{k=1}^{L}w_{ik}\frac{d_i(k)}{s(x_i)}\prod_{j=I_k}y_j^{d_j(k)}\right) \tag{1.3.3a}$$

$$0=a_L(x_L)\left(b_L(x_L)-\sum_{k=1}^{L}w_{lk}\frac{d_L(k)}{s(x_L)}\prod_{j=I_k}y_j^{d_j(k)}\right) \tag{1.3.3b}$$

其中 x_i， z_L 为第 i 个神经元的状态, $i=1,2,\cdots,n$ ， a_i 对应神经细胞相关生存期标度，b_i 对应接受力和时间延迟，也可能包括细胞的自我反馈， s 为神经元的输入，w_{ik} 为网络的连接权， $\{I_1,\cdots,I_L\}$ 为 $\{1,2,\cdots,m+n\}$ 的 L 个无序子集. 此例是典型的广义大

系统.

近 30 年来, 随着人们对控制理论研究的深入, 使得人们有可能对应用领域进行更深入的研究. 相反这种研究又能促进控制理论的发展, 从而提出了新的问题, 新的方法和新的系统. 一些学者致力于研究非正常系统, 实现了控制理论的一次革命, 即人们的研究从传统的定常控制器转到了时变的动态控制器上, 这一成果被称之为现代控制理论的最伟大成就之一.

非定常系统是指系统中的各类矩阵是非定常矩阵, 它的提出来源于实际. 1979 年 Schrage D P 和 Peters D A 提出了直升机传动系统的振动衰减问题.

例 1.3.4　直升飞机传动系统的振动衰减问题.

直升飞机的传动系统是由复杂的齿轮组成, 它的振动是典型的周期振动问题, 其振动衰减研究是非常有意义的. 振动的衰减可通过主动控制方法来解决. 这一问题可由下述线性周期系统模型来描述:

$$\begin{bmatrix} M & O \\ O & K(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} D & K(t) \\ -K(t) & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} f \\ O \end{bmatrix}u \tag{1.3.4a}$$

$$y=\begin{bmatrix} O & O \\ O & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}u \tag{1.3.4b}$$

其中 $K(\cdot)$ 表示系统的刚度矩阵, 具有周期性; D 表示系统的阻尼矩阵; M 表示系统的质量矩阵; f 表示系统施加的主动力矩阵; d_i 表示对系统的干扰; $u(\cdot)$ 表示主动施加力; $x(\cdot)$ 表示系统的状态变量; $y(\cdot)$ 表示测量系统的位移.

1976 年 Sticher 又提出了卫星姿态控制问题.

例 1.3.5　卫星姿态控制问题.

利用位于卫星上传感器的三维磁力计测量地球磁场的相互作用原理, 卫星绕地球轨道运动的姿态稳定性常常通过磁转矩来实现. 由于沿飞机所在位置的轨道地球场磁力的相互作用产生了周期性, 因此这类问题在数学领域的适当模型为周期模型, 即

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t)+B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

例 1.3.6　电子设备中常用的正弦波信号源控制问题.

一个电子设备(电视机, 感应信号发生器等)中常用的正弦波信号源, 是由延迟器件、乘法器件和加法器件组成, 其振荡频率取决于乘法因子. 当系统输入 u(t) 有一个扰动, 就可导致系统振荡, 振荡的周期为 $2\pi/\omega$, 其信号流程图如图 1.3.1 所示. 该问题可用下述周期系统来描述:

$$
\begin{aligned}
Ex(t+1) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\
y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)
\end{aligned} \tag{1.3.6}
$$

其中

$$
A(t) = \begin{bmatrix} 2\cos(\omega t) & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
C(t) = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -1 \end{bmatrix}, \qquad D(t) = 1
$$

$$
E = \mathrm{diag}(e_1,\ e_2), \qquad e_i = \begin{cases} 1, & \text{系统有因果性}, \\ 0, & \text{系统无因果性}, \end{cases} \quad i = 1, 2
$$

这些实例从不同侧面反映了周期系统的稳定性分析和控制问题的研究是非常重要的实际研究课题之一.

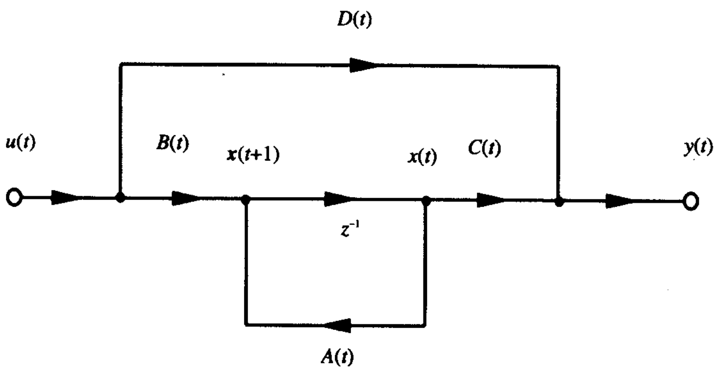

图 1.3.1 电子设备信号流程图

区间系统是一类不确定系统, 系统矩阵元素的取值通常限制在已知给定的区间内. 正是由于这一特点, 使得这类系统广泛地应用于机械工业、电子网络等领域. 由于电子网络中存在着脉冲性, 因而 Hosoe 等人于 1987 年提出了用广义区间系统来描述一类特定的实际电子网络系统.

例 1.3.7 电子网络模型为

$$
\left[E^m, E^M\right]\dot{x}(t) = [A^m, A^M]x(t) + Bu \tag{1.3.7a}
$$

$$
[E^m, E^M] = \{E = \mathrm{diag}(L_1, L_2, L_3, 0) \mid \underline{L} \leqslant L_i \leqslant \overline{L} \mid i = 1,2,3\} \tag{1.3.7b}
$$

$$[A^m, A^M] = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & -r & r & a_{44} \end{bmatrix} \middle| -1 \leqslant a_{ij} \leqslant 1 \right\} \tag{1.3.7c}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{N_1}{N} \\ \frac{N_2}{N} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$$

其中 $x_i(t)$，$i=1,2,3$ 表示通过相应电感器的电流，L_i 表示第 i 个电感器的感抗，$x_4(t)$ 表示流经电阻 r 的电阻器时的电压降，N_i/N，$i=1,2$ 表示互感器的系数. 这是一个典型的广义区间系统.

广义线性系统 $E\dot{x}=Ax+Bu$ 具有广泛的应用背景，随着科技的发展，它的应用领域越来越广，已遍及经济管理、航空航天、工业生产和电子网络等诸多领域，成为经济管理模型和物理模型的主要代表. 但是随着信息时代的到来，一些领域显然不能简单地用广义系统来描述. 如火车减振系统，这就需要用广义二阶系统来描述.

例 1.3.8　火车减振系统控制问题.

为了消除不需要的振动，常常在振动系统中设置减振器如图 1.3.2 所示.

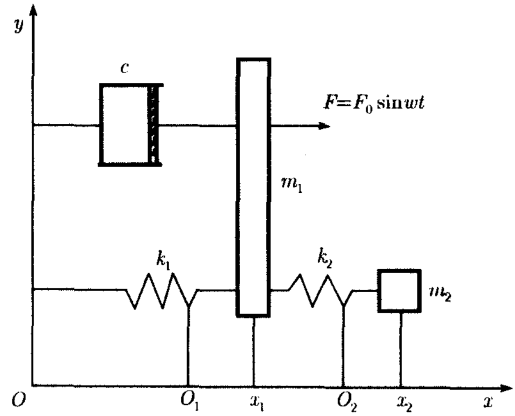

图 1.3.2　火车减振器结

其中 m_1 是原机械部件的质量，m_2 是减振器的质量，k_1 和 k_2 是两个弹簧，它们的弹

性系数也分别用 k_1 和 k_2 来表示，c 是减振器的阻尼系数，F 是强迫力，x_1 和 x_2 分别表示 m_1 和 m_2 距它们平衡位置的位移，因此上述运动系统满足

$$(T_0P^2+T_1P+T_2)x=Bu \tag{1.3.8}$$

其中

$$T_0=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix},\qquad T_1=\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$T_2=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

上面这些例子，分别从航空航天、机械工业、信息工程和电子网络等几方面说明了广义周期系统、广义区间系统和一般动态系统的实际应用背景.

1.4 广义系统研究现状及主要成果

1.4.1 广义定常系统的研究概述

广义系统的研究是从 20 世纪 70 年代开始的，迄今已有 20 余年的历史，其基本框架已经建立. 下面就广义系统的几类研究问题做一回顾.

广义系统的能控性和能观性. 由于广义系统是一种与正常系统形式相似但比之更具有普遍意义的系统，所以很自然地采用正常系统中的方法对广义系统进行研究. 与正常系统相仿，在复数域 **C** 上，广义系统的能控性得到了比较彻底的研究. Verghese G 等人在 1981 年前后发表的几篇论文中详细讨论了广义系统的可解性，提出了脉冲能控的概念，并给出了脉冲能控的条件. 与之同时，基于复数域 **C** 上的广义系统的特征子空间被构造出来，它们从几何角度刻画了广义系统，尤其是它的脉冲能控的性质. 至此，系统的完全能控(完全能观)、脉冲能控(脉冲能观)等各种能控性和能观性问题的研究框架已经基本建立起来. 在此基础上 Lin C 在 2001 年研究了不确定广义系统的鲁棒完全能控和完全能观性. 但是人们发现，脉冲的概念还是很难理解，而且难于处理. 为此张国峰成功地引入了投影空间 G_{12}，基于 G_{12} 上的广义系统的特征结构，构造了几种特征子空间，并给出了广义系统完全能控和完全能观的充要条件，而且还从特征子空间的角度对广义系统是否存在脉冲做了解释.

稳定性问题是各种控制系统都要面对的一个首要问题. 无论是一般系统，还是广义系统，对其施加控制的第一目标就是使其稳定. 一个不稳定的系统一般来说是没有实用价值的. 1868 年，英国人 J. C. Maxwell 发表的《论调速器》一文是

有关控制理论的最早期论文, 而该文的内容就是关于离心调速系统的稳定性分析的. 20 年后, 即 1892 年, 俄国著名学者 Lyapunov 在其所完成的具有深远影响和划时代意义的博士论文《运动稳定性的一般问题》中, 更是对稳定性问题进行了深入的研究, 建立了迄今仍起着主导作用的稳定性理论的框架. 由著名的 Lyapunov 理论可知, 系统的稳定性与 Lyapunov 方程之间有一种对应关系. 通过对 Lyapunov 方程和不等式的讨论来实现对控制系统的稳定性分析与综合, 这是处理系统稳定性问题的又一重要方法, 该方法尤其适合于解决理论问题. 由于 Lypunov 方程本身的重要性, 其成为控制理论界的一个经久不衰的研究主题, 时至今日它仍是一个热门研究方向. 因此 Lyapunov 方法是研究系统稳定性的主要方法之一. 尤其是近几年, 利用 Lyapunov 方法来研究稳定性是一个热门课题. 由于对定常系统稳定性的研究已趋于完善, 人们将目光放在广义系统上来. 近几年人们通过对广义系统的稳定性研究而得到的 Lyapunov 方程和不等式就有十几种, 其中著名的 Lyapunov 方程和 Lyapunov 不等式如下:

(1) Masubuchi(1997) 给出广义 Lyapunov 不等式

$$\begin{cases} V^{\mathrm{T}}A + A^{\mathrm{T}}V < 0 \\ E^{\mathrm{T}}V = V^{\mathrm{T}}E \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.4.1}$$

并得出了下面著名的结论: 广义系统(1.1.2)正则、稳定、无脉冲充要条件是广义 Lyapunov 不等式有解.

正是由于有了广义 Lyapunov 不等式, 使得人们研究广义系统的 H_∞ 控制、H_2 控制等问题成为可能.

(2) 张庆灵(1997)给出了 Lyapunov 方程

$$\begin{cases} A^{\mathrm{T}}VE + E^{\mathrm{T}}VA = -E^{\mathrm{T}}WE, \\ \mathrm{rank}(E^{\mathrm{T}}VE) = \mathrm{rank}(V) = r, \end{cases} \quad W > 0 \tag{1.4.2}$$

并有广义系统(1.1.2)正则、稳定、无脉冲的充要条件是 Lyapunov 方程有半正定解.

(3) 张庆灵等(1999)给出了广义 Lyapunov 方程

$$\begin{cases} V^{\mathrm{T}}A + A^{\mathrm{T}}V = -W, \\ E^{\mathrm{T}}V = V^{\mathrm{T}}E \geqslant 0, \end{cases} \quad W > 0 \tag{1.4.3}$$

并有广义系统(1.1.2)正则、稳定、无脉冲的充要条件是对于任给的 $W > 0$, Lyapunov 方程有解.

(4) 张庆灵(1999)得到广义 Lyapunov 方程

$$\begin{cases} A^{\mathrm{T}}VE + E^{\mathrm{T}}VA = -E^{\mathrm{T}}WE \\ E^{\mathrm{T}}WE \geqslant 0, \mathrm{rank}(E^{\mathrm{T}}VE) = \mathrm{rank}(E) = r \end{cases} \tag{1.4.4}$$

并有正则的广义系统(1.1.2)稳定、无脉冲的充要条件是对于任意给定的对称矩阵 W，广义 Lyapunov 方程有对称解.

(5) 张庆灵等(1998) 给出了广义 Lyapunov 方程

$$\begin{cases} A^{\mathrm{T}}VE + E^{\mathrm{T}}VA = -E^{\mathrm{T}}WE, \\ E^{\mathrm{T}}WE \geqslant 0, \mathrm{rank}(E^{\mathrm{T}}WE) = \det\deg(SE - A), \end{cases} \quad W \geqslant 0 \tag{1.4.5}$$

并有正则的广义系统(1.1.2)稳定的充要条件是对于任意给定的 $W \geqslant 0$, Lyapunov 方程有半正定解.

上述均为连续广义系统的研究成果，类似地也有离散广义系统的相应结论.

其他有关稳定性研究成果还有, Hernandez V 通过线性周期状态反馈讨论了离散正常周期系统，并证明了对于 m 个输入、n 个状态的 T 周期系统，当系统能达时，可转化为 Tm 个输入、n 个状态的线性时不变系统的极点配置问题来处理. 在此基础上，Patrizio C(1991)利用极点配置方法讨论了正常线性周期离散系统的输出稳定问题和可检测问题. 1995 年 A. D 提出了无记忆输出反馈，并用此反馈讨论了离散周期系统的极点配置问题，同时指出可以通过相同周期或多个周期的线性周期输出反馈对离散的周期系统进行极点配置. 利用这一结果，Longhi(1996)提出了鲁棒极点配置的算法. Patrizio C(1998)给出了周期连续和离散系统输出稳定的充要条件，即通过一个 Riccati 方程的解来刻画输出稳定的条件. 1999 年 Duan G R 又进一步通过导数的状态反馈讨论了广义周期系统的鲁棒稳定问题，但只给出了一个充分条件. 2000 年, Rafael B 定义了一个前馈周期系统，并利用输出反馈讨论了前馈系统的稳定性. 通过上述讨论可以看出，对于正常的离散周期系统，稳定性的研究成果最多，已经成为一个完善的体系.

广义系统的极点配置问题. 系统的极点在很大程度上决定了系统的动态性质，所以极点配置始终是一个重要而又具有实际意义的问题. 很多学者对广义系统的极点配置问题做了研究. Fang G H 讨论了广义系统的圆盘极点配置问题及不确定连续和离散广义定常线性系统的鲁棒稳定性. 此外, Fang G H 还在 1998 年讨论了如何将广义区间系统的极点配置在一个指定的区域内. 在此基础上，张国峰(2000)讨论了广义连续系统的鲁棒圆盘配置问题.

广义系统的二次能稳问题. 在实际工程控制问题中，由于系统本身的不确定性(由建模误差、降维误差、系统运行误差等因素引起)及外界不确定性(如不可知干扰输入、环境噪声等)是不可避免的，因而鲁棒控制的研究具有很重要的理论意