大学数学立体化教材

概率论与数理统计

（理工类）

简明版

吴赣昌　主编

中国人民大学出版社

大学数学立体化教材

概率论与数理统计

（理工类）

简明版

吴赣昌　主编

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计（理工类·简明版）/吴赣昌主编.
北京：中国人民大学出版社，2006
大学数学立体化教材
ISBN 7-300-07609-2

Ⅰ.概…
Ⅱ.吴…
Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材
Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 109052 号

大学数学立体化教材
概率论与数理统计（理工类·简明版）
吴赣昌　主编

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京东君印刷有限公司		
规　　格	170 mm×228 mm　16 开本	**版　　次**	2006 年 10 月第 1 版
印　　张	15.5 插页 1	**印　　次**	2006 年 10 月第 1 次印刷
字　　数	281 000	**定　　价**	29.80 元（含光盘）

内容简介

本书根据高等学校理工类专业概率论与数理统计课程的教学大纲编写而成，内容设计简明，但结构体系上又不失完整，其中涵盖了概率论的基本概念、一维和多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析等知识；同时，为了便于阐释和理解这些概率统计基本知识，本书以适当的难度梯度循序渐进地选编了一些教学例题和练习题，其中包括一些概率论与数理统计知识在几何学和物理学等方面应用的题目，以培养学生们对概率论与数理统计知识的应用能力。此外，本书还结合现代教学的新要求和现代科技的新发展，配备了一套内容丰富、功能强大的教学课件——《概率论与数理统计多媒体学习系统》（光盘），其中包括多媒体教案、习题详解、综合训练等功能模块，这些功能模块的设计方便学生们自学和自我提升：它有利于学生们了解一些数学历史和数学文化，也有助于学生们的课程学习和考研备战。在学习过程中，书与盘配合使用，形成了教与学的有机结合。

本书可作为普通高等院校（少课时）、独立学院、成教学院、民办院校等本科院校以及具有较高要求的高职高专院校相应专业的数学基础课教材。

总　　序

教育信息化是21世纪教育改革和发展的大方向，借助信息技术提高教与学的效率和效果、培养学生的实践能力和创新能力是教育追求的目标．然而，与其他学科相比，大学数学教育信息化的研究进展比较缓慢．随着我国高等教育“大众化”阶段的到来，过去所谓“经典”的教材已渐渐不能适应教育改革和发展的需要，因此，如何将当今快速发展的信息技术与教育技术相结合，建设一系列“新型教材”就显得非常紧迫．在我们的设想中，这种“新型教材”至少要包含以下两个方面：一是教学资源的多元化、教学方式的现代化、教学知识的立体化；二是教学考多层次、全方位的建设．此类“新型教材”的使用应在提高教学效率、增强教学效果、加大教学信息量，利于学生的课后学习和优秀学生的提高训练，全方位提升学生的综合素质和创新能力等方面起到积极的作用．

2000年初，在吴赣昌教授的组织与策划下，我们成立一个由教授、副教授、专任教师、专职动画设计人员和软件设计人员组成的研发团队，对上述研究目标进行了重点攻关，在迄今为止的6年多时间内，先后推出了一系列全新的“教学资源库式”的大学数学立体化教材，并配套建设了大学数学多媒体系列教学软件、大学数学试题库系统和大学数学立体化教材服务网站．上述教学成果先后被全国200多所高等院校采用，一方面得到了国内同行的积极反馈和鼓励，另一方面也使上述研究工作的可持续发展得到了有力的支持．

此次经由中国人民大学出版社出版的大学数学立体化教材简明版是大学数学立体化教材其中的一个系列，共包含两大类六门课程，分别有**理工类**：高等数学，线性代数及概率论与数理统计三门课程；**经济类**：微积分，线性代数及概率论与数理统计三门课程．下面我们简单介绍一下该立体化教材的形式与内涵．

立体化教材的形式

1.《＊＊＊＊》(书)

2.《＊＊＊＊多媒体学习系统》(学生专用)(光盘)

其中，《＊＊＊＊》(书)的编写具有下列特点：

- 书中融入了数学历史与数学文化的教育．
- 在重要概念引入之前，深刻、简明地阐述其产生的背景及应用的总体思想．
- 以评注方式对定理、概念、公式的理解和应用做了进一步的总结．
- 依循序渐进的原则，以适当的难度梯度选编教学例题．

《＊＊＊＊多媒体学习系统》是一套大型的集成性、交互式和教学资源立体化的学习软件，其中设计了多媒体教案、习题详解、综合训练等功能模块，以充分满

足读者们在教材内容学习、课后辅导答疑以及综合提高训练等方面的需要. 主要特点:

◆ 多媒体教案: 按动态仿真教学方式设计了大量的教学动画，直击数学思想本质，利于突破学习中的重点、难点.

◆ 习题详解: 逐题剖析解题思路，并以多媒体动画的形式给出了习题的求解过程和相关方法，利于学生课后学习.

◆ 综合训练: 总结每章教学知识点，通过精选的总习题进一步揭示解题的一般规律和技巧，并对历届考研真题进行逐题剖析，利于学生综合提高.

◆ 知识点交互: 利用多媒体开发软件的网页特性，为系统中的每个文件提供了丰富的知识点交互链接，利于学生高效率的学习.

立体化教材的配套建设服务

1.《＊＊＊＊多媒体教学系统》(教师专用)(光盘)

2.《大学数学试题库系统》

3. 大学数学立体化教材服务网 (www.math123.com)

其中，《＊＊＊＊多媒体教学系统》(光盘)，除了包含《＊＊＊＊多媒体学习系统》的主要功能模块以外，还具有以下特点:

◆ 多媒体教案: 教学过程设计更适合教师进行课堂教学，补充了类型丰富的教学例题供教师选用，增加了课堂练习环节.

◆ 教学备课系统: 搜集并整理了大量的教学资源和备课元素，可供教师修改选用，充分展现各位老师的个性化授课特点.

◆ 鼠标笔、文件放大以及知识点层叠交互功能，使教师在采用多媒体教学的同时，可以很好地保持传统教学的优势.

《大学数学试题库系统》包含高等数学、线性代数、概率论与数理统计三大模块，试题量 20 000 余道，具有以下特点:

◆ 试题类型丰富: 含选择题、填空题、计算题、证明题、综合应用题等.

◆ 组卷功能强大: 教师只需根据考试要求直接选择考点和题型，通过智能组卷按钮，几秒钟内即可生成试卷和相应的答卷，通过预览，对不满意的试题，可通过人工调整按钮，方便地对该试卷中的试题进行增删与替换.

◆ 直接实现试卷的 Word 排版，并能在成卷后实现对试题的编辑修改.

◆ 大容量试卷库: 试卷库可存放 3 300 余套各类试卷，库内存有数百套各类全真试卷，供用户参考; 用户可将自组试卷或交流试卷存入该试卷库内. 试卷库管理功能使用户能方便地实现对库内的试卷进行调用、修改及增删.

◆ 二次开发功能: 使用单位可对系统进行包括试题的增删与替换，试卷库的存储管理，试题的分类标识加注以及试题难度的重新区分等.

大学数学立体化教材服务网 (www.math123.cn) 是专门为采用我们立体化教材的师生提供配套教学服务的网站. 网站设计了首页、教材简介、教学系统、题库系统、教学文件、教学论坛、数学实验、历史介绍、考研、征订信息等主要栏目, 并有丰富的教学资源 (如各类系统软件的演示版本, 每门课程的教学大纲、教学日历、实验指导书、实验案例库等教学文件) 供老师们下载. 网站力图建设成为国内大学数学教与学的通用平台, 在教学论坛栏目中, 搜集、整理和转载了当前国内有关大学教育、专业教学等方面共同关心的议题和新闻, 广大师生可在其中发表自己的意见和建议. 在首页栏目中, 搜集了有关大学数学立体化教材建设的最新消息和历次研讨会的信息. 在数学实验和考研等栏目中除提供本站特别设计的有关下载内容外, 还搜集整理了丰富的友情链接内容. 欢迎广大师生登陆浏览.

立体化教材的建设是一项崭新的事业. 令我们欣慰的是, 与当初启动这个项目时相比, 现在大面积采用立体化教材和多媒体教学的软硬件环境 (从教育部的文件精神到大学的多媒体教室建设) 和软硬件技术 (从软件开发平台到计算机相关硬件技术) 都已经非常成熟了. 当初许多专家认为多媒体教学无法发挥教师教学个性化的问题也因鼠标笔和手写屏系统的问世而迎刃而解了.

6 年以来, 尤其是 2002 年 9 月第一个《高等数学多媒体教学系统》(理工类) 出版以来, 我们的工作得到了国内许多同行的长期支持和鼓励, 在此特别表示感谢.

编　者

2006 年 9 月 10 日

目　录

第1章 随机事件及其概率

概率论与数理统计是从数量化的角度来研究现实世界中的一类不确定现象（随机现象）及其规律性的一门应用数学学科，20世纪以来，它已广泛应用于工业、国防、国民经济及工程技术等各个领域．本章介绍的随机事件及其概率是概率论中最基本、最重要的概念之一．

§1.1 随 机 事 件

一、随机现象

在自然界和人类社会生活中普遍存在着两类现象：一类是在一定条件下必然出现的现象，称为**确定性现象**．

例如：(1) 一物体从高度为 h (米) 处垂直下落，则经过时刻 t (秒) 后必然落到地面，且当高度 h 一定时，可由公式

$$h=\frac{1}{2}gt^2 \quad (g=9.8\,(\text{米}/\text{秒}^2))$$

具体计算出该物体落到地面所需的时间 $t=\sqrt{2h/g}$ (秒)．

(2) 异性电荷相互吸引，同性电荷相互排斥，等等．

另一类则是在一定条件下我们事先无法准确预知其结果的现象，称为**随机现象**．

例如：(1) 在相同的条件下抛掷同一枚硬币，我们无法事先预知将出现正面还是反面；

(2) 将来某日某种股票的价格是多少？等等．

从亚里士多德时代开始，哲学家们就已经认识到随机性在生活中的作用，但直到20世纪初，人们才认识到随机现象亦可以通过数量化方法来进行研究．概率论就是以数量化方法来研究随机现象及其规律性的一门数学学科．

二、随机试验

由于随机现象的结果事先不能预知，初看似乎毫无规律．然而，人们发现同一随机现象大量重复出现时，其每种可能的结果出现的频率具有稳定性，从而表明随机现象也有其固有的规律性．人们把随机现象在大量重复出现时所表现出的量的规律性称为随机现象的**统计规律性**．概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一

门学科.

历史上，研究随机现象统计规律最著名的试验是抛掷硬币的试验．表1–1–1是历史上抛掷硬币试验的记录.

表 1–1–1　　历史上抛掷硬币试验的记录

试验者	抛掷次数(n)	正面次数(r_n)	正面频率(r_n/n)
DeMorgan	2 048	1 061	0.518 1
Buffon	4 040	2 048	0.506 9
PearsonK	12 000	6 019	0.501 6
PearsonK	24 000	12 012	0.500 5

试验表明：虽然每次抛掷硬币事先无法准确预知将出现正面还是反面，但大量重复试验时，发现出现正面和反面的次数大致相等，即各占总试验次数的比例大致为0.5，并且随着试验次数的增加，这一比例更加稳定地趋于0.5. 它说明虽然随机现象在少数几次试验或观察中其结果没有什么规律性，但通过长期的观察或大量的重复试验可以看出，试验的结果是有规律可循的，这种规律是随机试验的结果自身所具有的特征.

为了对随机现象的统计规律性进行研究，就需要对随机现象进行重复观察，我们把对随机现象的观察称为**试验**.

例如，观察某射手对固定目标所进行的射击；抛一枚硬币三次，观察出现正面的次数；记录某市 120 急救电话一昼夜接到的呼叫次数等均为试验．上述试验具有以下共同特征：

(1) 可重复性：试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 可观察性：每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 不确定性：每次试验出现的结果事先不能准确预知，但可以肯定会出现上述所有可能结果中的一个.

在概率论中，我们将具有上述三个特征的试验称为**随机试验**，记为E.

三、样本空间

尽管一个随机试验将要出现的结果是不确定的， 但其所有可能结果是明确的，我们把随机试验的每一种可能的结果称为一个**样本点**， 它们的全体称为**样本空间**，记为S(或Ω).

例如：(1) 在抛掷一枚硬币观察其出现正面或反面的试验中，有两个样本点：正面、反面．样本空间为$S=\{$正面，反面$\}$. 若记$e_1=$正面，$e_2=$反面，则样本空间可记为

$$S=\{e_1, e_2\}.$$

(2) 观察某电话交换台在一天内收到的呼叫次数，其样本点有可数无穷多个：i

次 ($i=0, 1, 2, 3, \cdots$), 样本空间可简记为

$$S=\{0,1, 2, 3, \cdots\}.$$

(3) 在一批灯泡中任意抽取一个，测试其寿命，其样本点也有无穷多个 (且不可数): t 小时，$0\le t<+\infty$，样本空间可简记为

$$S=\{t\,|\,0\le t<+\infty\}=[0, +\infty).$$

(4) 设随机试验为从装有三个白球 (记号为 1, 2, 3) 与两个黑球 (记号为 4, 5) 的袋中任取两球.

① 若观察取出的两个球的颜色，则样本点为 e_{00} (两个白球), e_{11} (两个黑球), e_{01} (一白一黑), 于是，样本空间为

$$S=\{e_{00}, e_{11}, e_{01}\}.$$

② 若观察取出的两球的号码，则样本点为 e_{ij} (取出第 i 号与第 j 号球), $1\le i<j\le 5$. 于是，样本空间共有 $C_5^2=10$ 个样本点，样本空间为

$$S=\{e_{ij}\,|1\le i<j\le 5\}.$$

注：此例说明，对于同一个随机试验，试验的样本点与样本空间是根据要观察的内容而确定的.

四、随机事件

在随机试验中，人们除了关心试验的结果本身外，往往还关心试验的结果是否具备某一指定的可观察的特征. 在概率论中，把具有这一可观察特征的随机试验的结果称为**事件**. 事件可分为三类：

(1) **随机事件**：在试验中可能发生也可能不发生的事件. 随机事件通常用字母 A, B, C 等表示.

例如，在抛掷一枚骰子的试验中，用 A 表示“点数为奇数”这一事件，则 A 是一个随机事件.

(2) **必然事件**：在每次试验中都必然发生的事件. 用字母 S (或 Ω) 表示.

例如，在上述试验中，“点数小于 7”是一个必然事件.

(3) **不可能事件**：在任何一次试验中都不可能发生的事件. 用字母 $\varnothing$ 表示.

例如，在上述试验中，“点数为 8”是一个不可能事件.

显然，必然事件与不可能事件都是确定性事件，为讨论方便，今后将它们看作是两个特殊的随机事件，并将随机事件简称为**事件**.

五、事件的集合表示

由定义，样本空间 S 是随机试验的所有可能结果 (样本点) 的全体，每一个样本点是该集合的一个元素. 一个事件是由具有该事件所要求的特征的那些可能结果所构成的，所以一个事件是对应于 S 中具有相应特征的样本点所构成的集合，它是 S 的一个子集. 于是，**任何一个事件都可以用 S 的某个子集来表示**.

我们说某事件 A 发生，即指属于该事件的某一个样本点在随机试验中出现.

例如：在抛掷骰子的试验中，样本空间为 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 于是，事件 A：“点数为5”可表示为 $A=\{5\}$；

事件 B：“点数小于 5”可表示为 $B=\{1, 2, 3, 4\}$；

事件 C：“点数小于 5 的偶数”可表示为 $C=\{2, 4\}$.

我们称仅含一个样本点的事件为**基本事件**；称含有两个或两个以上样本点的事件为**复合事件**. 显然，样本空间 S 作为事件是必然事件，空集 $\varnothing$ 作为一个事件是不可能事件.

六、事件的关系与运算

因为事件是样本空间的一个集合，故事件之间的关系与运算可按集合之间的关系与运算来处理. 下面给出这些关系与运算在概率论中的提法和含义.

(1) 若 $A\subset B$, 则称事件 B **包含**事件 A, 或事件 A **包含于**事件 B, 或 A 是 B 的子事件. 其含义是：若事件 A 发生必然导致事件 B 发生. 显然，$\varnothing\subset A\subset S$.

(2) 若 $A=B$, 则称事件 A 与事件 B **相等**. 其含义是：若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，且若事件 B 发生必然导致事件 A 发生，即 $A\subset B$, 且 $B\subset A$.

(3) 事件 $A\cup B=\{e\mid e\in A$ 或 $e\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**和(或并)**. 其含义是：当且仅当事件 A, B 中至少有一个发生时，事件 $A\cup B$ 发生. $A\cup B$ 有时也记为 $A+B$.

类似地，称 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的**和事件**，称 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可数个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的**和事件**.

(4) 事件 $A\cap B=\{e\mid e\in A$ 且 $e\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**积**(**或交**). 其含义是：当且仅当事件 A, B 同时发生时，事件 $A\cap B$ 发生. 事件 $A\cap B$ 也记作 AB.

类似地，称 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的**积事件**，称 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可数个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的**积事件**.

(5) 事件 $A-B=\{e\mid e\in A$ 且 $e\notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**差**. 其含义是：当且仅当事件 A 发生，事件 B 不发生时，事件 $A-B$ 发生.

例如，在抛掷骰子的试验中，记事件

$$A:\text{“点数为奇数”},\quad B:\text{“点数小于 5”}.$$

则
$$A\cup B=\{1,2,3,4,5\};\quad A\cap B=\{1,3\};\quad A-B=\{5\}.$$

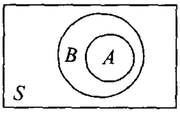
(6) 若 $A\cap B=\varnothing$, 则称事件 A 与事件 B 是**互不相容**的，或称是**互斥**的. 其含义是：事件 A 与事件 B 不能同时发生.

例如，基本事件是两两互不相容的.

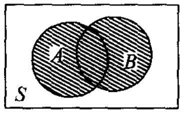
(7) 若 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$, 则称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**，或称事件 A 与事件 B 互为**逆事件**. 其含义是：对每次试验而言，事件 A、B 中必有一个发生，且

仅有一个发生．事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$．于是，$\overline{A}=S-A$．

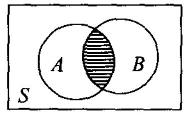
事件的关系与运算可用维恩图形象表之：



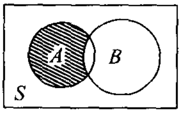
$A\subset B$



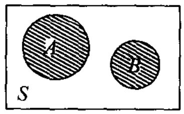
$A\cup B$ 或 $A+B$



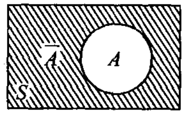
$A\cap B$ 或 AB



$A-B$



$A\cap B=\varnothing$



$\overline{A}=S-A$

注：易见，事件的运算满足如下基本关系：

① $A\overline{A}=\varnothing$；$A\cup\overline{A}=S$；$\overline{A}=S-A$．

② 若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$，$AB=A$．

③ $A-B=A\overline{B}=A-AB$；$A\cup B=A\cup(B-A)$．

(8) 完备事件组

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是有限或可数个事件，若其满足：

① $A_i\cap A_j=\varnothing$，$i\neq j$，$i, j=1, 2, \cdots$

② $\bigcup\limits_i A_i=S$．

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是一个**完备事件组**．

显然，$\overline{A}$ 与 A 构成一个完备事件组．

七、事件的运算规律

由集合的运算律，易给出事件间的运算律．设 A, B, C 为同一随机试验 E 中的事件，则有

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3) 分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

(4) 自反律 $\overline{\overline{A}}=A$；

(5) 对偶律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$．

注：上述各运算律可推广到有限个或可数个事件的情形．

例 1 甲，乙，丙三人各射一次靶，记 A –“甲中靶”，B –“乙中靶”，C –“丙中靶”，则可用上述三个事件的运算来分别表示下列各事件：

(1) “甲未中靶”: $\overline{A}$;

(2) “甲中靶而乙未中靶”: $A\overline{B}$;

(3) “三人中只有丙未中靶”: $AB\overline{C}$;

(4) “三人中恰好有一人中靶”: $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$;

(5) “三人中至少有一人中靶”: $A\cup B\cup C$ 或 $\overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}}$;

(6) “三人中至少有一人未中靶”: $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 或 $\overline{ABC}$;

(7) “三人中恰有两人中靶”: $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$;

(8) “三人中至少两人中靶”: $AB\cup AC\cup BC$;

(9) “三人均未中靶”: $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$;

(10) “三人中至多一人中靶”: $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\cup A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$;

(11) “三人中至多两人中靶”: $\overline{ABC}$ 或 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

注: 用其它事件的运算来表示一个事件，方法往往不唯一，如上例中的 (6) 和 (11) 实际上是同一事件, 读者应学会用不同方法表达同一事件, 特别在解决具体问题时，往往要根据需要选择一种恰当的表示方法.

习题 1-1

1. 试说明随机试验应具有的三个特点.

2. 将一枚均匀的硬币抛两次，事件 A,B,C 分别表示“第一次出现正面”, “两次出现同一面”, “至少有一次出现正面”. 试写出样本空间及事件 A,B,C 中的样本点.

3. 设某人向靶子射击 3 次，用 A_i 表示“第 i 次射击击中靶子” ($i=1, 2, 3$), 试用语言描述下列事件:

(1) $\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$; (2) $\overline{A_1\cup A_2}$; (3) $(A_1A_2\overline{A}_3)\cup(\overline{A}_1A_2A_3)$.

4. 下列各式哪个成立哪个不成立，说明为什么.

(1) 若 $A\subset B$, 则 $\overline{B}\subset\overline{A}$; (2) $(A\cup B)-B=A$; (3) $A(B-C)=AB-AC$.

5. 设 A、B 为两个事件, 若 $AB=\overline{A}\cap\overline{B}$, 问 A 和 B 有什么关系.

6. 化简 $\overline{(\overline{AB}\cup C)(\overline{AC})}$.

7. 证明: $(A\cup B)-B=A-AB=A\overline{B}=A-B$.

§1.2 随机事件的概率

对一个随机事件 A, 在一次随机试验中，它是否会发生，事先不能确定. 但我们

会问，在一次试验中，事件 A 发生的可能性有多大？并希望找到一个合适的数来表征事件 A 在一次试验中发生的可能性大小. 为此，本节首先引入频率的概念，它描述了事件发生的频繁程度，进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率.

一、频率及其性质

定义1 若在相同条件下进行 n 次试验，其中事件 A 发生的次数为 $r_n(A)$，则称 $f_n(A)=\dfrac{r_n(A)}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**.

易见，**频率具有下述基本性质**：

(1) $0 \le f_n(A) \le 1$;　　(2) $f_n(S)=1$;

(3) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_n).$$

根据上述定义，频率反映了一个随机事件在大量重复试验中发生的频繁程度. 例如，抛掷一枚均匀硬币时，在一次试验中虽然不能肯定是否会出现正面，但大量重复试验时，发现出现正面和反面的次数大致相等（见表 1-1-1），即各占总试验次数的比例大致为0.5，并且随着试验次数的增加，这一比例更加稳定地趋于0.5. 这似乎表明频率的稳定值与事件发生的可能性大小（概率）之间有着内在的联系.

例1 圆周率 $\pi=3.141\,592\,6\cdots\cdots$ 是一个无限不循环小数，我国数学家祖冲之第一次把它计算到小数点后七位，这个记录保持了1 000多年！以后有人不断把它算得更精确. 1873年，英国学者沈克士公布了一个 π 的数值，该数值在小数点后一共有707位之多！但几十年后，曼彻斯特的费林生对它产生了怀疑. 他统计了 π 的608位小数，得到了表 1-2-1:

表 1-2-1

数字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
出现次数	60	62	67	68	64	56	62	44	58	67

你能说出他产生怀疑的理由吗？

因为 π 是一个无限不循环小数，所以，理论上每个数字出现的次数应近似相等，或它们出现的频率应都接近于0.1，但7出现的频率过小. 这就是费林生产生怀疑的理由.

例2 检查某工厂一批产品的质量，从中分别抽取10件、20件、50件、100件、150件、200件、300件来检查，检查结果及次品出现的频率列入表 1-2-2.

表 1-2-2

抽取产品总件数 n	10	20	50	100	150	200	300
次品数 μ	0	1	3	5	7	11	16
次品频率 μ/n	0	0.050	0.060	0.050	0.047	0.055	0.053

由表 1-2-2 可看出，在抽出的 n 件产品中，次品数 μ 随着 n 的不同而取不同的值，但次品频率 $\frac{\mu}{n}$ 仅在 0.05 附近有微小变化．这里 0.05 就是次品频率的稳定值．

实际观察中，通过大量重复试验得到随机事件的频率稳定于某个数值的例子还有很多．它们均表明这样一个事实：当试验次数增大时，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 总是稳定在一个确定数 p 附近，而且偏差随着试验次数的增大而越来越小．频率的这种性质在概率论中称为**频率的稳定性**．频率稳定性的事实说明了刻画随机事件 A 发生的可能性大小的数——概率的客观存在性．

定义 2 在相同条件下重复进行 n 次试验，若事件 A 发生的频率 $f_n(A)=\frac{r_n(A)}{n}$ 随着试验次数 n 的增大而稳定地在某个常数 $p(0\le p\le 1)$ 附近摆动，则称 P 为**事件的概率**，记为 $P(A)$．

上述定义称为随机事件概率的统计定义．根据这一定义，在实际应用时，往往可用试验次数足够大时的频率来估计概率的大小，且随着试验次数的增加，估计的精度会越来越高．

例 3 从某鱼池中取 100 条鱼，做上记号后再放入该鱼池中．现从该池中任意捉来 40 条鱼，发现其中两条有记号，问池内大约有多少条鱼？

解 设池内有 n 条鱼，则从池中捉到一条有记号的鱼的概率为 $\frac{100}{n}$，它近似于捉到有记号的鱼的频率 $\frac{2}{40}$，即 $\frac{100}{n}\approx\frac{2}{40}$，解之得 $n\approx 2\,000$．故池内大约有 2 000 条鱼．

二、概率的公理化定义

任何一个数学概念都是对现实世界的抽象，这种抽象使得其具有广泛的适用性．概率的频率解释为概率提供了经验基础，但是不能作为一个严格的数学定义，从概率论有关问题的研究算起，经过近三个世纪的漫长探索历程，人们才真正完整地解决了概率的严格数学定义．1933年，前苏联著名的数学家柯尔莫哥洛夫，在他的《概率论的基本概念》一书中给出了现在已被广泛接受的概率公理化体系，第一次将概率论建立在严密的逻辑基础上．

定义 3 设 E 是随机试验，S 是它的样本空间，对于 E 的每一个事件 A 赋于一个实数，记为 $P(A)$，若 $P(A)$ 满足下列三个条件：

(1) 非负性：对每一个事件 A，有 $P(A)\ge 0$，

(2) 完备性：$P(S)=1$，

(3) 可列可加性：设 A_1，A_2，$\cdots$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i),$$