奥赛急先锋 系列丛书之 课堂知识与思维技能新演练 练

学科主编 刘汉文

奥赛急先锋

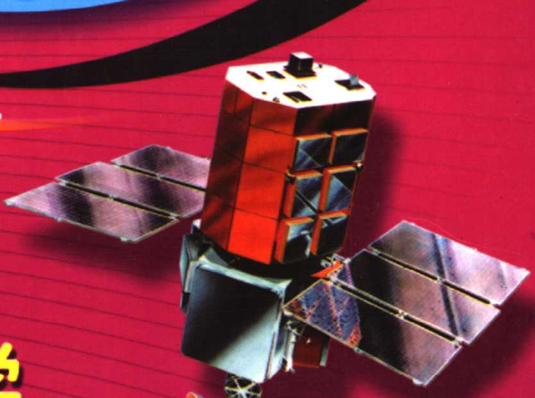
AoSai JiXianFeng

新课标 课堂知识与思维技能新演练

一个挑战自己的对手>

一个丰富知识的朋友>

一个出类拔萃的理由>



高一·数学

中国少年儿童出版社

奥赛急先锋 系列丛书之 课堂知识与思维技能新演练

学科主编 刘汉文

奥赛急先锋

AoSai JiXianFeng

新课标 课堂知识与思维技能新演练

高一·数学

本册主编：冯春保 丁明忠

编　　者：田祥高 张卫东 董知德 陈有功 黄浩胜 任 重 丁明忠 石 松 常 青 庄 重 兰天行 晨 旭 卓凤献 刘 辉 武龙人 程善祥 闻 广 严 谨

中国少年儿童出版社

图书在版编目（CIP）数据

新概念学科竞赛完全设计手册.高一数学/ 师达主编.
—3 版. —北京：中国少年儿童出版社
ISBN 7－5007－3785－8

Ⅰ.新…　Ⅱ.师…　Ⅲ.数学课－高中－教学参考资料
Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 032141 号

AOSAI JIXIANFENG

高一数学

出 版 发 行：中国少年儿童新闻出版总社
中国少年儿童出版社
出　版　人：海　飞

主　　编：师　达　　封面设计：人象设计工作室
责任编辑：惠　玮　　版式设计：辰　征
责任校对：刘　新　　责任印务：栾永生

社　　址：北京东四十二条二十一号　　邮政编码：100708
总 编 室：010-64035735　　传　　真：010-65012366
发 行 部：010-65535233　　010-64661322
http://www.ccppg.com.cn　　E -mail: zbs@ccppg.com.cn

印　　刷：合肥杏花印务股份有限公司　　经　　销：全国新华书店

开　　本：880×1230　1/32　　印　　张：12.625 印张
2006 年 6 月第 4 版　　2006 年 6 月第 8 次印刷
字　　数：275 千字　　印　　数：10000 册

ISBN 7－5007－3785－8 /G ·2552

语、数、英、化、物（共五册）总定价：65.00 元

出版说明

——新课标课堂同步与竞赛完美结合

随着新的课程标准在全国的逐渐推行，新的教学理念也在逐步完善，在平时教学和各种竞赛中对学生的各方面要求也有所改变。为了帮助同学们恰当处理竞赛与课堂的关系，拥有竞赛的水平，并能够在课堂、考试中得以体现，我们研究了最新的中小学教学大纲和考试大纲，参照各种版本的中小学教材，最早出版了这样的一套把课堂同步教学与竞赛完美结合的实用丛书。

为了使本丛书成为一套严谨的、科学的竞赛与考试结合读本，所有作者，包括主编刘汉文老师和全体参编人员——全国各地重点中小学的奥赛教练、一线特高级教师，尤其是湖北省黄冈市的众多老师，多年来一直不断的搜集资料，全心准备，勤奋工作着，使得这套丛书四年来畅销不衰。

在本丛书与广大读者见面的这四年里，我们收到了全国各地雪片般的读者来电来函，好评如潮，甚至有福建省福州市的一位读者和家长专程亲自到我们这里来向编辑致谢，告诉我们使用这套书三年多，她的学习成绩突飞猛进。我们还相互探讨怎样零距离适合学生学习使用。这给了我们更加足够的信心和力量，不断把这套丛书修订成为适合广大学生使用的常备书！

现把本丛书的多样化实用性一一简单介绍给大家，这也是作者的写作主旨和读者对本套书的认定：

◎**适应课堂教学**：循序渐进地进行针对性训练和提高，可以用于平时课堂教学配套练习，夯实你的基础知识；

◎**适应各类考试**：采用了大量的考试真题为例题或者练习，可以作为最实用的备考用书，提高你的考试成绩；

◎**适应素质教育**：可以增强学生的学习兴趣，尤其能够开拓学生的思维，提高动脑能力，培养你的创新能力；

◎**适应各种竞赛**：提取历年竞赛题中的精华题，按照专题分门别类，渗透多种解题技巧，帮助你创出竞赛佳绩。

欢迎您继续关注我们“奥赛急先锋”系列丛书！并把她介绍给你身边的每一个人！

目　录

奥赛 AO SAI JI XIAN FENG

第一讲 集合与容斥原理

本讲的主要内容有:集合的有关概念、运算和容斥原理. 学习这一讲,要注意深刻理解集合的概念,掌握集合的思想方法和容斥原理,善于运用集合的语言和方法表示数量关系,并会用集合分拆、容斥原理等方面的知识和方法解决有关的数学问题.

1.1 集 合

1. 集合与集合的关系

若 A 中元素都是 B 中元素,则称 A 为 B 的子集,记作 $A\subseteq B$,若 $A\subseteq B$,且 B 中至少有一元素 $b\notin A$,则称 A 为 B 的真子集,记作 $A\subsetneqq B$.

若 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq A$,则 $A=B$.

集合与集合的关系,有如下性质:

(1)$\phi\subseteq A$,特别地,若 $A\neq\phi$,则 $\phi\subsetneqq A$.

(2)$A\subseteq B,B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$.

(3)$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B;A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$.

(4)若 A 中元素有 n 个,则 A 的子集共有 2^n 个,真子集有 2^n-1 个.

2. 集合的运算

$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$;

$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$;

$\complement_S A=\{x|x\in S$ 且 $x\notin A\}$.

关于集合运算有以下常用结论:

(1)等幂律：$A\cap A=A, A\cup A=A$.

(2)同一律：$A\cap U=A, A\cup U=U, A\cap\phi=\phi, A\cup\phi=A$.

(3)交换律：$A\cap B=B\cap A, A\cup B=B\cup A$.

(4)结合律：$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$,

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

(5)分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

【典型范型】

●例1 如果集合 $X=\{x\mid x=2n+1, n\in\mathbf{Z}\}$，$Y=\{y\mid y=4k\pm 1, k\in\mathbf{Z}\}$，那么 ( )

A. $X\subsetneqq Y$ B. $Y\subsetneqq X$ C. $X=Y$ D. $X\neq Y$

思路分析 要弄清集合 X 和集合 Y 之间的关系，可以找出集合 X 和集合 Y 中的元素；或者看两个集合元素属性之间的关系；本题也可以直接用选择题的逻辑分析法去解答.

解法1 由题设直接列举集合 X、Y，得 $X=Y$，选 C.

解法2 由 $2n+1=\begin{cases}4k+1, n=2k,\\4k-1, n=2k-1,\end{cases}$ 知 $X=Y$，选 C.

解法3 X 为奇数的集合，而 Y 中的元素为奇数，故有 $Y\subseteq X$.

又任取 $x\in X$，则 $x=2n+1$，当 n 为偶数 $2k$ 时，$x=4k+1\in Y$；当 n 为奇数 $2k-1$ 时，$x=4k-1\in Y$，故 $X\subseteq Y$.

所以 $X=Y$.

解法4 （选择题的逻辑分析法）C，D 是矛盾关系，必有一真一假，从而 A，B 均假，又有 $X\supseteq Y$ 且 B 假，得 C 真.

●例2 集合 $A=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$，计算 A 中的二元子集两元素之和组成的集合 $B=\{3,4,5,6,7,8,9,10,11,13\}$，求集合 A.

思路分析 要求集合 A，只需求出集合 A 中的 5 个元素 x_1，

x_2,x_3,x_4,x_5. 而集合 B 中有10个元素，但不知道集合 B 中的每一个元素是集合 A 中的哪两个元素的和，于是，必须把 A 中的5个元素进行排序.

解　不妨设 $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$. 则

$$x_1+x_2=3 \quad ①$$

$$x_4+x_5=13 \quad ②$$

由于在 A 的二元子集中，每个元素出现4次，所以集合 B 的元素和为

$$4(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)$$
$$=3+4+5+6+7+8+9+10+11+13,$$ 得

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=19 \quad ③$$

由③-①-②，得 $x_3=3$. 又由于 x_1+x_3 仅大于 x_1+x_2，故 $x_1+x_3=4$. 得 $x_1=1$　⑤

由于 x_3+x_5 仅小于 x_4+x_5，故 $x_3+x_5=11$，从而 $x_5=8$　⑥

把⑤、⑥代入①、②，得 $x_1=2,x_4=5$. 所以 $A=\{1,2,3,5,8\}$.

说明　集合元素具有确定性、互异性、无序性. 利用集合元素的无序性，我们把集合 A 中的元素按大小排序，排序后就很容易找出集合 A 和集合 B 元素之间的关系. 这是解集合题的一种常见策略.

●例3　已知集合 $A=\{(x,y)\mid ax+y=1\}$，$B=\{(x,y)\mid x+ay=1\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$. 问：

(1)当 a 取何值时，$(A\cup B)\cap C$ 为含有2个元素的集合？

(2)当 a 取何值时，$(A\cup B)\cap C$ 为含有3个元素的集合？

思路分析　集合 A、B、C 分别是方程 $ax+y=1$，$x+ay=1$，$x^2+y^2=1$ 的解的集合. 本题只要求出 $(A\cup B)\cap C$，问题就明朗了，但 $A\cup B$ 就是两个方程 $ax+y=1$，$x+ay=1$ 解集的并集，其结果不能简洁地表示出来. 而 $A\cap B$ 是这两个方程组成方程组的解

集，运算过程容易得多，这样我们很自然地想到分配律$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

解 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$. $A\cap C$与$B\cap C$分别为方程组：

$$(\text{I})\begin{cases}ax+y=1,\\x^2+y^2=1;\end{cases}\qquad(\text{II})\begin{cases}x+ay=1,\\x^2+y^2=1.\end{cases}$$

的解集. 由(Ⅰ)解得$(x,y)=(0,1),\left(\frac{2a}{1+a^2},\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)$；由(Ⅱ)解得$(x,y)=(1,0),\left(\frac{1-a^2}{1+a^2},\frac{2a}{1+a^2}\right)$.

(1)使$(A\cup B)\cap C$恰有2个元素的情况只有两种可能：

$$①\begin{cases}\dfrac{2a}{1+a^2}=0,\\\dfrac{1-a^2}{1+a^2}=1;\end{cases}\qquad②\begin{cases}\dfrac{2a}{1+a^2}=1,\\\dfrac{1-a^2}{1+a^2}=0.\end{cases}$$

由①得$a=0$；由②得$a=1$.

故当$a=0$或1时，$(A\cup B)\cap C$恰有两个元素.

(2)使$(A\cup B)\cap C$恰有3个元素的情况是$\frac{2a}{1+a^2}=\frac{1-a^2}{1+a^2}$，解得$a=-1\pm\sqrt{2}$.

故当$a=-1\pm\sqrt{2}$时，$(A\cup B)\cap C$恰有3个元素.

说明 有些集合问题，它们的交集运算比并集运算更容易转化为其他的代数运算，常见的办法是用分配律把并集运算转化为交集运算. 当然也可以用分配律把交集运算转化为并集运算.

●例4 设函数$f(x)=x^2+bx+c(b,c\in\mathbf{R})$，集合$A=\{x\mid x=f(x),x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x=f(f(x)),x\in\mathbf{R}\}$. 证明：

(1)$A\subseteq B$；

(2)如果A为只含一个元素的集合，则$A=B$.

思路分析 要证明 $A\subseteq B$，只需由 $x_0\in A$ 能推出 $x_0\in B$. 第二问已知 A 为只含一个元素的集合，只需证明 B 也只含有一个与 A 相同的元素.

证明 (1) 设任意 $x_0\in A$，则 $x_0=f(x_0)$，而 $f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$，故 $x_0\in B$，所以 $A\subseteq B$.

(2) 设 $A=\{a\}(a\in\mathbf{R})$，则方程 $f(x)-x=0$ 有重根 a，于是 $f(x)-x=(x-a)^2$，$f(x)=(x-a)^2+x$. 从而 $x=f(f(x))$，即 $x=[(x-a)^2+(x-a)]^2+(x-a)^2+x$. 整理，得 $(x-a)^2[(x-a+1)^2+1]=0$.

因为 $x,a\in\mathbf{R}$，$(x-a+1)^2+1\neq0$，故 $x=a$，即 $B=\{a\}$，所以 $A=B$.

说明 对有关两个集合相等的问题，可采用如下思路去求解：

1. 验证两集合的元素相同，即两集合中各元素对应相等.
2. 利用定义，证两集合互为子集.
3. 若是用描述法表示的集合，则两集合的属性能够互推，即等价.
4. 对于两个有限集合，则元素个数相等、各元素之和相等、各元素之积相等是两集合相等的必要条件.

●**例 5** 试证：集合 $\{1,2,\cdots,2001,2002\}$ 中存在一个由 1602 个元素组成的子集，其中没有一个元素是另一个元素的 4 倍.

思路分析 证明的关键是要找到元素尽量多的集合，它是已知集合的子集，并且没有一个元素是另一个元素的 4 倍. 在 $1,2,\cdots,2002$ 这些元素中，把 4 倍大于 2002 的元素全部找出来组成集合 A_1，把余下的元素中，4 倍在 A_1 中全部去掉，再在余下元素进行挑选.

证明 因 $2002\div4=500\cdots2$，故任何一个大于 500 的整数与 4 的乘积都大于 2002. 记 $A_1=\{501,502,\cdots,2001,2002\}$. A_1 共有 1502 个元素.

$500\div4=125$，记 $A_2=\{126,127,\cdots,500\}$. A_2 共有 375 个元素，A_2 中每个元素的 4 倍都是 A_1 中的元素.

$125\div4=31\cdots1$，记 $A_3=\{32,33,\cdots,125\}$，A_3 共有 94 个元素，A_3 中每个元素的 4 倍都是 A_2 中的元素.

$31\div4=7\cdots3$，记 $A_4=\{8,9,\cdots,31\}$，A_4 共有 24 个元素，A_4 中每个元素的 4 倍都是 A_3 中的元素.

$7\div4=1\cdots3$，记 $A_5=\{2,3,\cdots,7\}$，A_5 共有 6 个元素，每个元素的 4 倍都是 A_4 中的元素.

$A_6=\{1\}$，A_6 中元素的 4 倍是 A_5 中的元素.

A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6 是集合 $\{1,2,3,\cdots,2001,2002\}$ 的一个划分. 由于 A_1,A_3,A_5 元素之和为 $1502+94+6=1602$. 故取 $A=A_1\cup A_3\cup A_5$ 即为所求.

说明 根据解题需要把集合 A 划分为 n 个两两不交的子集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，再找出满足条件的子集 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$.

●**例 6** 有限集 S 的全部元素的乘积，称为数集 S 的“积数”，今给出数集 $M=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{99},\frac{1}{100}\right\}$. 试确定 M 的所有偶数个（2 个，4 个，…，98 个）元素子集的“积数”之和的值.

思路分析 对于集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，要求偶数个元素子集的“积数”之和，即求 $a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_1a_n+a_2a_3+\cdots+a_2a_n+\cdots+a_{n-1}a_n+a_1a_2a_3a_4+\cdots$较为困难. 如果我们求集合 A 的所有非空子集“的积数”和，就容易联想到公式

$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)=1+a_1+a_2+\cdots+a_n+a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n+a_1a_2a_3+\cdots+a_{n-2}a_{n-1}a_n+\cdots+a_1a_2\cdots a_n$.

解 数集 M 中共有 99 个不同元素. 设 M 的所有偶数个元素子集的“积数”之和记为 G，所有奇数个元素子集“积数”之和记为 H. 由公式 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)=1+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+a_1a_2+\cdots+a_{n-1}a_n+a_1a_2a_3+\cdots+a_{n-2}a_{n-1}a_n+\cdots+a_1a_2\cdots$

a_n，易知

$$G+H=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{99}\right)\left(1+\frac{1}{100}\right)-1,$$

$$G-H=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{99}\right)\left(1-\frac{1}{100}\right)-1.$$

化简上面两式，得

$$G+H=\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{100}{99}\times\frac{101}{100}-1=\frac{99}{2},$$

$$G-H=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{98}{99}\times\frac{99}{100}-1=-\frac{99}{100}.$$

两式相加，得 $G=24.255$.

故 M 的所有偶数个元素子集“积数”之和为 24.255.

说明　解决本题要求学生有较强的联想能力，通过求“积数和”联想到乘法公式. 这个联想能力的形成一是要熟练地掌握公式的结构，特别是公式的逆向运用和变形运用，二是要多思考，善于抓住激发联想的诱因.

【练习 1.1】

1. 已知集合 $M=\{直线\}$，$N=\{抛物线\}$，则 $M\cap N$ 中元素个数为　　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 不存在

2. 已知全集 $I=\{1,2,3,4,5\}$，$A\cap B=\{2\}$，$C_IA\cap B=\{1,4\}$，则 $C_IB=$　　(　　)

A. $\{3\}$　　B. $\{5\}$

C. $\{1,2,4\}$　　D. $\{3,5\}$

3. 已知 $A_n=\{x\mid 2^n<x<2^{n+1}$，且 $x=7m+1$，$m,n\in\mathrm{N}\}$. 则 A_6 的各元素之和为　　(　　)

A. 1089　　B. 990　　C. 891　　D. 792

4. 已知集合 $A=\{x\mid x^2+(P+2)x+1=0\}$，且 $A\cap\mathrm{R}^+=\phi$.

则实数 P 的范围为　　　　（　　）

A. $P\geqslant -2$　　　　B. $P\geqslant 0$

C. $-4<P<0$　　　　D. $P>-4$

5. 设集合 $M=\{2002,2003,2004\}$，$N=\{x\mid x\in M\}$. 则集合 M 与 N 的关系　　　　（　　）

A. $M=N$　　　　B. $M\subset N$

C. $M\supset N$　　　　D. $M\cap N=\phi$

6. 若非空集合 $A=\{x\mid 2a+1\leqslant x\leqslant 3a-5\}$，$B=\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 22\}$. 则能使 $A\subseteq A\cap B$ 成立的所有 a 的集合为　　　　（　　）

A. $\{a\mid 1\leqslant a\leqslant 9\}$　　　　B. $\{a\mid 6\leqslant a\leqslant 9\}$

C. $\{a\mid a\leqslant 9\}$　　　　D. ϕ

7. 在集合 $M=\{1,2,3,\cdots,10\}$ 的所有子集中，有这样一族不同的子集，它们两两的交集都不是空集，那么这族子集最多有

（　　）

A. 2^{10} 个　　B. 2^{9} 个　　C. 10^{2} 个　　D. 9^{2} 个

8. 设 M 是集合 $S=\{1,2,3,\cdots,2002,2003\}$ 的子集，且 M 中每一个自然数(元素)仅含有一个 0. 则集合 M 所含元素最多有

（　　）

A. 324 个　　B. 243 个　　C. 495 个　　D. 414 个

9. 设 $S=\{(x,y)\mid 2^{2x}-3^{2y}=55,x,y\in \mathrm{N}\}$. 则 S 中元素个数为________.

10. 满足 $\{1,2\}\subseteq X\subseteq\{1,2,3,4,5\}$ 的集合 X 的个数为________.

11. 已知集合 A,B,C 满足 $A\subseteq B,A\subseteq C$，若 $B=\{0,1,2,3,4\}$，$C=\{0,2,4,8\}$. 则集合 A 的子集个数最多有________个.

12. 若 $A=\{1,3,a\}$，$B=\{1,a^{2}-a+1\}$，且 $A\supseteq B$. 则 $a=$________.

13. 已知集合 $N=\{x\mid a+1\leqslant x\leqslant 2a-1\}$ 是集合 $M=\{x\mid -2\leqslant$

$x \leqslant 5\}$ 的子集,则 a 的范围________.

14. 已知 $A=\{(x,y)\mid y=ax+2\}$,$B=\{(x,y)\mid y=|x+1|\}$.若 $A\cap B$ 为单元素集合,则实数 a 的取值范围______.

15. 集合 $A=\{8,x,y,z\}$,$B=\{1,yx,zy,zx\}$,若 $A=B\subset N$,则 $x+y+z=$________.

16. 同时满足下列两个条件的非空集合 S:(1)$S\subseteq\{1,2,3,4,5\}$;(2)若 $a\in S$,则 $6-a\in S$,那么 S 的个数为________.

17. 设 $M=\{1,2,3,\cdots,1995\}$,A 是 M 的子集且满足条件:当 $x\in A$ 时,$15x\notin A$,则 A 中元素的个数最多是________.

18. 设集合 $A=\{x\mid -3<x<2,x\in R\}$,已知 $x,y\in N$,$x>y$ 且满足 $x^3+19y=y^3+19x$,判断 $a=\log_{\frac{1}{2}}(x+y)$ 与集合 A 的关系________.

19. 设 $m,n\in N$ 且 $m>n$,集合 $A=\{1,2,\cdots,m\}$,$B=\{1,2,\cdots,n\}$,又 $C\subset A$,则满足 $B\cap C\neq\phi$ 的集合 C 的个数是__________.

20. 已知集合 $M=\{x,xy,\lg(xy)\}$,$N=\{0,|x|,y\}$,并且 $M=N$,那么 $\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(x^3+\frac{1}{y^3}\right)+\cdots+\left(x^{2003}+\frac{1}{y^{2003}}\right)$ 的值等于________.

21. 对 $S_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 的每一个非空子集 A,我们将 A 中每一个元素 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 都乘以 $(-1)^k$ 然后求和,则所有的这些和的总和为________.

22. 设 $A=\{x\mid x^2+ax+b=0\}$,$B=\{x^2+cx+15=0\}$,若 $A\cup B=\{3,5\}$,$A\cap B=\{3\}$,$I=\{1,2,3,4,5\}$,求 $C_I A\cap B$.

23. 设 $A=\{x\mid x=a^2+b^2,a,b\in Z\}$,$x_1,x_2\in A$,求证:$x_1\cdot x_2\in A$.

24. 已知 $A=\{x\mid x^2+px+q=0,x\in R\}$,$B=\{x\mid x^2-3x+2=0,x\in R\}$,且 $A\cap B=A$,求 p,q 的值或关系式.

25. 已知 S 是由实数组成的数集，且满足：(ⅰ) $1\notin S$；(ⅱ) $a\in S$ 则 $\frac{1}{1-a}\in S$. 回答下列问题：(1)证明：若 $2\in S$，则 S 中至少还含有其他两个元素，若 $a\in S$ 则 $1-\frac{1}{a}\in S$. (2)试问集合 S 可否为单元素集？

26. 设 $M=\{a\mid a=x^2-y^2,x,y\in Z\}$，求证：(1) $2k-1\in M,k\in Z$. (2) $4k-2\notin M,k\in Z$. (3)若 $p\in M,q\in M$，则 $pq\in M$.

27. 如果 $M=\{x\mid x=a^2+1,a\in N\}$，$P=\{y\mid y=b^2-4b+5,b\in N\}$. 证明：$M\subset P$.

28. 设集合 $M=\{u\mid u=12m+8n+4l,m,n,l\in Z\}$，$N=\{v\mid v=20p+16q+12r,p,q,r\in Z\}$，求证 $M=N$.

29. 设 $n\in N,n\geqslant 15$，A,B 都是 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的真子集，$A\cap B=\phi$，$A\cup B=\{1,2,3,\cdots,n\}$. 证明：$A$ 或者 B 中必有两个不同数的和为完全平方数.

30. 设 A 和 B 是两个集合，又设集合 X 满足 $A\cap X=B\cap X=A\cap B$，$A\cup B\cup X=A\cup B$，求集合 X.

31. 对于集合 $M=\{x\mid x=3n,n=1,2,3,4\}$，$N=\{x\mid x=3^k,k=1,2,3\}$，若有集合 S 满足 $M\cap N\subseteq S\subseteq M\cup N$，则这样的 S 有多少个？

32. 一个集合含有 10 个互不相同的两位数，试证：这个集合必有 2 个无公共元素的子集合，此两子集合的各数之和相等.

33. 在一次国际会议上，k 个科学家使用 p 种不同语言，如果任何两个科学家都至少使用一种共同语言，但没有任何两个科学家使用的语言完全相同，求证：$k\leqslant 2^{p-1}$.

34. 设 $A=\{1,2,\cdots,n\}$，对 $X\subseteq A$，记 X 各元素之和为 N_x，求 N_x 的总和 $\sum\limits_{x\subseteq A}N_x$.

35. 设 $a,b\in R$，$A=\{(x,y)\mid x=n,y=an+b,n\in Z\}$，$B=\{(x,

$y)|x=m, y=3m^2+15, m\in \mathrm{Z}\}$，$C=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 144\}$，讨论是否存在 a 和 b，使 $A\cap B\neq\phi$，且 $(a,b)\in \mathrm{C}$.

36. S_1, S_2, S_3 为非空整数集合，对于分别代表 1,2,3 中某一个不同数字的 i,j,k，若 $x\in S_i, y\in S_j$，则 $x-y\in S_k$.

(1)证明三个集合中至少有两个相等.

(2)三个集合中是否可能有两个集合无公共元素.

37. 设 $I=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$I\subsetneqq \mathrm{N}$ 且 $n>1$，对 $A\subseteq I, A\neq\phi$，定义 $\Pi(A)$ 为 A 中所有元素的乘积，设 $m(I)$ 表示 I 的所有 $\Pi(A)$ 的值的算术平均数，已知 $m(I)=9$，$k=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1}\}$，$a_{n+1}\in \mathrm{N}$，$m(k)=81$，求 $a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1}$ 的值.

1.2　容斥原理

若记有限集合 A 中的元素个数为 $|A|$，则由文氏图（如图 1–1，图 1–2 所示）.

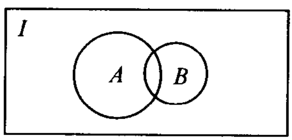


图 1–1

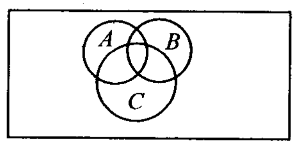


图 1–2

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|,$$

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|.$$

一般地，对于 n 个有限集合 $S_1,S_2,\cdots,S_n$，则有

$$|S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n|=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|S_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|S_i\cap S_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|S_i\cap S_j\cap S_k|-\cdots+(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}|S_{i1}\cap S_{i2}\cap\cdots\cap S_{ik}|+\cdots+(-1)^{n-1}|S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n|,$$