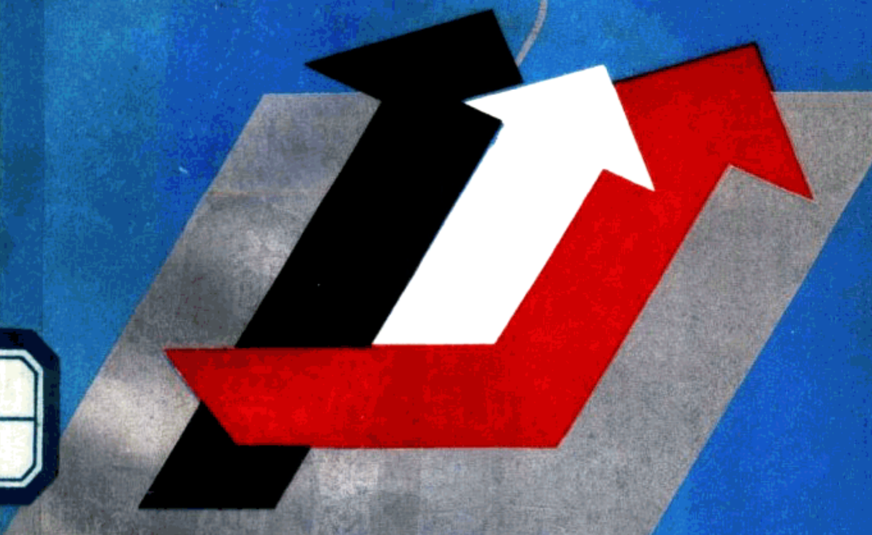
中等专业学校适用

数 学

第3册

基础数学

辽宁省中专数学教材编写组 编



机械工业出版社

主　编： 陶增骈

副主编： 张咸卓、李大发、由震云

编　委：（按姓氏笔划为序）

于殿生　王化久　王禤琛　马　骦

方桂梅　邓崇尧　由震云　刘晓东

李大发　李玉臣　李学之　李廷雄

朱学喜　张咸卓　孟繁杰　胡晋延

赵广春　陶增骈　贾景华　崔润泉

蔡恒利

前　言

本教材是以1991年国家教育委员会职业教育司审订的《工科中等专业学校数学教学大纲》为依据，根据中等专业学校数学教学内容要降低理论、加强应用，整体优化的原则，在辽宁省教育委员会的指导下，组织辽宁省部分中等专业学校长期从事中专数学教学的高级讲师、讲师进行编写的。在编写内容上注意了与现行初中数学教材的衔接；在保证基础知识的基础上，加强了基本应用；在推理论证的方式选择上，力求避繁就简、科学直观。为了适应当今科学技术发展的需要，在本书的附录里，增添了计算器使用的内容。

本教材分基础数学（第1、2、3册）和应用数学（第4册）两部分，招收初中毕业生的学校用1～4册，招收高中毕业生的学校用3～4册。文中带有“*”号的为选学内容。

本册是基础数学第3册，包括极限与连续、一元函数微积分。参加本册编写的有：王化久、林冬梅、王仁成、杨汉山、孟繁杰、李大发。本册主编为沈阳机电工业学校王化久、辽宁省医疗器械学校李大发，主审为鞍山冶金运输学校王福琛。

由于时间仓促、水平所限，不当之处敬请读者批评指正，以便修订。

辽宁省中专数学教材编写组

1992.3.

目　　录

第十五章　函 数 的 极 限

极限是数学中重要的基本概念，也是微积分学的基础。本章将在复习和加深函数有关知识的基础上，着重讨论函数的极限并介绍函数的连续性。

§15-1　函数及其特性

一、函数的概念

1．函数的定义

定义　如果对于数集 D 中的每一个数 x，按照某个对应关系，y 都有唯一确定的值和它对应，那么 y 就叫作定义在数集 D 上的 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$。x 叫作**自变量**，数集 D 叫作函数的**定义域**，当 x 取遍 D 中的一切数值时，与它对应的函数值的集合 M 叫作函数的**值域**。（如图 15-1所示）。

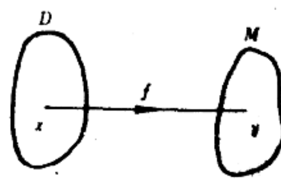


图　15-1

在函数的定义中，并没有要求自变量变化时，函数的对应值一定要变。重要的是：对于每一个 $x\in D$，都有确定的 $y\in M$ 与之对应。由此可知 $y=C$（C 是常量）也是自变量 x 的函数，因为当 $x\in R$ 时，都有确定的 C 值和它对应

2．函数的定义域　当我们研究函数时，必须注意它的

定义域。在解决实际问题时，应根据问题的实际意义来确定定义域。例如，圆的面积A与它的半径r之间的函数关系由公式$A=\pi r^2$给定，当半径r取任何正数时，由公式可以确定圆面积A的相应数值，所以函数$A=\pi r^2$的定义域为无限区间$(0,\ +\infty)$。当函数用数学式子表达时，它的定义域应该使这数学式子的运算有意义。一般可按以下几个方面去求函数的定义域：

（1）当函数为分式时，分母不能为零。

（2）当函数为偶次根式时，根号内的式子必须大于或等于零。

（3）当函数为对数式时，真数必须大于零。

（4）在$\arcsin u$或$\arccos u$中必须$|u|\leqslant 1$。

（5）如果函数表达式中含有分式、根式、对数式及反三角函数式，则应取各部分定义域的交集。

例1　求下列函数的定义域：

（1）$y=x^2-2x+3$　　（2）$y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$

（3）$y=\lg\dfrac{x}{x-2}$　　（4）$y=\sqrt{x^2-4}+\arcsin\dfrac{x}{2}$

解　（1）$y=x^2-2x+3$

因为当x取任何实数时，y都有确定的值与它对应，所以函数的定义域为$(-\infty,\ +\infty)$。

注：当函数是多项式时，定义域为$(-\infty,\ +\infty)$。

（2）$y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$

由$4-x^2\neq 0$得$x\neq\pm 2$；又由$x+2\geqslant 0$得$x\geqslant -2$，所以函数的定义域为$(-2,\ 2)\cup(2,\ +\infty)$。

（3）$y=\lg\frac{x}{x-2}$

由$\frac{x}{x-2}>0$得$x>2$或$x<0$，所以函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$。

（4）$y=\sqrt{x^2-4}+\arcsin\frac{x}{2}$

由$x^2-4\geqslant0$得$|x|\geqslant2$，即$x\geqslant2$或$x\leqslant-2$，又由$\left|\frac{x}{2}\right|\leqslant1$得$-2\leqslant x\leqslant2$，所以函数的定义域为$x=\pm2$。

应当注意：

（1）函数的定义域不一定是区间。如（4）的定义域是孤立的点±2。

（2）仔细地研究一下函数的定义，就可以发现，构成函数的要素有两个，即定义域和对应关系。两个函数只有当它们的定义域和对应关系完全相同时，这两个函数才相同。

如函数$y=\sin^2x+\cos^2x$与$y=1$，它们的定义域和对应关系都相同，所以它们是相同的函数。

又如$y=\frac{x^2-1}{x-1}$与$y=x+1$，它们的定义域不同，所以它们不是相同的函数。

3．函数与函数值的记号　y是x的函数，可以记作$y=f(x)$，也可以记作$y=g(x)$、$y=\varphi(x)$、$y=F(x)$，这里的“f”、“g”、“φ”、“F”表示y与x之间的对应关系，它们是可以任意采用的。但如果要同时讨论几个不同函数，为了区别清楚，就必须采用不同的函数记号来表示。

函数$y=f(x)$当$x=x_0(x_0\in D)$时，对应的函数值记作$f(x_0)$或$y|_{x=x_0}$，并称函数在x_0处有定义。

例 2 已知 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，求 $f(1)$、$f(0)$、$f(-2)$、$f(a^2)$。

解 $f(1)=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$ $f(0)=\dfrac{1}{1+0}=1$

$f(-2)=\dfrac{1}{1+(-2)}=-1$ $f(a^2)=\dfrac{1}{1+a^2}$

例 3 若 $\varphi(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$，求 $\varphi(-2)$、$\varphi(a)$。

解 $\varphi(-2)=\dfrac{|-2-2|}{-2+1}=-4$ $\varphi(a)=\dfrac{|a-2|}{a+1}$

4．函数的表示法 表示函数的方法，常用的有公式法、表格法和图象法三种。以后我们所讨论的函数常用公式法来表示。

有时，会遇到一个函数在不同的范围内用不同的式子表示。

如 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$ 是定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内的一个函数。当 $x<0$时，$f(x)=-x$；当 $x\geqslant 0$时，$f(x)=\sqrt{x}$。它的图象如15-2所示。

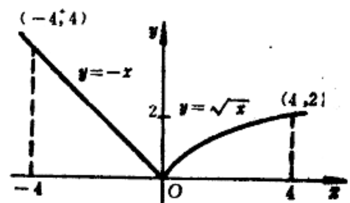


图 15-2

在不同的范围内用不同的式子来表示的函数叫作分段函数。

求分段函数的函数值时，应把自变量的值代入相应取值范围的表达式进

行计算。

例如，在上面的分段函数中，$f(4)=\sqrt{4}=2$，$f(-4)=-(-4)=4$。

二、函数的几种特性

1．函数的奇偶性

定义 如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，那么 $f(x)$ 叫作**奇函数**；如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x，都有 $f(-x)=f(x)$，那么 $f(x)$ 就叫作**偶函数**。若 $f(x)$ 既非奇函数，又非偶函数，那么 $f(x)$ 叫作**非奇非偶函数**。

例如，函数 $f(x)=x^3$ 对于定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内的一切 x，都有 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$，所以函数 $f(x)=x^3$ 是奇函数。又如函数 $\varphi(x)=x^2$ 对于定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内的一切 x，都有 $\varphi(-x)=(-x)^2=x^2=\varphi(x)$，所以 $\varphi(x)=x^2$ 是偶函数。

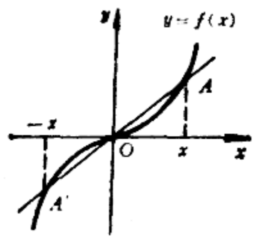


图 15-3

对于奇函数，在 x 和 $-x$ 处对应的函数值的绝对值相等，符号相反，其图形关于原点对称（见图15-3）。

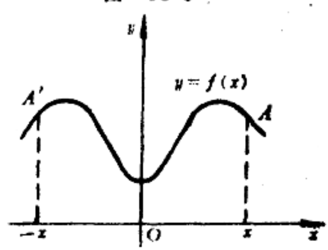


图 15-4

对于偶函数，在 x 和 $-x$ 处对应的函数值相等，其图形关于 y 轴对称

（见图15-4）。

应当注意：根据定义，参看图15-3和图15-4可知，奇函数和偶函数的定义域必须关于原点对称。

例 4 判断下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=x^4-2x^2$ （2）$y=\sin x$

（3）$y=\cos x$ （4）$f(x)=x^2+x$

解 （1）$f(x)=x^4-2x^2$是偶函数，因为$f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2=x^4-2x^2=f(x)$；

（2）$y=\sin x$是奇函数，因为$\sin(-x)=-\sin x$；

（3）$y=\cos x$是偶函数，因为$\cos(-x)=\cos x$；

（4）$f(x)=x^2+x$是非奇非偶函数，因为$f(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x$，它既不等于$-f(x)=-(x^2+x)$，又不等于$f(x)=x^2+x$，所以是非奇非偶函数。

2．函数的单调性

定义 函数$f(x)$对于区间(a,b)内任意两点x_1与x_2，当$x_1<x_2$时，如果$f(x_1)<f(x_2)$，那么就称函数$f(x)$在区间(a,b)内**单调增加**，区间(a,b)叫作函数$f(x)$的单调增加区间；如果$f(x_1)>f(x_2)$，那么就称函数$f(x)$在区间(a,b)内**单调减少**，区间(a,b)叫作函数$f(x)$的单调减少区间。

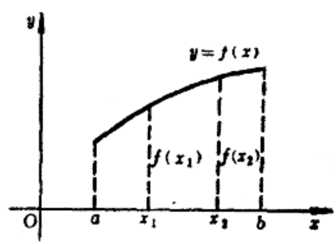


图 15-5

直观地说，单调增加的函数，它的图象是随着x的增加而上升的曲线（见图15-5）；单调减少的函数，它的图象是随着x的增加而下降的曲线（见图15-6）。

例如，由图15-7可知，函数 $y=x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的，在 $(-\infty, 0)$ 是单调减少的，而在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调函数。

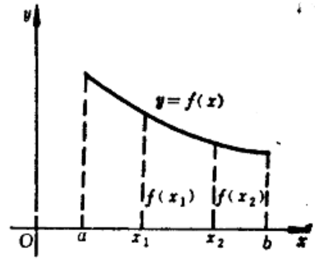


图 15-6

又如 $y=\log_a x$ $(a>1)$，在定义域 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的；$y=\log_a x$ $(0<a<1)$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 内是单调减少的。（图15-8）

3. 函数的周期性

定义 给定函数 $f(x)$，如果存在一个正数 l，使得对于定义域内的一切 x，等式 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，则函数 $f(x)$ 叫作**周期函数**。满足这个等式的最小正数 l 叫作这个函数的**周期**。

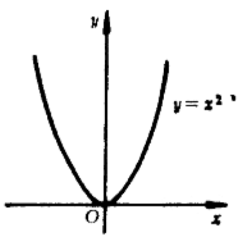


图 15-7

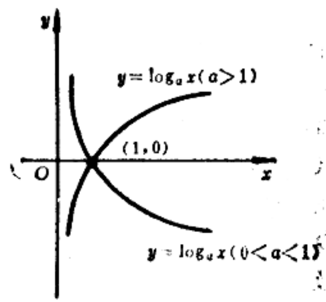


图 15-8

其图象的特点是：自变量在定义域内每隔一固定长度 l 的相邻区间上，图象有相同的形状（见图15-9）。

我们知道，$y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期

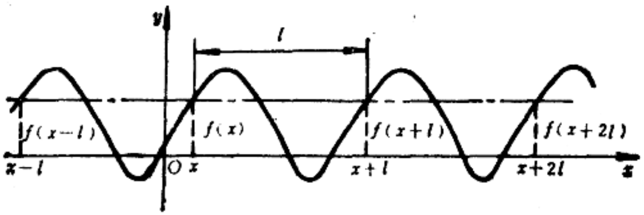


图 15-9

函数，$y=\operatorname{tg}x$和$y=\operatorname{ctg}x$ 都是以 π 为周期的周期函数。$y=A\sin(\omega t+\varphi)(\omega>0)$ 也是周期函数，其周期为$\dfrac{2\pi}{\omega}$。

4．函数的有界性

定义 设函数 $f(x)$在区间 (a,b) 内有定义，如果存在一个正数M，对于区间(a,b)内的一切 x，不等式$|f(x)|\leqslant M$恒成立，那么就称 $f(x)$在 (a,b) 内**有界**。如果这样的数M不存在，则称 $f(x)$在 (a,b) 内**无界**。

例如，$y=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内有界，因为对于一切$x\in R$，$|\sin x|\leqslant 1$都成立，这里$M=1$。

又如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，在区间 $(0,1)$ 内是无界的，因为对于 $(0,1)$ 内的一切x，不存在正数M，使

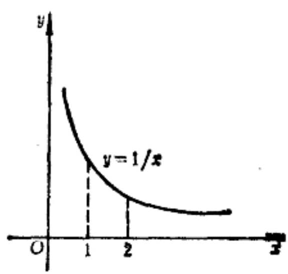


图 15-10

$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$恒成立。但$f(x)=\dfrac{1}{x}$在 $(1, 2)$ 内有界，因为对于

$(1,2)$内的一切x，都有$\left|\frac{1}{x}\right|<1$成立，这里$M=1$（见图15-10）。

三、反函数

在研究一个函数时，自变量和因变量的地位往往是相对的，如设某种商品销售总收入为y，销售量为x，已知该商品的单价为a，如果给定了销售量x，则通过关系式$y=ax$确定销售总收入y，y是x的函数。反过来，如果给定销售总收入y，则可以由关系式$x=\frac{y}{a}$确定销售量x，x是y的函数。我们称后一函数$\left(x=\frac{y}{a}\right)$是前一函数（$y=ax$）的反函数，或者说它们互为反函数。一般地有：

定义 设函数$y=f(x)$，其定义域为D，值域为M。如果对于每一个y值（$y\in M$），根据$y=f(x)$的关系，都有唯一确定的x值（$x\in D$）与之对应，那么所确定的以y为自变量的函数$x=\varphi(y)$叫作函数$y=f(x)$的**反函数**，它的定义域为M，值域为D。

习惯上，函数的自变量都用x表示，所以反函数也可以表示为$y=\varphi(x)$或者$y=f^{-1}(x)$。

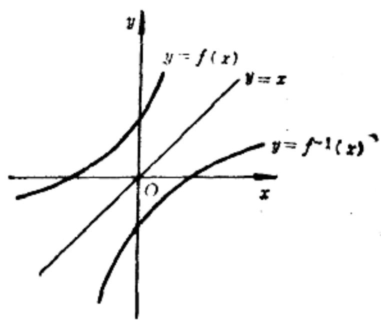


图 15-11

函数$y=f(x)$的图象和它的反函数$y=f^{-1}(x)$的图象关

于直线 $y=x$ 对称（见图15-11）。

例5 求 $y=x^3$的反函数并作图。

解 $y=x^3$ 的反函数是 $x=\sqrt[3]{y}$ 或 $y=\sqrt[3]{x}$；$y=x^3$ 的图形与 $y=\sqrt[3]{x}$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称（见图15-12）。

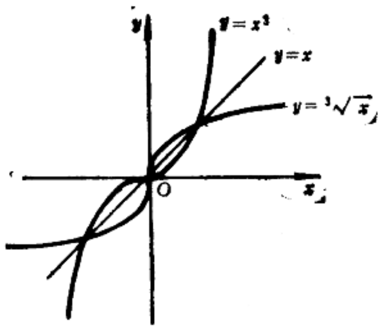


图 15-12

练 习

1. 填空：

（1）函数的对应值是否一定要随着自变量的改变而改变？答：__________。

（2）记号 $f(x)$ 与 $f(a)$ 的区别是__________。

（3）设 $f(x)=\dfrac{2-x}{x+1}$，则 $f(0)=$________，$f(1)=$________，$f(a)=$________。

（4）$y=\dfrac{1}{x}$的定义域为__________；$y=\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$ 的定义域为__________。

（5）$f(x)=\frac{x}{x}$ 与 $\varphi(x)=1$ 是不是相同的函数?答：____，其原因是________________________。

（6）若 $y=\lg x$ 是增函数，而 $y=\sin x$ 是减函数，则角 x 所在的象限为__________。

2．求函数 $y=2x$ 的反函数并作图。

习　题　15-1

1．求下列函数的定义域：

（1）$y=x^4-2x^2+3$　　（2）$y=\ln x^2$

（3）$y=\sqrt{5-2x}$　　（4）$y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$

（5）$y=10^{\sqrt{16-x^2}}$　　（6）$y=\sqrt{x^2-4}+\lg(x-2)$

（7）$y=\lg\sin x$　　（8）$y=\arccos(x-3)$

2．已知 $f(x)=\ln x$，求 $f(1)$、$f\left(\frac{1}{e}\right)$。

3．设 $f(x)=\begin{cases}-x-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ -x+1 & x>0\end{cases}$，求 $f(-1)$、$f(0)$、$f(2)$。

4．判断下列各对函数是否相同？为什么？

（1）$f(x)=\frac{2x^2-2}{x-1}$ 和 $\varphi(x)=2(x+1)$

（2）$f(x)=\ln x^2$ 和 $\varphi(x)=2\ln x$

（3）$f(x)=x$ 和 $\varphi(x)=(\sqrt{x})^2$

（4）$f(x)=x$ 和 $\varphi(x)=\sqrt[3]{x^3}$

5．求函数 $y=1-x^2$ 的单调区间。

6．证明函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加。

7．判断下列函数的奇偶性。

（1）$f(x)=x^3-2x$　　　（2）$\varphi(x)=\lg x$

（3）$f(x)=1+x^2$　　　（4）$\varphi(x)=x^2+x^3$

（5）$y=x\cos x$

8. 求出下列各函数的周期：

（1）$y=\cos(x-2)$　　　（2）$y=\sin 3x$

（3）$y=\sin^2 x$　　　（4）$y=\cos \pi x$

（5）$y=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)$　　　（6）$y=1+\lg x$

9. 求下列函数的反函数：

（1）$y=\sqrt[3]{x+1}$　　　（2）$y=\dfrac{1-x}{1+x}$

（3）$y=\lg(x+1)$　　　（4）$y=3\sin 2x$

§15-2　初等函数

一、基本初等函数

我们学过的五种函数：幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为实数）、指数函数 $y=a^x$（$a>0$且$a\neq 1$）、对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$且$a\neq 1$）、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数。

现把常用的基本初等函数的定义域、值域、图象和性质列于表15-1。

二、复合函数

在很多实际问题中，变量间的函数关系往往是比较复杂的。

例如，设有质量为 m 的物体，以初速度 v_0 垂直上抛，求它的动能 E 与时间 t 之间的函数关系。

由物理学知道，如果物体运动的速度为 v，则动能 E 与速度 v 之间的函数关系为 $E=\dfrac{1}{2}mv^2$，即动能 E 是速度 v 的