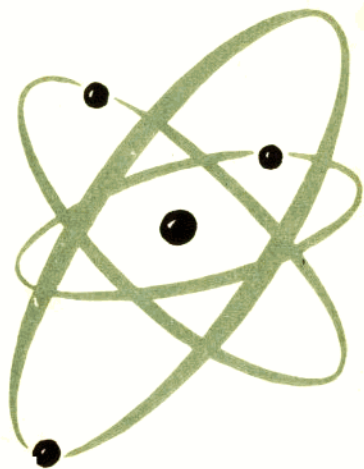




高考复习资料

数学



目 录

代 数

第一章	数	(1)
第二章	代数式	(9)
第三章	方程	(34)
第四章	不等式	(80)
第五章	函数	(101)
第六章	指数与对数	(129)
第七章	数列	(154)
第八章	排列、组合、数学归纳法、二项式定理	(169)
第九章	复数	(182)

平 面 三 角

第一章	三角函数	(194)
第二章	解三角形	(248)
第三章	反三角函数和三角方程	(281)

平 面 几 何

第一章	直线形	(304)
第二章	圆	(337)
第三章	证题法	(365)

立 体 几 何

第一章	直线和平面	(388)
第二章	简单几何体	(405)

平面解析几何

第一章 曲线与方程.....	(428)
第二章 直线.....	(447)
第三章 二次曲线.....	(466)
第四章 参数方程.....	(507)
第五章 极坐标.....	(521)

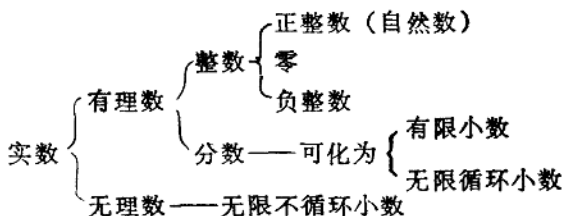
习题答案与提示

代数部分.....	(529)
平面三角部分.....	(555)
平面几何部分.....	(567)
立体几何部分.....	(568)
解析几何部分.....	(570)

代 数

第一章 数

一 实数系统



二 整 数

1. 奇数和偶数

不能被2整除的整数叫做奇数，能被2整除的整数叫做偶数。奇数可表为 $2n+1$ 或 $2n-1$ ，偶数可表为 $2n$ (n 是整数)。

2. 质数和合数

在自然数中除单位1外，其它只能被1和自己整除的数叫质数（或素数）；不但能被1和自己整除，而且能被其它的自然数整除的数叫合数，1既不是合数，也不是质数。

3. 最大公约数和最小公倍数

能够整除某一个整数的整数叫做这个数的约数；几个数的公共约数（也叫公因数）叫做这几个数的公约数；几个数

的公约数中最大的一个，叫这几个数的最大公约数（也叫最大公因数）如果两个数的最大公约数是1，则这两个数互质。求最大公约数的方法是：先把各个数分别分解质因数，然后取出它们所公有的质因数（相同的质因数照公有的个数取）相乘。还可用短除法来求。

能够被某一个数整除的数叫做这个数的倍数；几个数公有的倍数叫做这几个数的公倍数；几个数的公倍数中最小的一个数，叫做这几个数的最小公倍数。求最小公倍数的方法是：先把各个数分别分解质因数，取出其中一个数的全部质因数，再在另一个数里取出前一个数所没有或者不足的质因数，这样继续下去一直到最后一个数为止，最后把所有取出的质因数相乘。还可用短除法来求。

例1 分解下列各数成质因数连乘积形式，并求出其最小公倍数与最大公约数：420, 1260, 980。

$$\text{解：} 420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7,$$

$$1260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7,$$

$$980 = 2^2 \times 5 \times 7^2.$$

$$\therefore \text{最大公约数是 } 2^2 \times 5 \times 7 = 140,$$

$$\text{最小公倍数是 } 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 = 8820.$$

用短除法求：

2	420	1260	980
2	210	630	490
5	105	315	245
7	21	63	49
3	7	21	7
	1	3	7

$$\text{最大公约数是 } 2 \times 2 \times 5 \times 7 = 140,$$

最小公倍数是 $2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7^2 = 8820$.

三 有理数

每一个有理数都可以表示为既约分数 $\frac{m}{n}$ ($n \neq 0$, m, n 为整数且互质)。

每一个有理数 $\frac{m}{n}$ 都可以化为有限小数或者无限循环小数；反过来，每一个有限小数或者无限循环小数都可以化为 $\frac{m}{n}$ 的形式。

例2 把下列有限小数或者无限循环小数化成分数：

(1) 2.75; (2) $0.\dot{3}$.

解：(1) $2.75 = 2\frac{75}{100} = 2\frac{3}{4}$;

(2) 设 $x = 0.\dot{3}$, 则 $10x = 3.\dot{3}$.

$\therefore 10x - x = 3.\dot{3} - 0.\dot{3}, \quad 9x = 3.$

$x = \frac{1}{3} \quad \text{即} \quad 0.\dot{3} = \frac{1}{3}.$

例3 求证 $\sqrt{2}$ 是无理数。

证：(用反证法) 设 $\sqrt{2}$ 是有理数，则 $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, $\frac{m}{n}$ 是既约分数 即 m, n 为正整数，且 m 和 n 互质，把 $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ 两边平方得 $2n^2 = m^2$, $\therefore 2n^2$ 是偶数， $\therefore m^2$ 也是偶数，于是 m 是偶数，令 $m = 2p$ (p 为正整数). $\therefore 2n^2 = (2p)^2 = 4p^2, n^2 = 2p^2, \therefore 2p^2$ 是偶数， $\therefore n^2$ 也是偶数， n 一定也是偶数， n 和 m 都是偶数，就一定有公约数 2. 这与 m, n 互质矛盾， $\therefore \sqrt{2}$ 是有理数的假设不成立，因此 $\sqrt{2}$ 是无理数。

四 实 数

1. 几个重要概念

(1) 方根 如果 $x^n=a$ (整数 $n \geq 2$), 那么 x 叫做 a 的 n 次方根。

(2) 完全平方数、不尽根与无理数 有准确平方根的数叫做完全平方数。换句话说, 由一个整数、分数(包括循环小数)或有限小数自乘(平方)所得的数都是完全平方数, 并且也只有这样的数才是完全平方数。开方开不尽(不尽根)可以得到无理数, 但并不是所有无理数都是由开方得到的, 如 π 、 e 。

(3) 算术根 正数的正的方根叫做算术根, 零的算术根是零, 如果 $a > 0$ 用 $\sqrt[n]{a}$ 表示 a 的 n 次算术根, 这时, 算术根满足下列基本等式:

$$\textcircled{1} (\sqrt[n]{a})^n = a \quad (\sqrt[n]{a} \text{ 有意义, } n \text{ 是大于 } 1 \text{ 的整数})$$

$$\textcircled{2} \sqrt[n]{a^n} = a \quad (a \geq 0, n \text{ 是大于 } 1 \text{ 的整数})$$

(4) 数轴

数轴是规定了原点、单位长和方向的直线。

实数全体和数轴上点的全体一一对应。

(5) 相反数 和为零的两数叫互为相反数, 两相反数在数轴上关于原点对称。

(6) 绝对值 若 a 是实数, $|a|$ 叫做 a 的绝对值。

$$|a| = \begin{cases} a & (\text{当 } a > 0 \text{ 时}), \\ 0 & (\text{当 } a = 0 \text{ 时}), \\ -a & (\text{当 } a < 0 \text{ 时}), \end{cases}$$

(7) 倒数 如果两个数的积为1, 这两个数叫做互为倒

数。例如2与 $\frac{1}{2}$ ； $-\frac{3}{8}$ 与 $-\frac{8}{3}$ ； $x \neq 0$ ， $y \neq 0$ 时， $\frac{y}{x}$ 与 $\frac{x}{y}$ 互为倒数。

2. 实数的六种代数运算

加、减（第一级），乘、除（第二级），乘方、开方（第三级）的运算，一般由高级向低级进行，若有运算顺序符号如（ ）、[]、{ }等，则括号由小到大逐步解脱，同级运算则由左至右。

3. 实数的运算定律

a 、 b 、 c 为任意实数，则

$a+b=b+a$ （加法交换律）；

$(a+b)+c=a+(b+c)$ （加法结合律）；

$ab=ba$ （乘法交换律）；

$(ab)c=a(bc)$ （乘法结合律）；

$(a+b)c=ac+bc$ （乘法对加法的分配律）。

例4 计算：

$$-2\frac{1}{3} \div \frac{5}{4} \div \left(-3\frac{1}{2}\right) \times (-0.75) + \frac{2}{5} \times \left(-\frac{5}{2}\right).$$

$$\begin{aligned}\text{解：原式} &= -\frac{7}{3} \times \frac{4}{5} \times \left(-\frac{2}{7}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) \times \frac{5}{2} \times \left(-\frac{5}{2}\right) \\ &= \frac{7 \times 4 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5}{3 \times 5 \times 7 \times 4 \times 2 \times 2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

说明：①有小数、分数混合运算，把小数化为分数运算较为方便。②乘除混合运算时，注意结合律不能用，一般先化成连乘积。③乘除运算中，带分数要化成假分数。

4. 实数的近似计算

与一个量的实际数值完全一致的数，叫做这个量的准确值，与一个量的实际数值不完全一致的数，叫做这个量的近

似值。近似值中比准确值小的为不足近似值，大的为过剩近似值。

如果 $|A-a| \leq \underbrace{0.0\cdots 01}_{n\text{个}}$ ，就说 a 是 A 的精确到 $\underbrace{0.0\cdots 01}_{n\text{个}}$ 值

(精确到小数后 n 位) 的近似值。如圆周率 π 的值为 3.14159 2653589……，其常取的近似值为 3.1416 (精确到 0.0001) 有时也用这样的说法：圆周率的值为 3.1416 (± 0.0001)。

一个数的近似值，如精确到某一位，那么从左边第一个不是零的数字起，到这一位数字止，都叫做这个数的有效数字。

练 习 一

1. 把下列小数化为分数：0.386；0.25567。

2. 把下列各数分解质因数：

1978, 8475, 24640。

3. 求下列各组数的最大公约数与最小公倍数：

(1) 45, 30, 15 和 180；

(2) 1260, 2310 和 1995。

4. 391 是质数还是合数？

5. 分别求 $\frac{1}{3}$, 1, -2, $-3\frac{1}{3}$ 的倒数、相反数和负倒数。

6. 分别求 $1 + \sqrt{\frac{2}{3}}$, $|0|$, $|1-7|$ 的值。

7. 在数轴上表示 x 的范围：

$x \geq -2.51$, $x < 1$, $-2.3 < x \leq 3.7$ 。

8. 将 $|x| \geq 1$ 和 $|x| < 7$ 写成不带绝对值符号的不等式，并分别用数轴表示 x 的范围。

9. 设 a 是实数, 比较 a 和 $-a$ 的大小.

10. 比较下列每一组数的大小:

$1\frac{5}{6}$ 和 $1\frac{2}{3}$, 0 和 0.0001 , 0 和 -100 ,

$|-2|$ 和 -30 , -4 和 -5 .

11. 计算下列各题:

(1) $-1 - \left[1 - \left(1 - 0.5 \times \frac{1}{3} \right) \right] \times [2 - (-3)^2]$;

(2) $15\frac{3}{5} \div \left[\left(-2\frac{3}{4} \right) \times \left(-2\frac{2}{15} \right) + \left(-1\frac{13}{15} \right) \times 1\frac{3}{4} \right]$;

(3) $\left[(-5)^2 \times \left(-\frac{3}{5} \right) + 15 \right] \times 8 \div 7 + 1$;

(4) $-|(-3)^2| - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right)^3 \sqrt{(-3)^2}$;

(5) $\frac{1}{0.32} + \frac{3}{0.8} - \frac{0.1}{16} + \frac{0.3}{0.001}$;

(6) $\sqrt{0.0212}$ (精确到 0.001);

(7) $\sqrt{2\frac{2}{3}}$ (精确到 0.01).

12. 如果两个数的绝对值相等, 这两个数有什么关系?

13. 在正整数(自然数)范围内可以进行哪些运算? 在整数范围内可以进行哪些运算? 在有理数范围内可以进行哪些运算? 在实数范围内可以进行哪些运算?

14. 以下各组内的算式之间, 在运算上有什么区别:

2^3 和 3^2 , $(-3)^2$ 和 -3^2 , $(2 \times 3)^2$ 和 2×3^2 .

15. 在有理数范围内, 下列方程哪些有解? 哪些无解? 在实数范围呢?

(1) $5x + 4 = 0$; (2) $x^2 - 2 = 0$;

$$(3) (x-2)^2=9, \quad (4) x^2+1=0.$$

习 题 一

1. 求证：两个连续整数的平方差是奇数。

2. 比较下列各组数，并用 $>$ 、 $<$ 或 $=$ 连接：

$$(1) \sqrt{5} \text{ 和 } \sqrt[3]{11}; \quad (2) |ab| \text{ 和 } |a| \cdot |b|;$$

$$(3) \left| \frac{a}{b} \right| \text{ 和 } \frac{|a|}{|b|}; \quad (4) |a+b| \text{ 和 } |a|+|b|;$$

$$(5) |a-b| \text{ 和 } |a|-|b|.$$

3. 如果 α, β 都是无理数，能不能说它们的和、差、积、商仍是无理数？

4. 证明 $\lg 3$ 是无理数。

5. 求 x ：(1) 已知 $|x|=3$ ；

$$(2) \text{ 已知 } |2-x|=1;$$

$$(3) \text{ 已知 } |x+1|=|x|;$$

$$(4) \text{ 已知 } |2x+1|=-x.$$

6. 比较 $-\sqrt{59.51}$ 和 $-7\frac{5}{7}$ 的大小。

7. (1) 已知 $5.8^2=33.64$ 求 580^2 , 0.58^2 ;

(2) 已知 $\sqrt{3.7}=1.924$, $\sqrt{37}=6.083$,

求 $\sqrt{370}$, $\sqrt{3700}$, $\sqrt{0.037}$, $\sqrt{0.37}$ 的值。

8. 化简 $\sqrt{(-2.74)^2}$, $\sqrt{m^2-2mn+n^2} (m < n)$

9. 有理数 a, b, c 应满足什么关系，才能使下列方程 在有理数范围内有解。

$$ax^2-c=0; \quad ax^2+bx+c=0.$$

10. 在实数范围内，下列方程是否永远有解？(a, b 都

是实数, $a \neq 0$)

$$(1) \quad ax^2 - c = 0; \quad (2) \quad ax^2 + bx + c = 0.$$

第二章 代 数 式

一 代数式的一般概念

1. 代数式

用字母和数字以及一些代数运算符号(加、减、乘、除、乘方、开方)所组成的数学式子叫做代数式。

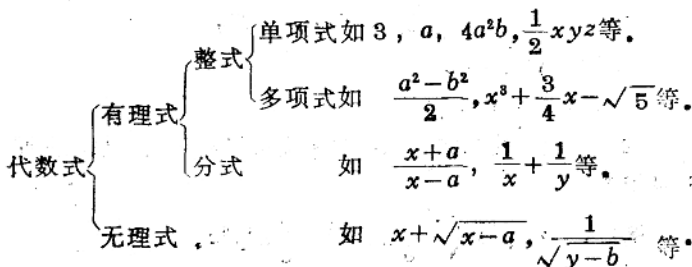
2. 代数式的值、代数式的恒等变形

如果用数字代替代数式里的字母,并且按照指定的顺序,进行指定的运算,所得的结果叫做代数式的值。

如果两个代数式,对于变数字母所容许取的各个(或者各组)值,都有相等的值,就说这两个代数式是恒等的。一个代数式用另一个与它恒等的代数式来换它,就把这种代换叫做恒等变换。

3. 代数式的分类

根据代数中对变数字母的运算种类,代数式可分为:



说明：① 3^x 、 $\lg x$ 、 $\sin 2x$ 不是代数式；② $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt[3]{8}$ 等是根式，但不是无理式， $\sqrt{x}$ 、 $\sqrt{\frac{2x}{3y}}$ 既是根式又是无理式；③对于按标准形式给出的多项式中，若所有项有相同的次数 $n(n>0)$ 称这个多项式为 n 次齐次多项式。

二 整 式

1. 整式的加法和减法

$$(1) \text{ 去括号, } a+(b+c)=a+b+c,$$

$$a-(b+c)=a-b-c.$$

即括号前是正号，去掉括号，括号内各项不变号。相反，括号前是负号，去掉括号，括号内各项都变号。

(2) 合并同类项：只需求出系数的代数和，而字母及其指数均不变。

2. 整式的乘法

(1) 幂的运算法则 (式中 m 、 n 为自然数)

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

$$a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m > n, a \neq 0), \\ 1 & (m = n, a \neq 0), \\ \frac{1}{a^{n-m}} & (m < n, a \neq 0), \end{cases}$$

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

$$(ab)^m = a^m b^m.$$

(2) 单项式的乘法 依据乘法交换律，系数相乘，同底数幂相乘。

$$\text{例1 } (-3x^2y^3) \cdot \left(-\frac{3}{5}xy^2z\right) = \frac{9}{5}x^3y^5z.$$

(3) 多项式的乘法 根据单项式的乘法法则, 按乘法分配律进行.

$$\begin{aligned}\text{例2 } (x+y)(2x-3y) &= 2x^2 + 2xy - 3xy - 3y^2 \\ &= 2x^2 - xy - 3y^2.\end{aligned}$$

这里要注意熟记和运用乘法公式

乘法公式:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3;$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.$$

多项式与多项式相乘, 有时可设法将它们变为与公式相似的形式, 然后利用公式以简化运算手续.

$$\begin{aligned}\text{例3 } (a+b-c)(a-b+c) \\ &= [a + (b-c)][a - (b-c)] \\ &= a^2 - (b-c)^2 \\ &= a^2 - b^2 + 2bc - c^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{例4 } (x-1)(x^2-x+1)(x+1)(x^2+x+1) \\ &= [(x-1)(x^2+x+1)][(x+1)(x^2-x+1)] \\ &= (x^3-1)(x^3+1) \\ &= x^6-1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{例5 } (x^2-3x-2)(x^2-3x+3) \\ &= [(x^2-3x)-2][(x^2-3x)+3] \\ &= (x^2-3x)^2 + (x^2-3x) - 6 \\ &= x^4 - 6x^3 + 9x^2 + x^2 - 3x - 6 \\ &= x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x - 6.\end{aligned}$$

3. 整式的除法

(1) 单项式除以单项式 可由单项式相乘的方法求解。

例6 $abx^{m+n}y^{p+q} \div ax^my^p = bx^ny^q$ 。

(2) 多项式除以单项式 把除式的单项式遍除多项式的各项而求各个商的代数和。

例7 $(9x^3 + 12x^2 - 4x) \div (-36x^4)$

$$\begin{aligned} &= \frac{9x^3}{(-36x^4)} + \frac{12x^2}{(-36x^4)} + \frac{(-4x)}{(-36x^4)} \\ &= -\frac{1}{4x} - \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{9x^3}. \end{aligned}$$

(3) 多项式除以一个多项式 多项式 M 除以多项式 N 的意思是求出另一个多项式 Q (商式)和 R (余式),且满足两项要求:① $M=QN+R$;②多项式 R (余式)的次数低于多项式 N 的次数,可以仿照算术中多位数的除法进行。

例8 以 $1+x^2-3x$ 除 $2x^3+3x^2+1-5x$ 求商式和余式

解: 被除式与除式按 x 的降幂排列

$$\begin{array}{r} 3x+11 \\ x^2-3x+1 \overline{) 3x^3+2x^2-5x+1} \\ \underline{3x^3-9x^2+3x} \\ 11x^2-8x+1 \\ \underline{11x^2-33x+11} \\ 25x-10 \end{array}$$

商式 $Q=3x+11$, 余式 $R=25x-10$ 。

练习二

1. 下列各式是否为代数式, 指出所属最小分类: (a , $b, c, \dots$ 是常数字母; $x, y, \dots$ 是变数字母) $2a, 0, \frac{x+1}{\sqrt{x}}$,

$$\frac{4y}{\sqrt{3}}\cos x, 2^x, ax^2+bx+c, \frac{x-y}{a+b}, \lg(x+1), (x+y)^{-2}$$

2. 用代数式表示:

(1) a 与 b 的和平方的平方减去 a 与 b 的平方和;

(2) a 的平方的相反数与 b 的相反数的平方差。

当 $a=-2$ 、 $b=-3$ 时, 分别求出这些代数式的值。

3. 化简:

$$(1) -(a+b)+[-a-(2a-b)]-6(a-4b);$$

$$(2) 6x-\{4x+[2x-(-3x+5x+7-10x)+3]-8\}.$$

4. 用公式计算:

$$(1) (a-b+c)^2;$$

$$(2) (x+y+z)(x+y-z);$$

$$(3) (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2);$$

$$(4) (x^2-x+7)(x^2+x-7);$$

$$(5) (1-x)(1+x)(1+x^2);$$

$$(6) (x+2y+3)(x+2y-1);$$

$$(7) (2x-y)(4x^2+2xy+y^2);$$

$$(8) (2x+3y)^3;$$

$$(9) \left(3ab-\frac{1}{3}c\right)^3;$$

$$(10) (1+3a)(1-3a+9a^2).$$

5. 计算:

$$(1) (x^4+x^2+1)\div(x^2-x+1);$$

$$(2) (x^2-7x+12)\div(x-3).$$

6. $x=98$ 求下列各式的值:

$$(1) x^2-5x-14;$$

$$(2) \quad 10x^2 - 40;$$

$$(3) \quad (x+3)^2 - (x-2)^2 + 5.$$

$$7. \quad a+b=90, \quad a-b=10, \quad \text{求 } 2(a^2+b^2)-110 \text{ 的值.}$$

$$8. \quad x+y=10, \quad xy=24, \quad \text{求 } 5x^2+5y^2 \text{ 的值.}$$

$$9. \quad \text{求证: } (ax+by)^2 + (ay-bx)^2 = (a^2+b^2)(x^2+y^2).$$

$$10. \quad \text{求证: } (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 \\ = 3(a-b)(b-c)(c-a).$$

$$11. \quad \text{求证: } (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ = a^3+b^3+c^3-3abc.$$

三 多项式的因式分解

1. 因式分解的意义

把一个多项式化成几个整式的积叫做因式分解。

2. 因式分解的基本方法

$$(1) \quad \text{提取公因式法} \quad ma+mb+mc=m(a+b+c).$$

$$(2) \quad \text{公式法 (就是反过来应用乘法公式):}$$

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b);$$

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2;$$

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3;$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$$

$$(3) \quad \text{分组分解法} \quad ma+mb+na+nb \\ = m(a+b) + n(a+b) \\ = (a+b)(m+n).$$

二次三项式 ax^2+bx+c 还可以利用下列方法进行分解。

(4) 配方法

将二次三项式 ax^2+bx+c 的首项系数提出括号外，