

反 问 题

—— 大学生的科技活动

Inverse Problem
—Activities for Undergraduates

Charles W. Groetsh 著

程 晋 谭永基 刘继军 译
Cheng Jin Tan Yongji Liu Jijun



清华大学出版社



Springer

0175
22

反 问 题

—— 大学生的科技活动

Inverse Problem
—Activities for Undergraduates

Charles W. Groetsh 著

程 晋 谭永基 刘继军 译
Cheng Jin Tan Yongji Liu Jijun



清华大学出版社
北 京

 Springer

内 容 简 介

本书以生动有趣的形式介绍作者有关反问题的一些想法,主要内容分为几个模块,分别介绍初等数学、微积分、微分方程和线性代数中的各种反问题。每一模块都由简单有趣的“引言”,一些“研究活动”和“注解及进一步的阅读材料”三部分组成。

本书通过许多具体物理现象的讨论启发学生学习数学的兴趣;通过开展研究活动,提供进一步的阅读材料等方式引发学生进行反向思维,这对于培养学生创造性思维能力很有益处。利用本书作教学参考书,能使大学数学教学更加富有生气。

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

图书在版编目(CIP)数据

反问题:大学生的科技活动/(美)格洛奇(Groetsch, C. W.)著;程晋,谭永基,刘继军译. —北京:清华大学出版社, 2006. 6

(研究生数学丛书)

ISBN 7-302-12713-1

I. 反… II. ①格… ②程… ③谭… ④刘… III. 逆问题-研究生-教学参考资料
IV. O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 022477 号

出 版 者:清华大学出版社 地 址:北京清华大学学研大厦

<http://www.tup.com.cn> 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 客户服务:010-62776969

责任编辑:陈朝晖

印 刷 者:清华大学印刷厂

装 订 者:三河市新茂装订有限公司

发 行 者:新华书店总店北京发行所

开 本:170×230 印张:12.75 字数:250千字

版 次:2006年6月第1版 2006年6月第1次印刷

书 号:ISBN 7-302-12713-1/O·521

印 数:1~3000

定 价:29.00元

编 审 委 员 会

主 编：李大潜

副主编：冯克勤

编 委：（姓氏按拼音字母排序）

程崇庆 陈木法 陈叔平 陈志杰

李克正 李 忠 邵嘉裕 王维克

文志英 肖 杰 袁亚湘 周 青

张伟平

1. 连续介质力学中的数学模型
(Mathematical Modeling in Continuum Mechanics)
2. 应用密码学
(Applied Cryptography)
3. Introduction to Malliavin Calculus
(Malliavin 随机变分引论)
4. 纠错码的代数理论
(Algebraic Theory of Error-Correcting Codes)
5. 抽象代数学基础
(Fundamentals of Abstract Algebra)
6. Algebraic Geometry
(代数几何)
7. 反问题
(Inverse Problem)

总 序

数学是一门在非常广泛的意义上研究自然和社会现象中的数量关系和空间形式的科学。长期以来,在人们认识世界和改造世界的过程中,数学作为一种精确的语言和一个有力的工具一直发挥着重要的作用。在现代,数学科学已构成包括纯粹数学及应用数学内涵的众多分支学科和许多新兴交叉学科的庞大的科学体系。作为各门科学的重要基础,作为“四化”建设的重要武器,作为人类文明的重要支柱,数学科学在很多重要的领域中已起着关键性甚至决定性的作用,数学技术已成为高技术的突出标志和重要组成部分,数学的影响和作用已深入到各行各业,可以说无处不在。马克思当年的预言:“一门科学只有当它成功地运用了数学之后,才算达到了真正完善的地步”,正在不断得到证实。在这样的背景下,数学科学的重要性已得到空前广泛的认同。在研究生(不限于数学专业的研究生)的培养中,重视数学基础的训练,强调数学思想的熏陶,也已成为一种必然的趋势。但是,国内研究生数学教材及参考读物的实际情况,无论从品种、数量及质量哪一方面来看,都远远不能适应这个形势,甚至也远远落后于本科生的数学教材。这已成为制约提高研究生培养质量的一个重要瓶颈。清华大学出版社和施普林格出版社(Springer-Verlag)合作,倡议出版这一套《研究生数学丛书》(Mathematics Series for Graduate Students),可望改善这方面的状况,为我国研究生打好数学基础、提高数学素质起到积极的作用。

根据数学这门科学的特点,同时考虑到研究生学习数学的基本要求和特有方式,这套以面向研究生(包括高年级本科生、硕士及博士研究生)的数学教材或参考读物,将力求体现以下的一些原则:

- 主题有理论或(和)应用方面的重要性;
- 在重点介绍基础性内容的前提下,兼顾学科前沿的重要发展趋势和研究成果;
- 在讲授数学内容的同时,充分体现数学的思想方法和精神实质;
- 少而精,在较小的篇幅中展现基本的内容;
- 有相当好的可读性,适宜读者自学;
- 附有习题、思考题及参考资料目录,书末有索引,方便读者深入学习与思考。

为了有利于体现这些原则,本丛书将采取相当灵活的体例及风格:内容可以

是纯粹数学、应用数学或数学与其他学科的交叉；可以是较系统地介绍某一个分支的教材，或是介绍某一前沿分支状况的综述，也可以是课外参考书；可以是原著，也可以是译著；可以是国内作者，也可以是国外作者；可以用中文编写，也可以用英文编写，等等。

要实现本丛书的目标和宗旨，任重而道远，但千里之行，始于足下，在学界同仁和广大读者的支持和帮助下，让我们共同努力。

李大潜

2003年9月于上海

序 言

本书既不是一本教科书，也不是一本关于初等反问题的综述。这是我个人关于有待进一步丰富的反问题研究活动的一些想法，或许它可以使大学最初两年的数学教学更加富有生气。

在讨论反问题时，第一道难关也是最困难的问题就是反问题的定义。法官斯蒂瓦特 (Potter Stewart) 在谈到黄色书刊时说，他不能定义什么是黄色书刊，但当看到这些书刊时，他却能识别出来。最高法院最终裁定黄色书刊是用“社会标准”来定义的。同样，数学家发现定义“反问题”是困难的，但是当他们遇到反问题时，大部分人能够识别它。这种辨识能力源于他们对正问题定义的直观理解，而正问题的定义则可以看成是历史发展中科学问题的某种“社会标准”。正因如此，我发现用一些关于反问题的历史短文来间接介绍反问题将是一种有效的途径。第 1 章中就包含了许多这样的故事，读者可以略去其中任何一个甚至全部不读 (但我认为这是错误的)。

从第 2 章开始就是一些介绍初等数学、微积分、微分方程和线性代数中各种反问题的模块。每一模块都由一个简单的“引言”，一些“研究活动”和“注解及进一步的阅读材料”构成。所有模块开始都有关于课程内容的水平，需要的数学、科学背景和进行研究所需技术要求的说明。各模块的引言是面向教师水平的，而不是面向学生的。这一指南将作为教师教学的资源，而不是直接给学生来处理的材料汇集。请教师根据自己的想法，选择 (或修改) 适合于他们学生的研究活动，用认为适合他们课程的方式来运用这些材料。特别是没有必要囫圇吞枣地使用整个模块。

“研究活动”有 6 种类型。**问题**是需要比较狭义的范围回答的；**练习**是比较常规的；而**习题**则是带有一定挑战性的；**计算**要求利用图形-符号计算器如 TI-92 或类似工具进行计算；**上机**需要利用数字计算机和适当的软件进行计算。我们提供了许多 MATLAB[®] (反问题界许多人通常选用的工具软件) 的程序 (MATLAB 是 Mathwork 公司注册的软件)。这些程序中的算法是足够简单的，对那些习惯了用其他软件来进行编程运算的读者而言，翻译这些程序将不会感到太困难。这些程序可以从本人的主页下载 (通过 <http://math.uc.edu> 连接)。最后，**课题**是开拓学生视野和想像力的开放性的研究活动。

我感谢许多匿名的读者对本书先前的一系列版本 (那时，本书还未最终完成)

提出的批评和改进建议。特别是本书的最终出版要感谢恩德尔曼 (Robin Endelman)、苏里文(Terry Sullivan)和张仲俊(Zongjun Zhang)。李齐亚(Lee Zia)在这个项目中也提供了有益的鼓励，我还从乌尔曼 (Gunther Uhlmann) 和格拉德韦尔 (Graham Gladwell) 的评论中获益匪浅。本书的写作与出版得到了美国国家科学基金会 (National Science Foundation) 的资助。

Charles W. Groetsh

目 录

第 1 章 反问题简介	1
1.1 什么是反问题	1
1.2 阿基米德的浴盆	3
1.3 塔尔塔利亚的打赌	5
1.4 两个物体	7
1.5 另一个世界	8
1.6 第戎的水源	10
1.7 宇宙	11
1.8 求得时刻	12
1.9 地下的世界	13
1.10 头脑的游戏规则	15
1.11 为什么学习反问题	17
1.12 注解及进一步的阅读材料	18
第 2 章 初等数学中的反问题	20
2.1 小水流喷射	20
2.1.1 引言	20
2.1.2 研究活动	21
2.1.3 注解及进一步的阅读材料	22
2.2 暗算	22
2.2.1 引言	23
2.2.2 研究活动	24
2.2.3 注解及进一步的阅读材料	26
2.3 河底寻宝	26
2.3.1 引言	27
2.3.2 研究活动	28
2.3.3 注解及进一步的阅读材料	30
2.4 由回声探测井的深度	30
2.4.1 引言	30
2.4.2 研究活动	31

2.4.3	注解及进一步的阅读材料	32
2.5	斯诺克	32
2.5.1	引言	32
2.5.2	研究活动	33
2.5.3	注解及进一步的阅读材料	34
2.6	威尼斯船夫的歌声	34
2.6.1	引言	34
2.6.2	研究活动	36
2.6.3	注解及进一步的阅读材料	37
第3章	微积分中的反问题	39
3.1	奇怪的腊肠	39
3.1.1	引言	39
3.1.2	研究活动	41
3.1.3	注解及进一步的阅读材料	45
3.2	塑造容器	45
3.2.1	引言	46
3.2.2	研究活动	49
3.2.3	注解及进一步的阅读材料	50
3.3	行星运动的动力	51
3.3.1	引言	51
3.3.2	研究活动	56
3.3.3	注解及进一步的阅读材料	58
3.4	架空缆绳下垂	60
3.4.1	引言	60
3.4.2	研究活动	61
3.4.3	注解及进一步的阅读材料	64
3.5	举一反三	65
3.5.1	引言	65
3.5.2	研究活动	66
3.5.3	注解及进一步的阅读材料	67
3.6	非常计息	67
3.6.1	引言	67
3.6.2	研究活动	69

3.6.3 注解及进一步的阅读材料	70
第 4 章 微分方程中的反问题	71
4.1 混合溶液的流动	71
4.1.1 引言	71
4.1.2 研究活动	72
4.1.3 注解及进一步的阅读材料	74
4.2 质点下滑	75
4.2.1 引言	75
4.2.2 研究活动	76
4.2.3 注解及进一步的阅读材料	79
4.3 这是一种拉力	79
4.3.1 引言	79
4.3.2 研究活动	83
4.3.3 注解及进一步的阅读材料	86
4.4 上上下下	87
4.4.1 引言	87
4.4.2 研究活动	89
4.4.3 注解及进一步的阅读材料	91
4.5 热传导问题	91
4.5.1 引言	92
4.5.2 研究活动	94
4.5.3 注解及进一步的阅读材料	98
4.6 神秘的堰	99
4.6.1 引言	99
4.6.2 研究活动	101
4.6.3 注解及进一步的阅读材料	102
第 5 章 线性代数中的反问题	103
5.1 原因和可识别性	103
5.1.1 引言	103
5.1.2 研究活动	106
5.1.3 注解及进一步的阅读材料	110
5.2 断层成像的数学艺术	110
5.2.1 引言	110

5.2.2	研究活动	113
5.2.3	注解及进一步的阅读材料	115
5.3	利用万有引力寻宝	116
5.3.1	引言	116
5.3.2	研究活动	119
5.3.3	注解及进一步的阅读材料	121
5.4	继续摇摆不停	121
5.4.1	引言	121
5.4.2	研究活动	125
5.4.3	注解及进一步的阅读材料	127
5.5	一团一团	128
5.5.1	引言	128
5.5.2	研究活动	130
5.5.3	注解及进一步的阅读材料	131
5.6	倾斜的陀螺	131
5.6.1	引言	132
5.6.2	研究活动	137
5.6.3	注解及进一步的阅读材料	138
附录 A	部分答案与建议	139
A.1	初等数学中的反问题	139
A.1.1	小水流喷射	139
A.1.2	暗算	139
A.1.3	河底寻宝	141
A.1.4	由回声探测井的深度	142
A.1.5	斯诺克	143
A.1.6	威尼斯船夫的歌声	143
A.2	微积分中的反问题	144
A.2.1	奇怪的腊肠	144
A.2.2	塑造容器	146
A.2.3	行星运动的动力	147
A.2.4	架空缆绳下垂	148
A.2.5	举一反三	149
A.2.6	非常计息	149

A.3	微分方程中的反问题	149
A.3.1	混合溶液的流动	149
A.3.2	质点下滑	150
A.3.3	这是一种拉力	152
A.3.4	上上下下	152
A.3.5	热传导问题	153
A.3.6	神秘的堰	153
A.4	线性代数中的反问题	153
A.4.1	原因和可识别性	153
A.4.2	断层成像的数学艺术	154
A.4.3	利用万有引力寻宝	154
A.4.4	继续摇摆摇不停	155
A.4.5	一团一团	156
A.4.6	倾斜的陀螺	156
附录 B	MATLAB 程序	157
B.1	MATLAB 程序	157
B.2	内容	157
B.3	Calculus	158
B.3.1	Module 3.1	158
B.3.2	Module 3.2	160
B.3.3	Module 3.3	161
B.3.4	Module 3.6	162
B.4	Differential Equations	163
B.4.1	Module 4.1	163
B.4.2	Module 4.4	169
B.4.3	Module 4.5	172
B.4.4	Module 4.6	175
B.5	Linear Algebra	176
B.5.1	Module 5.2	176
B.5.2	Module 5.3	180
索引		183

第 1 章 反问题简介

1.1 什么是反问题

通常在数学中会得到一个方程，你要求它的解。而现在你有了一个解，必须找到那个方程。我乐于此道。

—— 朱利亚·罗宾逊 (Julia Robinson)

反问题是很难定义的。但是几乎每一个数学家在遇到反问题时都会认出来。在儿时，我们学习乘法正问题：给定两个数求它们之积。对应的反问题是求一个数的一对因子。我们不久就会知道，像许多反问题一样，因子分解问题并不总是只有惟一的解。事实上，要强行得到这个反问题的解的惟一性将会把我们引向素数这个术语，并且由此，大量的数学可能性将展现在我们面前。

什么是数学最古老的问题？我倾向于线性插值问题。希罗多德 (Herodotus) 将几何的起源追溯到运用线性插值的行业：古埃及的操绳师。今天我们更愿意称线性插值问题为反问题 (注意到这个反问题可以有惟一的解、无解或无数多个解，这依赖于点的个数和性质)。正问题是计算给定线性函数的值。在反问题中，我们必须从线性函数的图形上的一些点来决定这个线性函数。这本质上就是操绳师所做的工作：他们用一种直截了当的方法解决了一个反问题。

反问题和正问题是成对出现的。当然选取哪一个称为正问题，并将另一个称为反问题，严格来说是任意的。然而，数学学术界通常没有将对所谓正问题所抱有的热诚给予反问题。大部分大学本科的训练局限于正问题，即表现为已经提供给学生恰好足够的信息，通过一个适定的稳定的过程，能导出惟一解答的问题。最典型的是，这个过程叙述得很详细，适当的输入也已经提供给学生，只是希望他们能获得惟一的输出。在科学中，这一过程称为模型。输入可解释为原因，输出为结果。因此，正问题一般的模式可刻画如下：

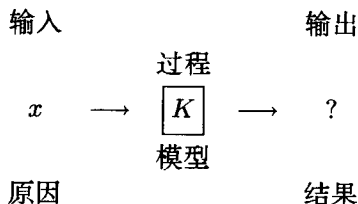
输入 $\rightarrow$ 过程 $\rightarrow$ 输出

或

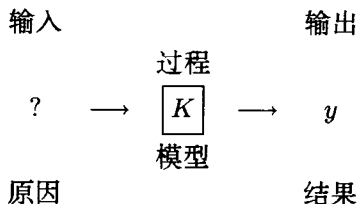
原因 $\rightarrow$ 模型 $\rightarrow$ 结果

若我们将输入用符号 x 表示，过程用符号 K 表示，那么正问题就是去找出

y , 一个算子在其定义域中一点的值。因此正问题可以形式化地图示如下:

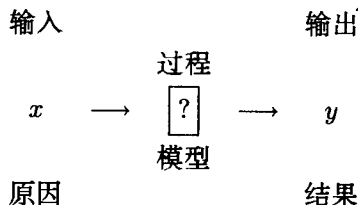


但很清楚, 这只是问题的三分之一。每个正问题都能立刻提出两个反问题。其一是原因问题, 给定模型 K 和结果 y , 要找出得到这个结果的原因, 此反问题可刻画如下:



当然, 假设模型是可逆的, 则对于 K^{-1} 来说, K 的原因问题就是正问题。然而在大多数情况下, 我们假设在正问题中模型不必是可逆的。正是这样, 同时我们也按照历史上出现的先后次序, 可以来区分正问题和原因反问题。在前面讨论过的初等例子中, 可以注意到历史上乘法可能是先出现的, 而且乘法过程不是惟一可逆的。因此我们认为乘法是正问题, 因子分解是反问题。

正问题提出的另一反问题是模型辨识问题: 给定了原因-结果的信息去确定模型。此类反问题可用下图刻画:



若过程 K 确实是一个算子, 即一个函数, 那么对其定义域中任意给定的输入决定了惟一的输出, 即正问题有惟一解。但另一方面, 无法保证原因反问题和模型辨识反问题有惟一解。进而若算子 K 在某种意义下是连续的, 那么对于输入的微小变化正问题的解是稳定的 (这些变化当然是用算子定义域和值空间的拓扑来度量的), 甚至当算子有一个明确定义的逆, 从而原因反问题惟一可解时, 也不能保证反问题的解是稳定的, 因为事实上, 逆算子可能是不连续的。

反问题对于自然科学的发展有着巨大的影响作用。这一事实通常未被普遍认识到。自然科学传统的教学方法是强调正问题。给定原因和描述由原因演变为

结果的模型,问题是要寻找到结果。在这种描述事物的模式中,支配的观点是直接的,面向将来的和外向观察的。大部分问题是已知内部原因,再去预测或决定外部特征。然而科学和技术的巨大发展已使解决反问题成为可能。这类问题包括通过非直接的观察,遥感和非直接的测量来决定物理规律;从边界的测量值来求出不可接触区域的性质;从对现在状态的观察来重构过去的事件等许多问题。这些问题的思路是非直接的,面向过去的或者内省的,而且问题往往涉及“后验的”非破坏性评估或无损检测。

要洞察反问题的内在性质和方法实质,最好的方法是考察若干反问题的实例。当然可以为此设计一些数学的例子,但我发现,回顾历史的方法是介绍反问题的更有效的途径。本章的其余部分由一些重要的或者有趣的反问题的历史短文组成。这些历史事件中,有些就曾经改变了我们思考世界的方法。本章中没有数学,然而有大量的数学隐藏其后。阅读本书的其他模块之前并非必须阅读这些短文,但是我强烈建议读者至少浏览几段以便认识反问题在科学发展中所扮演的历史角色。无论研习哪一篇短文,读者都应着眼于对正问题和反问题进行区分,同时思考两者间的联系。

1.2 阿基米德的浴盆

我们倒退着进入未来。

——P. 瓦莱里 (P. Valéry)

柏拉图(Plato, 公元前 427— 公元前 347) 在他的《理想国》(《Republic》) 第 7 卷中描述了一种完美的说明反问题的一些特点的情景, 柏拉图是这样叙述的:

看! 人类居住在地下的洞穴中, 他们从孩提起一直如此。他们的脖子和腿脚被锁链束缚着, 所以他们无法移动, 也无法回头, 只能看到前方。在他们的后上方, 火在远处燃烧, 在囚犯和火之间有一条小路, 高出地面, 如果仔细观察, 就会发现一矮墙沿路而建, 像表演木偶剧时位于操控者前面的那块舞台。

在柏拉图的故事中, 俘虏们通过观察洞穴后部的投影得到极为有限的信息, 来重构出洞穴外的世界。即他们试图寻找到导致远方的火投影 (模型) 产生结果 (投出的影子) 的原因 (真实的物体)。正问题是完全可以理解的: 在墙上给定一个物体, 已知篝火使物体产生投影这一过程, 那么完全确定该物体投影产生的惟一影子, 便是一个常规的问题。另一方面, 反问题从投在墙上的影子去决定投影的