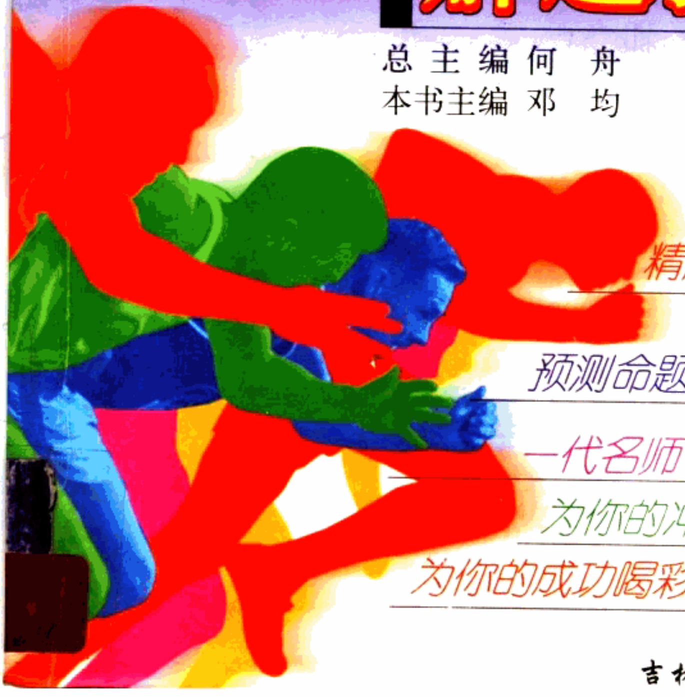
# 冲刺金牌

# 奥林匹克竞赛解题指导

## 初中数学

总主编 何 舟

本书主编 邓 均



精解奥赛名题

预测命题趋势

一代名师

为你的冲刺引路

为你的成功喝彩

吉林教育出版社

# 冲刺金牌

# 奥林匹克竞赛解题指导

## 初中数学

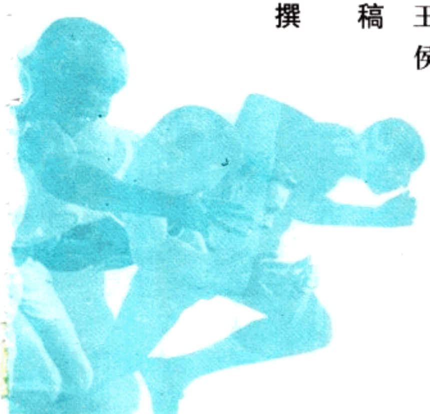

总主编　何　舟

本书主编　邓　均

副主编　章　巍　李智明

撰　稿　王惠杰　李俊平　李智明

侯金枝　章　巍　高　飞

(吉)新登字 02 号

封面设计:周建明

责任编辑:王世斌　李　智

# 冲刺金牌奥林匹克竞赛解题指导

## 初中数学

总 主 编　何　舟

本书主编　邓　均

吉林教育出版社　出版 发行

句容市中山印刷有限公司印刷　新华书店经销

开本:850×1168 毫米　1/32　印张:14　字数:388 千字

2003 年 3 月第 2 版第 2 次印刷

本次印数:15000 册

ISBN 7－5383－4332－6/G·3953

定价:14.80 元

凡有印装问题,可向承印厂调换

# 主编寄语

郑 树

从 1978 年开始我国的数学竞赛重新恢复至今，随着各种层次的竞赛蓬勃开展与各种奥林匹克学校的成立，竞赛数学由少数人参与发展到小学生、中学生甚至大学生都参与的活动，真正成为不仅学生关心而且家长也十分重视的活动，甚至成为一些学校选拔人材的依据，成为备受青少年喜爱的一种活动。为什么这项活动有如此大的吸引力呢？其原因就在于数学竞赛的试题具有涉及知识面广、趣味性强、解题方法灵活等特点，对开发学生的智力，提高学生的数学素质，无疑都能起到极大的促进作用，故人们称数学竞赛是力量、灵活与美的竞赛。

为了使学生少走弯路，减少盲目性，能从中学课程的学习很快地进入竞赛数学的学习，做到在较短的时间内取得最好的效果，有一套好的教程显然是十分必要的，基于以上的考虑我们组织了一批教学第一线的有着丰富教学经验且长期从事数学奥林匹克竞赛培训工作的老师编写了本书。

本书有如下特点：

1. **同步性**——与人教版教材同步，与青少年的现实生活经验和知识背景同步，与青少年的智力发展和非智力因素的需求同步。

2. **新**——本书中选用的题目都是近几年中考题与竞赛试题，分析、解答有新意。

3. **广**——本书所选题目来自全国各省、市、自治区的中考卷与

竞赛卷。

4. **详**——本书每讲均设**“规律提示”“技法精讲”“解题指导”“同步训练”**四大精彩栏目，做到从课内到课外，由浅入深，丝丝入扣，解答详尽，分析、总结到位，尽力做到举一反三。

5. **实用**——本书既考虑到《数学教学大纲》与教材知识的系统性，又增添了竞赛数学必须掌握的基础知识，使得课内与课外的过渡变得自然和谐。

书中如有疏漏之处，敬请读者指正。



试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbo

# 初中数学竞赛大纲(修订稿)

## 中国数学会普及工作委员会制定

数学竞赛对于开发学生智力,开拓视野,促进教学改革,提高教学水平,发现和培养数学人才都有着积极的作用。目前我国中学生数学竞赛日趋规范化和正规化,为了使全国数学竞赛活动健康、持久地开展,应广大中学师生和各级数学奥林匹克教练员的要求,特制定《初中数学竞赛大纲(修订稿)》以适应当前形势的需要。

本大纲是在国家教委制定的九年义务教育制"初中数学教学大纲"精神的基础上制定的。《教学大纲》在教学目的一栏中指出:"要培养学生对数学的兴趣,激励学生为实现四个现代化学好数学的积极性。"具体作法是:"对学有余力的学生,要通过课外活动或开设选修课等多种方式,充分发展他们的数学才能","要重视能力的培养……,着重培养学生的运算能力、逻辑思维能力和空间想像能力,要使学生逐步学会分析、综合、归纳、演绎、概括、抽象、类比等重要的思想方法。同时,要重视培养学生的独立思考和自学的能力"。

《教学大纲》中所列出的内容,是教学的要求,也是竞赛的要求。除教学大纲所列内容外,本大纲补充列出以下内容。这些课外讲授的内容必须充分考虑学生的实际情况,分阶段、分层次让学生逐步地去掌握,并且要贯彻"少而精"的原则,处理好普及与提高的关系,这样才能加强基础,不断提高。

**1. 实　数**

十进制整数及表示方法。整除性,被2,3,4,5,8,9,11等数整除的判定。

素数和合数,最大公约数与最小公倍数。

奇数和偶数,奇偶性分析。

带余除法和利用余数分类。

完全平方数。

因数分解的表示法,约数个数的计算。

有理数的表示法,有理数四则运算的封闭性。

**2. 代　数　式**

综合除法、余式定理。

拆项、添项、配方、待定系数法。

部分分式。

对称式和轮换对称式。

**3. 恒等式与恒等变形**

恒等式,恒等变形。

整式、分式、根式的恒等变形。

恒等式的证明。

**4. 方程和不等式**

含字母系数的一元一次、二次方程的解法。一元二次方程根的分布。

含绝对值的一元一次、二次方程的解法。

含字母系数的一元一次不等式的解法,一元一次不等式的解法。

含绝对值的一元一次不等式。

简单的一次不定方程。

列方程(组)解应用题。

**5. 函　数**

$y=|ax+b|$,$y=|ax^2+bx+c|$及$y=ax^2+b|x|+c$的图象和性质。

二次函数在给定区间上的最值。简单分式函数的最值。含字母系数的二次函数。

**6. 逻辑推理问题**

抽屉原则(概念),分割图形造抽屉、按同余类造抽屉、利用染色造抽屉。

简单的组合问题。

逻辑推理问题,反证法。

简单的极端原理。

简单的枚举法。

**7. 几　何**

四种命题及其关系。

三角形的不等关系。同一个三角形中的边角不等关系,不同三角形中的边角不等关系。

面积及等积变换。

三角形的心(内心、外心、垂心、重心)及其性质。

(初审稿于 1992 年 3 月重庆会议通过)

(修订稿于 1994 年 3 月福州会议通过)

# 目　录



精彩栏目推荐

规律提示

技法精讲

解题指导

同步训练

4大精彩栏目系名师精心打造，充分体现细节设计的优化与细部关怀意味。

4大精彩栏目内容链接、相互对应，让您立体解读每一个竞赛热点。

精彩栏目推荐

规律提示

技法精讲

解题指导

同步训练

4大精彩栏目系名师精心打造，充分体现细节设计的优化与细部关怀意味。

4大精彩栏目内容链接、相互对应，让您立体解读每一个竞赛热点。

**精彩栏目推荐**

规律提示

技法精讲

解题指导

同步训练

4大精彩栏目系名师精心打造，充分体现细节设计的优化与细部关怀意味。

4大精彩栏目内容链接、相互对应，让您立体解读每一个竞赛热点。

# 第一讲　整数与整除

规律提示

**1. 十进制数的表示方法**

一个两位数可以表示成$\overline{ab}$或$10a+b$.

一个$n+1$位正整数可以表示成$a_na_{n-1}a_{n-2}\cdots a_3a_2a_1a_0$或$a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\cdots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0$，其中$a_i$是整数，$0\leqslant a_i\leqslant 9(i=0,1,2,\cdots,n)$且$a_n\neq 0$，$a_n$叫做首位数字；$a_0$叫做个位数字.

**2. 奇数与偶数**

能被2整除的整数叫偶数，不能被2整除的整数叫奇数，0也是偶数.

**3. 质数与合数**

一个大于1的正整数$n$，若仅有1与$n$这两个正约数，则$n$叫质数；若还有其他的正约数，则$n$叫合数.

最小的质数是偶质数2，其他质数均为奇质数.

如果一个正整数$n$的一个约数$p$是质数，则$p$叫做$n$的质约数.

**4. 整数的整除性**

整数除以整数不一定得整数，如果整数$n$除以整数$m$的商也是整数，则称$m$整除$n$，记作$m|n$.

**5. 最大公约数与最小公倍数**

设有$n$个不全为0的整数$a_1,a_2,\cdots,a_n$，且$d|a_1,d|a_2,\cdots,d|a_n$，则称$d$是$a_1,a_2,\cdots,a_n$的公约数，记作$(a_1,a_2,\cdots,a_n)=d$.

设有$n$个全不为0的整数$b_1,b_2,\cdots,b_n$，且$b_1|m,b_2|m,\cdots,b_n|m$，则称$m$为$b_1,b_2,\cdots,b_n$的公倍数，记作$[b_1,b_2,\cdots,b_n]=m$.

**6. 常用$2n$表示偶数，$2n+1$表示奇数，奇数、偶数有以下性质经常用到**

(1)奇数与奇数之和为偶数；

(2)奇数与偶数之和为奇数；

(3)偶数与偶数之和为偶数；

(4)奇数与奇数之积为奇数；

(5)奇数与偶数之积为偶数；



试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbo

(6)偶数与偶数之积为偶数.

**7.自然数可以分成1、质数、合数三类,其中2是最小的质数**

**8.整数的整除性有以下几方面**

(1)如果 $a|b, a|c$,那么 $a|(b+c)$;

(2)如果 $a|b, b|c$,那么 $a|c$;

(3)如果 $b|a$,那么 $bm|am$;

(4)如果 $a|b$,那么 $a|nb$;

(5)如果 $am|bm$,那么 $a|b$;

(6)若 $a|b_1, a|b_2, \cdots, a|b_n$,则 $a|(b_1, b_2, \cdots, b_n)$;

(7)$n$ 个连续整数之积必能被 $1\times2\times3\times\cdots\times n$ 所整除.

**技法精讲**

解本讲赛题,主要依据整数和整除的定义和性质等基础知识,并辅以一些必要的技法.这些技法主要有:

**1.定义法**

利用整数与整除的定义来解题的方法,称作定义法.

利用定义法解题的关键在于,把握整数的概念和整除的性质.

**2.奇偶分析法**

在一定范围内,通过对(整)数奇偶性的分析来判断其值的方法,叫做奇偶分析法.

**3.质、合分析法**

利用质数、合数的性质来解题的方法叫做质、合分析法.

**4.整数整除分析法**

应用整数的整除性及整数的特点,来解整除性、最小公倍数、约数等问题的方法,叫整数整除分析法.

**5.设参数**

通过引入适当的参数变量来解题的方法叫设参法.

设参法常用来解较复杂的整除问题.

**6.反证法**

数学证明中经常使用的一种证明方法.

当所给命题不易从原命题的已知条件出发直接证得结论时,可先假设原命题中的结论不成立,即假设原命题结论的反面成立,然后利用原命题中的已知条件和数学定义、公理、定理或公式,通过严密的逻辑推理,导出与开始的假设或原命题的已知条件或某一显然的、无可辩驳的数学事实相矛盾的结果,由

此判定原命题结论的反面不可能成立，从而判定原命题中的结论成立.这种证明方法叫反证法.

反证法是一种间接证明方法.它的实质是，改证原命题的逆否命题.

**7. 带余除法**

两个整数的和、差、积仍是整数，即整数集中加、减、乘运算是封闭的；但用一个非零整数去除另一个整数，所得的商未必是整数.

若 $a$、$b$ 为两个整数，$b\neq 0$，则存在惟一的整数对 $q$、$r$，使得 $a=bq+r$.这里 $0\leqslant r\leqslant |b|$.这叫做带余除法.

解题指导

**1. 定义法**

题1　若11个连续奇数的和是1991，那么把这些数按从小到大的顺序排列起来，第六个数是( B ).

A. 179　　B. 181　　C. 183　　D. 185

精析　每两个连续奇数之间相差2，可设第一个为 $2n+1$，最后一个为 $2n+21$，其和为 $11(2n+11)$.

全解　设这11个连续奇数为 $2n+1,2n+3,2n+5,\cdots,2n+21$，则 $(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)+\cdots+(2n+21)=1991$，即 $11(2n+11)=1991$.解得 $n=85$，所以第六个数是 $2\times 85+11=181$，故选B.

评注　根据题意，列方程求出每个数，即可找到第六个数.

**2. 奇偶分析法**

题　(1998·山东)已知三角形的三边的长均为整数，其中某两条边长之差为5.若此三角形周长为奇数，则第三边边长的最小值为( C ).

A. 8　　B. 7　　C. 6　　D. 4

精析　第三边由已知两边的差来断定大于5，还可由周长为奇数断定是偶数，故可知答案是大于5的最小的偶数.

全解　依题意不妨设 $a-b=5$，第三边为 $c$，根据三角形三边不等关系，有 $c>5$，$a-b=5$ 是奇数，所以 $a$、$b$ 中一奇一偶，又因 $a+b+c$ 为奇数，所以 $c$ 一定为偶数，$c>5$ 中最小的偶数为6，故选C.

评注　此题利用三角形三边不等关系及整数奇偶性性质来判断第三边的奇偶性.

题　$a,b,c$ 三个数都是两位数，且 $a>b>c$，已知它们的和是偶数，它们的积是3960，则 $a,b,c$ 三个数分别为 22、18、10.

精析 从和为偶数断定必有两奇一偶或三个偶数，再把 3960 分解因数再重新组合，即可得此三数.

全解 由于 $a+b+c$ 是偶数，所以 $a,b,c$ 必然是三个偶数或者二奇一偶；又已知 $a,b,c$ 都是两位整数，且 $abc=3960=2^3\times3^2\times5\times11$，所以 $a,b,c$ 三个数分别为 $2\times5=10,2\times9=18,2\times11=22$ 或者 $11,3\times5=15,2^3\times3=24$. 因此 $a,b,c$ 三数分别为 22，18，10 或者 24，15，11.

评注 根据三个数的和与积都是偶数，判断这三个数中至少有一个为偶数；再由三个数的积的因数分解来确定三个两位数的因数.

例题 在 1992 个正整数：1，2，3，…，1991，1992 中的每一个数前面任意添上"+"号或"-"号，则其代数和一定是（　　）.

A. 奇数　　B. 偶数　　C. 负整数　　D. 非负整数

精析 两个整数前任添"+""-"号. 代数和的奇偶性与原和的奇偶性相同. 1992 个整数也一样.

全解 由于两个整数 $a$、$b$ 前面任意添加"+"号或"-"号，其代数和的奇偶性不变，这个性质对 $n$ 个整数也是成立的，因此，1，2，3，…，1991，1992 的每一个数前面任意添上"+"号或"-"号，其代数和的奇偶性与 $(-1)+2-3+4-5+\cdots-1991+1992=996$ 的奇偶性相同，是偶数，所以选 B.

评注 根据整数的奇偶性，其和差不影响原和差的奇偶性的性质可确定结论.

例题 设 $a,b,c,d$ 是自然数，并且 $a^2+b^2=c^2+d^2$.

证明：$a+b+c+d$ 一定是合数.

精析 可由已知判断 $a,b$ 的同奇偶性. 同样，还可以判断 $c,d$ 的同奇偶性，可知 $a+b+c+d$ 为偶数.

全解 由于 $a^2+b^2=c^2+d^2$，故若 $a,b$ 同奇偶，则 $c,d$ 也应同奇偶；若 $a,b$ 不同奇偶，则 $c,d$ 也不同奇偶. 从而 $a+b$ 与 $c+d$ 同奇偶，所以 $a+b+c+d$ 为偶数，且大于等于 4，于是 $a+b+c+d$ 一定是合数.

评注 由整数性质确定 $a+b+c+d$ 为偶数，又根据已知条件，可知是合数.

例题 若两个自然数的和与它们的差相乘的积是 1988. 那么，这两个数的和是 142.

冲刺金牌奥林匹克竞赛解题指导

**精析** 列关于这两个数的二元一次方程，由奇偶性即可得 $x,y$ 的值.

**全解** 设大数为 $x$，小数为 $y$，依题意有

$$(x+y)(x-y)=1988,$$
$$1988=2\times2\times7\times71.$$

由于 1988 为偶数，所以 $x+y$ 与 $x-y$ 必须同是偶数，从而有

$$\begin{cases}x+y=2\times71,\\x-y=2\times7\end{cases}\text{或}\begin{cases}x+y=2\times7\times71,\\x-y=2.\end{cases}$$

解得　$x+y=142$ 或 $x+y=994$.

所以这两个数的和是 142 或 994.

**评注** 此题主要是用到因式分解及因数分解，再用整数的奇偶性判断每个因式是多少.

**题** 如果 $m$ 是自然数，那么 $\frac{1}{8}[1-(-1)^m](m^2-1)$ 的值(　　).

A. 一定是零　　B. 一定是偶数

C. 一定是整数，但不一定是偶数　　D. 不一定是整数

**精析** 分奇偶两种情况讨论 $m$ 的取值.

**全解** 设 $f(m)=\frac{1}{8}[1-(-1)^m](m^2-1)$.

当 $m$ 是偶数时，$f(m)$ 中的方括号部分的值是零，所以 $f(m)=0$ 时，是偶数；当 $m$ 是奇数时，可设 $m=2n+1$，这里的 $n$ 是自然数，于是

$$\begin{aligned}f(2n+1)&=\frac{1}{8}[1-(-1)^{2n+1}][(2n+1)^2-1]\\&=n(n+1).\end{aligned}$$

因为 $n,n+1$ 是相邻的自然数，所以它们的乘积是偶数.

综上，可知当 $m$ 是任意自然数时，$f(m)$ 都是偶数，故选 B.

**评注** 因为 $m$ 是自然数，由对 $m$ 的奇偶性的讨论，可以得出所求代数式的奇偶性.

**题** 设 $x,y$ 是整数，并且 $y^2=x^2-2132$，则代数式 $\frac{2x^2+xy-y^2}{x+y}$ 的值是(　　).

A. 80　　B. 136

C. $-80$ 或 $-136$　　D. $\pm80$ 或 $\pm136$

**精析** 先将已知式分解因式，再分奇偶性讨论可能的取值范围进而将所求式分解因式、约分，将最后将备选的几组数代入可得结果.

全解 由 $y^2 = x^2 - 2132$，可得

$$(x+y)(x-y) = 2132.$$

$\because$ $x, y$ 都是整数，

$\therefore$ 可能是：① $x, y$ 为一奇一偶；② $x, y$ 同为奇数或同为偶数. 在情形①，$x+y$ 与 $x-y$ 都是奇数，于是它们的乘积也是奇数，但 2132 是偶数，所以①不成立；在情形②，$x+y$ 与 $x-y$ 都是偶数，并且符号相同，又由于 $2132 = 2 \times 2 \times 13 \times 41 = 26 \times 82 = (-26) \times (-82)$，

$\therefore$ 原方程化为

| $x+y$ | 26 | 82 | $-26$ | $-82$ |
|---|---|---|---|---|
| $x-y$ | 82 | 26 | $-82$ | $-26$ |

由此解得 $(x, y) = (54, -28)$；$(54, 28)$；$(-54, 28)$；$(-54, -28)$.

$$\therefore \quad \frac{2x^2 + xy - y^2}{x+y} = \frac{(x+y)(2x-y)}{x+y}$$
$$= 2x - y \, (x + y \neq 0).$$

将 $(x, y)$ 的四个值依次代入，可知应当选 D.

评注 由因式分解和因数分解及因式奇偶性的分析，确定每个因式的值，产生方程组，从而求出 $x, y$ 的值.

题 9 书店有单价为 10 分，15 分，25 分，40 分的四种贺年卡，小华花了几张一元的钱，正好买了 30 张，其中某两种各 5 张，另外两种各 10 张，问小华买贺年卡共花去了多少钱？答：买贺年卡共花去7元钱。

精析 依题意列出一个不定方程，再由未知数的奇偶性求解.

全解 设买的贺年卡分别为 $a, b, c, d$ 张，用去 $k$ 张一元人民币，依题意，有

$$10a + 15b + 25c + 40d = 100k \text{（}k\text{ 为正整数）},$$

即
$$2a + 3b + 5c + 8d = 20k.$$

显然 $b, c$ 有相同的奇偶性. 若同为奇数，则 $b = c = 5$ 和 $a = d = 10$，$k = 7$；若同为偶数，则 $b = c = 10$ 和 $a = d = 5$，$k = 6.5$（不符题意，舍去），故小华花去 7 张一元人民币买贺年卡.

评注 此题为不定方程解应用题，并应用了未知数的奇偶性的知识.

题 10 求证：奇数的平方加 3，能被 4 整除，但不能被 8 整除.

精析 证明能被 4 整除并不难，难在利用奇偶性得出奇数的平方加 3 不能

被8整除.

全解　设任一奇数为$2k+1$($k$为整数).

$\because$

$$\begin{aligned}&(2k+1)^2+3\\=&4k^2+4k+3+1\\=&4(k^2+k+1)\\=&4[k(k+1)+1],\end{aligned}$$

$\therefore\quad 4|[(2k+1)^2+3]$.

又$\because\quad k(k+1)$为偶数,

$\therefore\quad k(k+1)+1$为奇数,

即$k(k+1)+1$无2的因数,

$\therefore\quad 8|[(2k+1)^2+3]$.

评注　由奇数的表示方法,根据题意列出平方式,再加3,再由因式分解,可检验题目中的结论.

3. 质、合分析法

题11　(1998·黄冈)若$P$为质数,则$P^3+5$仍为质数,则$P^5+7$为(　).　C

A. 质数　　B. 可为质数也可为合数

C. 合数　　D. 既不是质数也不是合数

精析　由$P$为质数.$P^3+5$为质数,可判断$P$为2,代入$P^5+7$即可.

全解　因为$P^3+5$是质数,则$P$必为偶数,又因为$P$也是质数,则$P$只能为2,由此可得$P^5+7=2^5+7=39$为合数.

评注　$P^3+5$是大于5的质数,所以$P^3+5$是奇质数,5是奇数,得到$P^3$是偶数.所以$P$为偶数,$P$为质数,判断$P$为2,从而可以计算$P^5+7$为合数.

题12　(第十届·五羊杯)$n$不是质数,且$n$可分解为2个或多于2个质因数之积,每个质因数都大于10,则$n$最小等于 121 .

精析　比10大的最小质数为11,$11\times11=121$.

全解　$\because\quad n$不是质数且$n$最少分解为2个质因数$a,b$的积,$a,b$都大于10,最小都是11,

$\therefore\quad n$的最小值为$11\times11=121$.

评注　此题的关键在于找出大于10的最小质数.

题13　(1998·北京)已知$a$为整数,$|4a^2-12a-27|$是质数,那么,$a$的所有可能值的和为______.

冲刺金牌奥林匹克竞赛解题指导

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbo