UMSS

大学数学科学丛书——10

混合有限元法基础及其应用

罗振东 著

科学出版社
www.sciencep.com

大学数学科学丛书　10

混合有限元法基础及其应用

罗振东　著

国家自然科学基金(批准号：10471100，40437017)
和北京市自然科学基金资助项目

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书首先简单介绍有限元方法，然后着重介绍混合有限元方法的基本概念、基本理论、基本方法及应用，其中包括有限元法的适定性和收敛性理论分析；非线性发展方程的混合有限元法及其数值计算方法；定常的热传导-对流方程的混合有限元方法；非定常的热传导-对流方程的混合有限元方法等内容. 通过一些典型的例子和一些本学科的前沿应用实例说明混合有限元法的应用前景，其中包括作者近年来的一些研究工作. 本书内容丰富，编排上采用循序渐进方式，先从典型的问题着手，再进行分析讨论，导出有关理论方法，易于读者理解掌握.

本书既适合理科工科院校相关专业的研究生或本科生作为教材，又可以作为从事数值分析的工程技术人员自学和进修计算方法的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

混合有限元法基础及其应用/罗振东著. 一北京：科学出版社，2006

（大学数学科学丛书；10/李大潜主编）

ISBN 7-03-016821-6

Ⅰ. 混…　Ⅱ. 罗…　Ⅲ. 混合元法-研究　Ⅳ. O241. 82

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 006999 号

责任编辑：吕　虹／责任校对：张怡君

责任印制：安春生／封面设计：王　浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2006年3月第一版　开本：B5（720×1000）

2006年3月第一次印刷　印张：26 3/4

印数：1—3 000　字数：511 000

定价：55.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉）

作 者 简 介

罗振东，1958 年出生于广西桂平市，1982 年本科毕业于广西师范大学并获得理学学士学位，1989 年硕士研究生毕业于四川大学并获得理学硕士学位，1997 年博士毕业于中国科学技术大学并获得理学博士学位，同年进入中国科学院计算数学与科学工程计算研究所做博士后，现为北京交通大学理学院教授和博士生导师.

罗振东从 1986 年起从事偏微分方程数值解法的研究，主要的研究方向是有限元方法和计算流体力学及其数值模拟，曾主持和参加国家自然科学基金项目和省部级科研项目 10 余项，发表了论文论著 70 余篇(部). 主要的工作有：

1. 给出了任意四边形单元和任意六面体上的插值误差估计；

2. 在 Stokes 方程和 Navier-Stokes 方程的混合有限元研究中，改进了国际上著名的计算数学专家 Raviart、Girault、Verfürth 等人的工作，提出了一些更优秀的混合元格式和后验误差估计；

3. 在二阶椭圆方程的研究中，改进了国际上著名的计算数学专家 Raviart、Thomas、Fortin 等人的工作，提出了更节省自由度的协调混合元格式和非协调混合元格式；

4. 在 1996 首先提出了利用混合元方法对 RLW 方程、Burgers 方程以及非饱和水流方程等非线性发展方程进行理论研究和数值模拟，这些结果已经在 SIAM J. Numer. Anlysis 和国内权威核心期刊上发表，舒其望教授 1997 年开始提出的 Euler 方程的间断有限元方法也是在其工作基础上做出来的；

5. 成功地对定常和非定常的热传导–对流方程、含有泥沙的浅水波方程的广义解的存在性和混合元解、非线性 Galerkin 混合元解的存在性及收敛性做分析，并提出了基于混合元法的差分格式和数值计算例子；

6. 把非线性 Galerkin 混合元方法与 Petrov 最小二乘、后验误差估计结合起来应用于 Navier-Stokes 方程和热传导 – 对流方程，这些方法都应该是属于首创的；

7. 在对大气和海洋的数值计算、数值模拟方面作了很多的研究.

《大学数学科学丛书》序

按照恩格斯的说法，数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学．从恩格斯那时到现在，尽管数学的内涵已经大大拓展了，人们对现实世界中的数量关系和空间形式的认识和理解已今非昔比，数学科学已构成包括纯粹数学及应用数学内含的众多分支学科和许多新兴交叉学科的庞大的科学体系，但恩格斯的这一说法仍然是对数学的一个中肯而又相对来说易于为公众了解和接受的概括，科学地反映了数学这一学科的内涵．正由于忽略了物质的具体形态和属性、纯粹从数量关系和空间形式的角度来研究现实世界，数学表现出高度抽象性和应用广泛性的特点，具有特殊的公共基础地位，其重要性得到普遍的认同．

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的．作为一种先进的文化，数学不仅在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，而且是人类文明的一个重要的支柱．数学教育对于启迪心智、增进素质、提高全人类文明程度的必要性和重要性已得到空前普遍的重视．数学教育本质是一种素质教育；学习数学，不仅要学到许多重要的数学概念、方法和结论，更要着重领会到数学的精神实质和思想方法．在大学学习高等数学的阶段，更应该自觉地去意识并努力体现这一点．

作为面向大学本科生和研究生以及有关教师的教材，教学参考书或课外读物的系列，本丛书将努力贯彻加强基础、面向前沿、突出思想、关注应用和方便阅读的原则，力求为各专业的大学本科生或研究生（包括硕士生及博士生）走近数学科学、理解数学科学以及应用数学科学提供必要的指引和有力的帮助，并欢迎其中相当一些能被广大学校选用为教材，相信并希望在各方面的支持及帮助下，本丛书将会愈出愈好．

李大潜

2003 年 12 月 27 日

序　言

有限元方法也称为有限单元法，它是在古典的 Ritz (里茨)-Galerkin(伽辽金)(简称 R-G)变分方法的基础上，以分片插值多项式为工具，结合电子计算机的发展与推广而迅速发展起来的一种求解微分方程的数值方法. 最早用有限元方法处理微分方程的近似计算始于 20 世纪 40 年代的 Courant 等人. 到了 20 世纪 50 年代中期，随着电子计算机的迅速发展，有限元方法取得了巨大的进展. 我国的冯康(1920~1993)于 20 世纪 60 年代初独立于西方创立有限元法(参见[26]). 从此，有限元法开始广泛应用于船舶、一般机械、巨型建筑和水利设施(如大坝、桥梁等)的设计. 近年来，又被广泛地应用于流体动力学、电磁场等非应力分析问题. 20 世纪 70 年代初，Babuška[5]和 Brezzi[9]又创立了混合有限元方法的一般理论；20 世纪 80 年代初，Falk 和 Osborn[25]又提出了一种改进的方法. 这里我们首先简单介绍有限元法，然后着重介绍混合有限元法的理论及其应用.

本书共五章，第 1 章主要介绍有限元方法的基本理论，给出有限元法的适定性和收敛性的理论分析；第 2 章主要介绍混合有限元方法的基本理论及其在线性微分方程中的应用，介绍线性微分方程的混合变分形式和混合有限元格式；第 3 章主要介绍非线性发展方程的混合有限元方法，介绍 Burgers 方程，RLW 方程和非饱和水流问题的混合有限元法及其数值模拟；第 4 章主要介绍定常的热传导-对流方程的混合有限元方法，主要讨论其广义解的存在唯一性和各种混合元法(包括一般混合有限元法，Galerkin-Petrov 最小二乘混合元方法，非线性 Galerkin 混合元法，非线性 Galerkin-Petrov 最小二乘混合元法等). 热传导-对流问题是大气动力学中的一个重要的方程组，是强迫耗散的非线性动力系统方程. 该方程组除了含有速度和压力外，还含有温度场. 由于流体的运动必带有黏性，有黏性就必产生热量,从而流体的运动必伴随速度、压力和温度的相互转化. 因此，对这个问题的研究比对 Navier-Stokes 问题的研究更具有普遍意义. 第 5 章主要介绍非定常的热传导-对流方程的混合有限元方法，主要讨论其广义解的存在唯一性和各种混合元法(包括半离散化和全离散化的混合有限元法，半离散化和全离散化的非线性 Galerkin 混合有限元法，以及特征混合有限元法等). 本书通过一些典型的例子和一些本学科的前沿应用实例说明混合有限元方法的应用前景，其中包括作者近年来的一些研究的结果，读者可以从中了解到混合有限元方法的发展新动向.

由于有限元法和混合有限元法的理论及其应用仍在发展之中，本书不可能包

含全部的内容. 本书旨在将有限元法和混合有限元法的基本方法、基本理论及比较典型的应用介绍给读者. 衷心希望本书能成为读者学习和研究有限元法和混合有限元法的入门书和向导.

在本书的编写和出版过程中, 得到国家基金委和国内外同行专家的大力支持和帮助, 在此表示衷心的感谢. 同时也特别感谢所有关心和支持本书出版的出版社领导和编辑.

本书若有错漏之处, 恳请读者指正.

作　者

2005 年 5 月于北京

目　　录

*　　*　　*

第 1 章　有限元方法简介

为了讨论偏微分方程的广义解和有限元解, 本章首先引入广义导数和 Sobolev 空间的概念,然后介绍偏微分方程的广义解的适定性问题和先验估计及 Sobolev 空间的插值理论, 最后介绍椭圆型方程和抛物型方程的有限元解的存在唯一性和收敛性.

1.1　广义导数和 Sobolev 空间

1.1.1　线性算子与线性泛函

定义1.1　设 S 是 Hilbert 空间 H 的子集, 把 S 以及 S 的所有极限点并在一起, 称为 S 的**闭包**, 记为 $\bar{S}$, 显然有 $S \subseteq \bar{S}$. 如果 $\bar{S} = H$, 即 H 中任一点都能作为 S 中点列的极限点, 则称 S 在 H 中**稠密**. 如果 S 在 H 中稠密, 而且 S 为可数的, 则称 H 为可分的.

可分的 Hilbert 空间是讨论有限元的基础. 因为 $C^{\infty}(\bar{\Omega})$ 在 $L^2(\Omega)$ 中稠密, 由 Weierstrass(魏尔斯特拉斯) 逼近定理知, 具有有理系数多项式空间对 $L^2(\Omega)$ 中的度量在 $C^{\infty}(\bar{\Omega})$ 中又稠密, 故 $L^2(\Omega)$ 是一个可分的 Hilbert 空间. 这样, 如果要讨论某一空间 H 内的性质, 只要先讨论在它的稠密子集上讨论, 最后取极限, 可使得在整个空间 H 上成立.

定义 1.2　称线性空间 E 上规定的两个模 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是**等价的**, 如果存在正数 α 和 β 使得

$$\alpha\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta\|x\|_1, \qquad \forall x \in E.$$

注　同一空间 H 可定义两种不同的模, 此时, 虽然 H 内元素没有改变, 但仍被看作不同结构的两个空间. 如果不同空间或同一空间两种模等价, 则两者的收敛性是等价的, 即如果按 $\|\cdot\|_1$ 是收敛的话, 则按 $\|\cdot\|_2$ 模也收敛, 反之亦然. 可以证明有限维空间的任意两种模都是等价的.

作为函数概念的推广和为了用变分法研究线性偏微分方程, 引入线性算子的概念是很有用的.

定义 1.3　设 X 和 Y 都是线性空间, 如果存在映射 T 把 X 映射到 Y, 并满足下列条件:

(1) $T(x+z) = Tx + Tz$,

(2) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$,

其中 α 是任意标量, $x, z \in X$ 为任意元素, 则称 T 为**线性算子**或**线性变换**, 其中 X

为 T 的**定义域**.

如果 T 的定义域为 X 的子空间 D, 则 T 的定义域记为 $D(T)$, 而 $R(T) = \{y;\ y = Tx, x \in D(T)\}$ 称为该算子的**值域**.

例如, 设 D 为 R^2 中的有界闭区域, 而 $X = C^2(D)$, 对于任意的 $u(x) \in X$ 和 D 上任意点 P, 定义

$$\Delta u(P) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)(P),$$

则 Δ 即为将 X 映射到 $Y = C^0(D)$ 上的线性算子.

当 X 和 Y 均为赋范线性空间, 其范数分别记为 $\|\cdot\|_X$ 和 $\|\cdot\|_Y$.

定义 1.4 如果 T 为将 X 的子空间 D 映射到 Y 上的线性算子, 且存在常数 $M > 0$ 使得下式成立

$$\|Tx\|_Y \leqslant M\|x\|_X, \qquad \forall x \in D(T), \tag{1.1.1}$$

则称 T 是有界的.

特别是, 当像空间 Y 取为实数域 R 时, 我们称算子 T 为**泛函**.

定义 1.5 设 H 是线性赋范空间, 则由 H 上的全体有界线性泛函构成的线性空间记为 H', 其范数定义为

$$\|f\|_{H'} = \sup_{v \in H} \frac{|f(v)|}{\|v\|_H},$$

注 在不引起混淆的情况下, 往往把 H 和 H' 中的范数的下标均省略.

定义 1.6 如果当 $\|x_n - x_0\|_X \to 0$ 时, $\|Tx_n - Tx_0\|_Y \to 0$, 则称 T 为连续的.

对于线性算子, 连续性和有界性是等价的. 对于有界线性算子 T, 把满足条件 (1.1.1) 的 M 中最小者称为算子 T 的模, 记为 $\|T\|$, 易知

$$\|T\| = \sup_{x \in D(T), \|x\| \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x \in D(T), \|x\| = 1} \|Tx\|. \tag{1.1.2}$$

注意实数域 R 上的模都与绝对值 $|\cdot|$ 等价, 故对有界线性泛函 f, 特别有

$$\|f\| = \sup_{x \in D(f), \|x\| = 1} |f(x)|. \tag{1.1.3}$$

在引入算子模的概念后, 从 (1.1.2) 和 (1.1.3) 有

$$\|Tx\| \leqslant \|T\| \cdot \|x\|, \quad |f(x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|.$$

附注 1.1 对于有界线性算子, 有下面结论 (其证明从略, 可参考泛函分析的教科书).

有界线性算子逆存在定理 线性算子 T 存在有界逆算子的充分必要条件是 T 有下界, 即存在 $\beta > 0$ 使得

$$\beta\|x\| \leqslant \|Tx\|, \qquad \forall x \in D(T),$$

而且有

$$\|T^{-1}\|_{H'} \leqslant \frac{1}{\beta}.$$

1.1.2 正交投影与 Riesz(里斯) 表现定理

定义 1.7(最佳逼近) 设 X 是一个赋范为 $\|\cdot\|$ 的赋范线性空间, $M \subset X$ 是 X 的子集, 在 X 中选定一点 P, 如果

$$\|P - y_0\| \leqslant \|P - y\|, \quad y_0 \in M, \forall y \in M, \tag{1.1.4}$$

则点 $y_0 \in M$ 称为 M 中对 P 之**最佳逼近**.

定义 1.8 如果内积空间 H 的两元素 x 和 y 满足 $(x, y) = 0$, 则称 x 和 y 是**直交的** (或垂直的).

设 M 是内积空间 H 的子集, 用 $M^{\perp}$ 表示与 M 的每个元素都直交的元素的集合, 则称 $M^{\perp}$ 为 M 的直交补, 显然 $M^{\perp}$ 也是 H 的子空间.

下述定理是 n 维矢量空间的一个重要性质在 Hilbert 空间的推广 (其证明可参考 [167]).

定理 1.1 设 M 是 Hilbert 空间 H 的一个闭子空间, 则每一个 $x \in H$, 都存在唯一的 $y \in M$ 和 $z \in M^{\perp}$ 使得 $x = y + z$.

定理 1.2(Riesz 表现定理) 设 H 是 Hilbert 空间, 则对于任一 H 上的线性泛函 f(即对于任意的 $f \in H'$), 必存在唯一的 $x_f \in H$ 使得

$$f(y) = (x_f, y), \quad \forall y \in H, \quad \text{且} \quad \|f\|_{H'} = \|x_f\|_H. \tag{1.1.5}$$

1.1.3 广义导数

为了便于表达, 先引入一些记号: 如果 $\alpha_i(\ i = 1, 2, \cdots, n)$ 是非负整数, 则将 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 称为**多重指标**, 再记 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 R^n 空间的元素, 且

$$x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n,$$

$$D^{\alpha} = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \int_e \cdot\, \mathrm{d}x \equiv \int \cdots \int_e \cdot\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

对于定义在 $\Omega \subset R^n$ 上的函数 $u(x)$, 记 $\mathrm{supp}u = \overline{\{x;\ u(x) \neq 0,\ x \in \Omega\}}$, 称 $\mathrm{supp}u$ 为 $u(x)$ 的支集. 若 $\mathrm{supp}u \subset \Omega$, 则称 $u(x)$ 在 Ω 中具有紧致支集. 用 $C^{\infty}(\Omega)$ 表示由

在 Ω 内具有任何次连续偏导数的函数构成的集合. 记

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega);\ \mathrm{supp}u \subset \Omega\},$$

即对于任意的函数 $u \in C_0^\infty(\Omega)$ 在 Ω 内具有任何阶连续偏导数而且在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上 $D^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0(0 \leqslant |\alpha| \leqslant \infty)$. 记 $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 为在 Ω 内的任一闭集上都可积的函数集合, 称 $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 为 Ω 内局部可积的函数空间.

定义 1.9　对于 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, 如果存在 $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 使得

$$\int_\Omega gv\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega fD^\alpha v\mathrm{d}x, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

成立, 则称 g 为 f 的 $|\alpha|$ 阶广义偏导数, 记为 $g = D^\alpha f$.

本书中的导数都是指广义导数. 利用广义导数, 可以定义 Sobolev 空间如下.

定义 1.10　设 k 为整数, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 为实数, 则 Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 定义为

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ |\alpha| \leqslant k,\ D^\alpha u \in L^p(\Omega)\},$$

其中 $L^p(\Omega) = \left\{u;\ \int_\Omega |u|^p\mathrm{d}x < \infty\right\}$, 其范数定义为

$$\|u\|_{p,\Omega} = \left[\int_\Omega |u|^p\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}.$$

$W^{k,p}(\Omega)$ 上的范数定义如下

(i) 当 $1 \leqslant p < \infty$ 时, $W^{k,p}(\Omega)$ 的范数为

$$\|u\|_{k,p,\Omega} = \left[\sum_{|\alpha|\leqslant k}\int_\Omega |D^\alpha u|^p\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}};$$

(ii) 当 $p = \infty$ 时, $W^{k,\infty}(\Omega)$ 的范数为

$$\|u\|_{k,\infty,\Omega} = \sup_{|\alpha|\leqslant k}\left\{\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|D^\alpha u|\right\}.$$

$W^{k,p}(\Omega)$ 上的半范数定义如下

(i) 当 $1 \leqslant p < \infty$ 时, $W^{k,p}(\Omega)$ 的半范数为

$$|u|_{k,p,\Omega} = \left[\sum_{|\alpha|=k}\int_\Omega |D^\alpha u|^p\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}};$$

(ii) 当 $p=\infty$ 时, $W^{k,\infty}(\Omega)$ 的半范数为

$$|u|_{k,\infty,\Omega}=\sup_{|\alpha|=k}\left\{\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|D^\alpha u|\right\}.$$

注 当 $p=2$ 时, 记 $W^{k,2}(\Omega)=H^k(\Omega)$, 而且在不引起混乱的情况下, 范数和半范下标中的 $p=2$ 往往省略, 并且范数和半范下标中的 Ω 也往往省略.

记 $H_0^m(\Omega)=\{v\in H^m\Omega;\ D^\alpha v|_{\partial\Omega}=0,|\alpha|<m\}$, 其对偶空间 $H^{-m}(\Omega)=[H_0^m(\Omega)]'$ 的范数记为

$$\|v\|_{-m,\Omega}=\sup_{0\neq u\in H_0^m(\Omega)}\frac{(v,u)_0}{\|u\|_{m,\Omega}},\quad \forall v\in H^{-m}(\Omega).$$

1.1.4 Sobolev 空间的一些性质

1.1.4.1 嵌入定理

嵌入定理是研究 Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 与其他函数空间之间的关系的, 确定函数和它的导数在空间本身及空间内各不同维数的截形上的性质的相互关系.

例如, $C^\infty(\Omega)$ 空间是比较熟悉的, 嵌入定理就是说明在什么条件下, $u\in W^{k,p}(\Omega)$, 同时 u 属于某一 $C^\infty(\Omega)$ 空间. 由于求解偏微分方程的广义解一般属于某一 $W^{k,p}(\Omega)$. 利用嵌入定理就可以知道满足什么条件时, 此广义解即为经典解. 所以, 嵌入定理是用来刻画偏微分方程性质的.

嵌入定理的证明要涉及 Sobolev 空间的一系列定理, 由于篇幅的限制, 这里只介绍有关的结论, 具体证明可参考相关的文献 (如可参见 [1]).

定理 1.3(嵌入定理 1) 当 $k-l>\dfrac{n}{p}$ 时, 则任意的函数 $u\in W^{k,p}(\Omega)$ 都与 $C^l(\Omega)$ 中的函数等效 (或等同), 而且

$$\|u\|_{C^l}\leqslant M(\Omega)\|u\|_{k,p,\Omega},\tag{1.1.6}$$

其中 M 是仅与区域 Ω 有关的常数, n 为区域 Ω 的维数, 空间 $C^l(\Omega)$ 的范数定义为 $\|u\|_{C^l}=\max\limits_{|\alpha|\leqslant l}[\max\limits_{\bar\Omega}|D^\alpha u|]$.

附注 1.2 定理 1.3 中的等同是指在 $L^p(\Omega)$ 空间下等同, 确切意思是: 如果 $u\in W^{k,p}(\Omega)$, 在重新定义零测度的点集上的函数以后, u 即为连续函数; 不等式 (1.1.6) 称为**嵌入不等式**, 记为 $W^{k,p}(\Omega)\hookrightarrow C^l(\Omega)$. 如果把 $W^{k,p}(\Omega)\hookrightarrow C^l(\Omega)$ 的算子记为 I, 则不等式 (1.1.6) 表示 I 是有界的. 所以 $W^{k,p}(\Omega)$ 不仅包含在 $C^l(\Omega)$ 中, 而且是有界的, 并依 $C^l(\Omega)$ 中的范数有收敛的子列. 上述这些性质表示, $W^{k,p}(\Omega)$ 有比 $C^l(\Omega)$ 更强的拓扑结构.

定理 1.4(嵌入定理 2) 如果 $k>l$, 则 $W^{k,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow W^{l,p}(\Omega)$, 而且存在只与 Ω 有关的常数 M, 使得

$$\|u\|_{l,p,\Omega}\leqslant M\|u\|_{k,p,\Omega}.\tag{1.1.7}$$

注　$\hookrightarrow\hookrightarrow$ 表示紧嵌入, 即对 $W^{k,p}(\Omega)$ 中的任意序列 $\{u_m\}$ 必存在子列 $\{u_{m_N}\}$ $(N=1,2,\cdots)$, 在 $W^{l,p}(\Omega)$ 中收敛. 此种嵌入也称为恒同嵌入.

定理 1.5(嵌入定理 3)　如果 $k>n/p$, $u\in W^{k,p}(\Omega)$, 让区域 Ω 被任一维数为 $s>n-2k$ 的平面所截, 在其截形 D_s 上定义平方可积函数 (称为 u 的迹), 则 $W^{k,p}(\Omega)\hookrightarrow L^p(D_s)$, 而且

$$\|u\|_{L^p(D_s)}\leqslant M\|u\|_{k,p,\Omega}, \tag{1.1.8}$$

其嵌入算子是**有界**及**全连续的**.

附注 1.3　定理 1.5 也称为**迹定理**, 称 $s>n-2k$ 为**指标不等式**.

推论 1.6　设区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 是 $s=n-1$ 维流形, 则

$$W^{k,p}(\Omega)\hookrightarrow L^p(\partial\Omega).$$

注　由指标关系 $s>n-2k$, 即 $\dfrac{s}{n-2k}>1$ 知, 如果 $k=1$, $p=2$, 由于 $n-1>n-2$, $\dfrac{s}{n-2}=\dfrac{n-1}{n-2}>1$, 而且

$$1<\frac{s}{n-2}=\begin{cases}\infty, & n=2,\ s=1,\\ 2, & n=3,\ s=2,\\ 1.5, & n=4,\ s=3,\end{cases}$$

所以, 当 $n=2,3,4,\cdots$ 时, $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$ 都成立.

由 (1.1.8) 知, 嵌入算子是有界的, 所以 $W^{k,p}(\Omega)$ 内的基本列 (Cauchy 列)$\{u_m\}$ 一定是 $L^p(\partial\Omega)$ 中的基本列, 故存在 $u\in L^p(\partial\Omega)$ 使得

$$\|u_m-u\|_{L^2(\partial\Omega)}\to 0,\quad m\to\infty. \tag{1.1.9}$$

注　(1.1.9) 表明凡是满足嵌入定理 1.5 中指标不等式, 则广义解是以 $L^2(\partial\Omega)$ 意义下取边界的.

1.1.4.2　等价模定理

在 (1.1.1) 式中知道, 对于一个函数空间的模如果定义得比较恰当, 将对问题的研究带来方便, 而如果引进的模与原来的模等价, 那就表示对新的模, 空间的结构是不变的, 保持了原来空间的某些性质, 例如, 极限性质.

先引进一个引理.

引理 1.7　如果 $u\in W^{k,p}(\Omega), \Omega\subset R^n, x\in\Omega, x=(x_1,x_2,\cdots,x_n), D^\alpha u=0, \forall|\alpha|=k$, 则 u 必是 $k-1$ 次多项式.

引理 1.7 的证明留给读者思考.

附注 1.4 引理 1.7 说明：$W^{k,p}(\Omega)$ 中的函数与 $C^k(\overline{\Omega})$ 中的函数相仿. 如果一函数的所有 k 阶广义导数全为零, 则其必为 $k-1$ 次多项式.

不难验证, 除了由 $|u|_{k,p,\Omega}=0$ 不能导出 $u=0$ 外, $|u|_{k,p,\Omega}$ 满足所有范数的条件, 因此称它为"**半模**".

定理 1.8(等价模定理) 如果 $W^{k,p}(\Omega)(k\geqslant 1)$ 上的有界线性泛函 $L_1,L_2,\cdots,L_M$ 对于任何次数 $\leqslant k-1$ 次的任何非零多项式不同时为零, 则模 $\|u\|_{k,p,\Omega}$ 与 $|u|_{k,p,\Omega}+\sum\limits_{i=1}^{M}|L_i(u)|$ 等价, 即存在常数 $\alpha,\ \beta>0$, 使得对于任意的 $u\in W^{k,p}(\Omega)$ 都有

$$\alpha\left[|u|_{k,p,\Omega}+\sum_{i=1}^{M}|L_i(u)|\right]\leqslant\|u\|_{k,p,\Omega}\leqslant\beta\left[|u|_{k,p,\Omega}+\sum_{i=1}^{M}|L_i(u)|\right]. \tag{1.1.10}$$

证明 先证明 (1.1.10) 的左边不等式.

因为 $L_i(i=1,2,\cdots,M)$ 是 $W^{k,p}(\Omega)$ 中的有界线性泛函, 所以有

$$|L_i(u)|\leqslant\alpha_i\|u\|_{k,p,\Omega},\quad i=1,2,\cdots,M,$$

而由半模与模的定义, 可有

$$|u|_{k,p,\Omega}\leqslant\|u\|_{k,p,\Omega}.$$

故有

$$|u|_{k,p,\Omega}+\sum_{i=1}^{M}|L_i(u)|\leqslant\left(1+\sum_{i=1}^{M}\alpha_i\right)\|u\|_{k,p,\Omega},$$

取 $\alpha=\left(1+\sum\limits_{i=1}^{M}\alpha_i\right)^{-1}$ 即得左边不等式.

再证明 (1.1.10) 的右边不等式.

反证法, 如果右端不等式不成立, 则对于任何自然数 n, 必存在 $v_n\in W^{k,p}(\Omega)$ 使得

$$\|v_n\|_{k,p,\Omega}>n\left[|v_n|_{k,p,\Omega}+\sum_{i=1}^{M}|L_i(v_n)|\right].$$

令 $u_n=\dfrac{v_n}{\|v_n\|_{k,p,\Omega}}$, 则 u_n 满足

$$\|u_n\|_{k,p,\Omega}=1, \tag{1.1.11}$$

$$|u_n|_{k,p,\Omega}+\sum_{i=1}^{M}|L_i(u_n)|<\frac{1}{n}. \tag{1.1.12}$$