

数 理 化 自 学 丛 书

三 角

数理化自学丛书

三

角

数理化自学丛书编委会
数学编写小组编

上海人民出版社

数理化自学丛书

三 角

数理化自学丛书编委会

数学编写小组编

(原上海科技版)

上海人民出版社出版

(上海绍兴路5号)

广西人民出版社重印

广西新华书店发行 广西民族印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 10.75 字数 235,000

1983年10月第1版 1977年11月第1版 1978年4月广西第1次印刷

统一书号: 13171·215 定价: 0.71 元

内 容 提 要

本书是数理化自学丛书中的一本，介绍中学三角课程的全部内容，只要具备平面几何和代数的初步知识即可阅读。本书叙述浅显易懂，对关键性问题讲解得特别详细，对于不易理解的内容适当分散，使逐步深入。书中附有大量习题可作为练习。书中用小一号字体排印的某些章节，初次阅读时如有困难，可以暂时略去。题号前附有*号的，是较难的题目，初学时可以暂时不做。

本书可供青年工人、知识青年、在职干部自学之用，也可供中等学校青年教师参考。

重 印 说 明

《数理化自学丛书》是一九六六年前出版的。计有《代数》四册，《平面几何》二册，《三角》一册，《立体几何》一册，《平面解析几何》一册；《物理》四册；《化学》四册。这套书的特点是：比较明白易懂，从讲清基本概念出发，循序前进，使读者易于接受和理解，并附有不少习题供练习用。这套书可以作为青年工人、知识青年和在职干部自学之用，也可供中等学校青年教师教学参考，出版以后，很受读者欢迎。但是在“四人帮”及其余党控制上海出版工作期间，这套书横被扣上所谓引导青年走白专道路的罪名，不准出版。

英明领袖华主席和党中央一举粉碎了祸国殃民的“四人帮”。我国社会主义革命和社会主义建设进入新的发展时期。党的第十一次全国代表大会号召全党、全军、全国各族人民高举毛主席的伟大旗帜，在英明领袖华主席和党中央领导下，为完成党的十一大提出的各项战斗任务，为在本世纪内把我国建设成为伟大的社会主义的现代化强国，争取对人类作出较大的贡献，努力奋斗。许多工农群众和干部，在党的十一大精神鼓舞下，决心紧跟英明领袖华主席和党中央，抓纲治国，大干快上，向科学技术现代化进军，为实现四个现代化作出贡献，他们来信要求重印《数理化自学丛书》。根据读者的要求，我们现在在原书基础上作一些必要的修改后，重新出版这套书，以应需要。

十多年来，科学技术的发展是很快的。本丛书介绍的虽仅是数理化方面的基础知识，但对于应予反映的科技新成就方面内容，是显得不够的。同时，由于本书是按读者自学的要求编写的，篇幅上就不免有些庞大，有些部分也显得有些烦琐。这些，要请读者在阅读时加以注意。

对本书的缺点，希望广大读者批评指出，以便修订时参考。

一九七七年十一月

目 录

重印说明

第一章 锐角的三角函数1

§ 1.1 锐角的三角函数的定义1

§ 1.2 已知某锐角的一个三角函数,求作这个角6

§ 1.3 余角的三角函数9

§ 1.4 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 角的三角函数11

§ 1.5 间隔为 1° 的三角函数表 16

§ 1.6 角由 0° 变到 90° 时,三角函数的变化19

§ 1.7 四位数学用表中的三角函数表23

§ 1.8 直角三角形的解法29

本章提要36

复习题一38

第二章 任意角的三角函数41

§ 2.1 大于 90° 的角和负角41

§ 2.2 直角坐标系44

§ 2.3 任意角的三角函数49

§ 2.4 三角函数值的符号53

§ 2.5 已知某角的一个三角函数的值,求作角55

§ 2.6 $n \cdot 360^\circ + \alpha$ 与任意角 α 的三角函数间的关系59

§ 2.7 $180^\circ - \alpha, 180^\circ + \alpha, 360^\circ - \alpha$ 与锐角 α 的三角函数间的关系60

§ 2.8 $-\alpha$ 与任意角 α 的三角

函数间的关系66

§ 2.9 已知一个三角函数的值,求角70

§ 2.10 $90^\circ + \alpha, 270^\circ - \alpha, 270^\circ + \alpha$ 与锐角 α 的三角函数间的关系73

§ 2.11 诱导公式的一般性77

§ 2.12 同角的三角函数间的关系82

本章提要89

复习题二90

第三章 三角函数的图象和性质93

§ 3.1 弧度制93

§ 3.2 用线段表示三角函数98

§ 3.3 三角函数的图象102

§ 3.4 三角函数的定义域112

§ 3.5 三角函数的性质115

§ 3.6 一般正弦函数 $y = A \sin(nx + \alpha)$ 的图象 123

本章提要129

复习题三131

第四章 加法定理和它的推论 133

§ 4.1 两角和的正弦和余弦133

§ 4.2 两角和的正弦公式和余弦公式的一般性136

§ 4.3 两角和的正切和余切141

§ 4.4 两角差的三角函数143

§ 4.5 二倍角的三角函数146

§4.6 半角的三角函数.....153	§6.7 已知两边和它们的夹角, 利用对数解斜三角形...219
§4.7 三角函数的积化和为和...158	§6.8 半角定理.....222
§4.8 三角函数的和化为积...161	§6.9 已知三边, 利用对数解 斜三角形.....225
§4.9 化 $a \sin x + b \cos x$ 成一 个角的正弦.....167	§6.10 三角形的面积.....228
§4.10 三角形内角的三角函数 间的关系.....169	§6.11 三角形的外接圆的半 径.....232
本章提要.....172	§6.12 三角形的内切圆的半 径.....234
复习题四.....174	本章提要.....237
第五章 斜三角形的解法176	复习题六.....238
§5.1 斜三角形解法的分类...176	第七章 反三角函数241
§5.2 正弦定理.....177	§7.1 反函数.....241
§5.3 已知两角和一边, 解斜 三角形.....180	§7.2 反正弦.....243
§5.4 已知两边和其中一边的 对角, 解斜三角形183	§7.3 反余弦.....249
§5.5 余弦定理.....191	§7.4 反正切.....254
§5.6 已知两边和它们的夹 角, 用余弦定理解斜三 角形.....195	§7.5 反余切.....259
§5.7 已知三边, 用余弦定理 解斜三角形.....197	§7.6 反三角函数的三角运 算.....262
本章提要.....201	§7.7 反三角函数间的基本关 系.....266
复习题五.....202	本章提要.....270
第六章 利用对数解三角形 ...204	复习题七.....271
§6.1 三角函数对数表.....204	第八章 三角方程273
§6.2 利用三角函数对数表进 行计算.....207	§8.1 最简三角方程.....273
§6.3 利用对数解直角三角 形.....209	§8.2 只含同角的同名三角函 数的三角方程.....278
§6.4 已知两角和一边, 利用 对数解斜三角形.....212	§8.3 可化成含同角的同名三 角函数的三角方程.....282
§6.5 已知两边和一边的对角, 利用对数解斜三角形...214	§8.4 可化成一边为零而另一 边是若干个因式的积的 三角方程.....285
§6.6 正切定理.....217	§8.5 形如 $a \sin x + b \cos x = c$ 的三角方程的解法.....289

§ 8.6 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的齐次方	复习题八.....303
程的解法.....292	总复习题.....304
§ 8.7 三角方程的图象解法...296	习题答案.....316
本章提要.....301	

第一章 锐角的三角函数

§ 1.1 锐角的三角函数的定义

从平面几何学中,我们知道:

在直角三角形中,如果一个锐角等于 30° , 那末这个锐角所对的直角边等于斜边的一半. 换句话说, 也就是, 30° 的角所对的直角边和斜边的比等于 $\frac{1}{2}$. 这个性质同三角形的大小是没有关系的.

三角学首先要研究这样的问题: 如果直角三角形的锐角不是 30° , 而是任何其他的锐角, 它的对边和斜边的比是不是也有确定的值呢?

我们来看图 1.1. 在这个图中, 我们看到, 以 A 为端点的两条射线 AD 和 AE 组成了一个锐角. 如果从 AD 上任意的点 $B, B', B'', \dots$ 作 AE 的垂线 $BC, B'C', B''C'', \dots$, 那末, 就得到一连串的直角三角形 $ABC, AB'C', AB''C'', \dots$ 等等. 因为这些直角三角形有一个公共角 A , 所以它们是相似的.

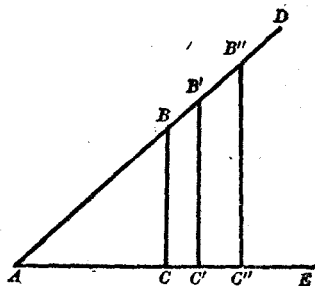


图 1.1

我们知道, 相似三角形对应边的比是相等的, 所以在直角

三角形 ABC 和 $AB'C'$ 中,就有

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{AB'},$$

因而

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'}.$$

同样可以知道

$$\frac{B'C'}{AB'} = \frac{B''C''}{AB''}.$$

因此,

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} = \frac{B''C''}{AB''} = \dots\dots.$$

就是, 在所有的直角三角形中, $\angle A$ 的对边和斜边的比都是相等的. 换句话说, 只要 $\angle A$ 的大小确定, 那末, 在它做一个锐角画出的直角三角形中, $\angle A$ 的对边和斜边的比就是一个确定的数.

当某一个量确定的时候, 和它有关的另一个量如果有确定的值, 那末, 我们就把第二个量叫做第一个量的函数.

例如, 当正方形的边长 a 有确定的值的时候, 正方形的面积 a^2 就完全确定了. 这里正方形的边长是一个量, 正方形的面积是另一个量. 我们说, 正方形的面积是边长 a 的函数.

又如, 假定圆的直径用 d 表示, 那末圆的周长就等于 πd . 这里, 圆的直径是一个量, 圆的周长是另一个量. 因为当圆的直径有确定的值的时候, 圆的周长也就确定, 所以我们说, 圆的周长是直径 d 的函数.

同样, 在图 1.1 中, $\angle A$ 是一个量; 当这个量有确定的值的时候, 在它做锐角所画出的直角三角形中, 也有一个量跟着确定了. 这个量就是上面所说的对边和斜边的比. 因此我们可以说, 在直角三角形 ABC 中, $\angle A$ 的对边和斜边的比 $\frac{BC}{AB}$ 是 $\angle A$ 的函数.

我们要注意,正方形的面积可以根据边长 a 计算出来;圆的周长也可以根据直径 d 计算出来. 所以看到算式 a^2 , 就知道它是 a 的函数; 看到算式 πd , 也就知道它是 d 的函数. 但是 $\frac{BC}{AB}$ 却不能简单地用一个算式根据 $\angle A$ 的度数计算出来. 为了要说明 $\frac{BC}{AB}$ 是 $\angle A$ 的函数, 我们应用一个专门的记号“ $\sin A$ ”来表示. 记号“ $\sin A$ ”读做“ $\angle A$ 的正弦”.

以后看到“ $\sin A$ ”这个记号, 就应当联想到它就表示: 在以 $\angle A$ 为锐角的直角三角形中, $\angle A$ 的对边和斜边的比, 就是

$$\sin A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\text{斜边}}.$$

为了方便, 我们通常用 C 表示直角三角形 ABC 的直角, 并且用小写字母 a 表示 $\angle A$ 的对边, b 表示 $\angle B$ 的对边, c 表示斜边(图 1.2). 这样就有

$$\sin A = \frac{a}{c}.$$

一个直角三角形有三条边. 任意取两条可以组成六个不同的比. 它们是

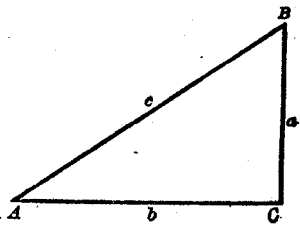


图 1.2

$$\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{c}{a}.$$

大家很容易想到, 不但 $\frac{a}{c}$ 跟着 $\angle A$ 的大小而确定, 其他五个比一定也是跟着 $\angle A$ 的大小而确定的.

第一个比 $\frac{a}{c}$ 已经把它叫做 $\angle A$ 的正弦了. 其他五个比也都是 $\angle A$ 的函数. 我们都给它们规定一个名称. 现在把所

有六个函数的名称、定义和记号,一起列在下面的表里.

函数的名称	记号①	定义
$\angle A$ 的正弦	$\sin A$	$\sin A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c}$
$\angle A$ 的余弦	$\cos A$	$\cos A = \frac{\angle A \text{ 的邻边}^{(2)}}{\text{斜边}} = \frac{b}{c}$
$\angle A$ 的正切	$\operatorname{tg} A$	$\operatorname{tg} A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\angle A \text{ 的邻边}} = \frac{a}{b}$
$\angle A$ 的余切	$\operatorname{ctg} A$	$\operatorname{ctg} A = \frac{\angle A \text{ 的邻边}}{\angle A \text{ 的对边}} = \frac{b}{a}$
$\angle A$ 的正割	$\sec A$	$\sec A = \frac{\text{斜边}}{\angle A \text{ 的邻边}} = \frac{c}{b}$
$\angle A$ 的余割	$\operatorname{cosec} A$	$\operatorname{cosec} A = \frac{\text{斜边}}{\angle A \text{ 的对边}} = \frac{c}{a}$

$\angle A$ 的所有这些函数,总起来叫做 $\angle A$ 的三角函数.

知道了锐角三角函数的定义以后,自然会引起下面的问题:已有了一个锐角,怎样算出它的三角函数值呢?我们举例说明如下:

例 1. 求 35° 角的三角函数值.

【解】用量角器作一个 35° 的角 A (图 1.3). 过 $\angle A$ 的一边上任意一点 B , 例如取 $AB=10$ 厘米, 向另一边作垂线 BC .

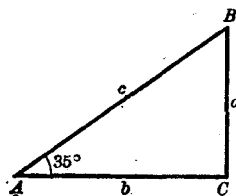


图 1.3

尽可能准确地量出直角三角形的其他两边的长, 得 $BC=5.7$ 厘米, $AC=8.2$ 厘米. 于是, 我们就可把测量和计算的结果写成下面的形式:

$$A = 35^\circ,$$

$$a=5.7, \quad b=8.2, \quad c=10.$$

① 表示 $\angle A$ 的正切、余切和余割的记号, 有些书上分别写做 $\tan A$, $\cot A$, $\csc A$.

② 在直角三角形 ABC 里, 锐角 A 夹在斜边 c 和直角边 b 之间. 直角边 b 可以简单叫做 $\angle A$ 的邻边.

$$\sin 35^\circ = \frac{a}{c} = \frac{5.7}{10} = 0.57;$$

$$\cos 35^\circ = \frac{b}{c} = \frac{8.2}{10} = 0.82;$$

$$\operatorname{tg} 35^\circ = \frac{a}{b} = \frac{5.7}{8.2} = 0.70;$$

$$\operatorname{ctg} 35^\circ = \frac{b}{a} = \frac{8.2}{5.7} = 1.4;$$

$$\sec 35^\circ = \frac{c}{b} = \frac{10}{8.2} = 1.2;$$

$$\operatorname{cosec} 35^\circ = \frac{c}{a} = \frac{10}{5.7} = 1.7.$$

因为我们量 a 和 b 的长, 都只量出两个数字, 所以根据它们算出来的结果, 从第一个不是零的数字起, 也只有开头两个数字是可以信任的, 以下就四舍五入。

在画直角三角形的时候, 取 $c=10$ 厘米, 只是为了计算正弦和余弦的值可以方便一些。我们也可以取其他的值。

例 2. 在直角三角形 ABC 中, 已知 $a=4$, $b=5$, 求 $\angle A$ 的正弦, 余弦, 正切和余切。

【解】 先根据几何学里的勾股定理算出

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41},$$

然后根据三角函数的定义, 求得

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{4}{\sqrt{41}} = \frac{4}{41} \sqrt{41};$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{5}{\sqrt{41}} = \frac{5}{41} \sqrt{41};$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{4}{5};$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a} = \frac{5}{4}.$$

习 题 1.1

1. 求 50° 角的六个三角函数值.
2. 已知 $a=40$, $c=41$; 求 $\angle A$ 的六个三角函数值.
3. 已知 $a=5$, $b=12$; 求 $\angle A$ 的正弦, 余弦, 正切和余切. 当 $a=10$, $b=24$ 时, $\angle A$ 的这些三角函数值有没有变化? 为什么?
4. 已知斜边 AB 等于直角边 AC 的三倍; 求 $\angle A$ 的正弦, 余弦, 正切和余切.
5. 已知 $a=\frac{1}{2}b$; 求 $\angle A$ 的正弦, 余弦, 正割和余割.
6. 已知 $a=2mn$, $b=m^2-n^2$; 根据定义求 $\angle A$ 的正弦, 正切和正割及 $\angle B$ 的余弦, 余切和余割. 比较它们的结果, 你发现了什么?
- *7. 已知 $a=2\sqrt{mn}$, $c=m+n$ ($m>n>0$); 求 $\sin A$, $\cos A$ 和 $(\sin A)^2 + (\cos A)^2$ 的值.

§1.2 已知某锐角的一个三角函数, 求作这个角

在上一节的例 1 中, 已知一个锐角, 我们用画图的方法求出了这个角的三角函数的近似值. 现在我们研究相反的问题: 已知某一锐角的一个三角函数, 怎样画出这个锐角? 举例说明如下:

例 1. 已知一个锐角的正弦等于 $\frac{4}{5}$, 求作这个锐角.

【解】 一个锐角的正弦, 就是在以它做一个锐角的直角三角形中, 这个角的对边和斜边的比. 现在已知它的正弦的值是 $\frac{4}{5}$. 要画出这个锐角, 就应当画一个直角三角形, 使一条直角边和斜边的比等于 $\frac{4}{5}$. 这样, 这条直角边的对角就是所求作的角.

因此，我们可以任意取一个长度单位(例如1厘米)，作 $BC=4$ 厘米(图1.4). 从 C 作 BC 的垂线 CD . 以 B 为圆心，以5厘米为半径，作弧交 CD 于 A ，并且连结 AB . 这时，直角三角形 ABC 中， $\angle BAC$ 就是所求作的锐角.

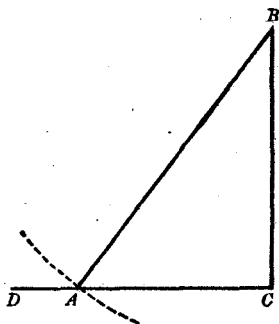


图 1.4

用量角器可以量得这个角约等于 53° (简写做 $\angle A \approx 53^\circ$).

例2. 已知一个锐角的余弦等于0.79, 求作这个锐角.

【解】 0.79 就是 $\frac{79}{100}$. 为了使图形不要画得太大，我们可以取1毫米(就是 $\frac{1}{10}$ 厘米)作为长度单位.

因为锐角的余弦，就是在直角三角形中，这个角的邻边和斜边的比，所以我们先作 $AC=79$ 毫米(图1.5)，从 C 作 AC 的垂线 CD ，然后以 A 为圆心，以100毫米为半径作弧交 CD

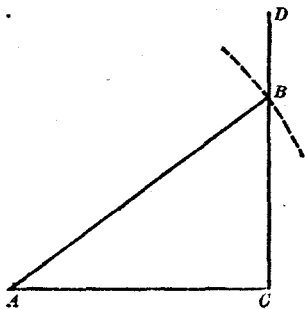


图 1.5

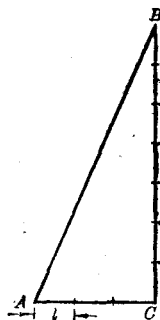


图 1.6

于 B , 并且连结 AB . $\angle A$ 就是所求作的锐角.

用量角器可以量得 $\angle A \approx 38^\circ$.

例 3. 已知 $\operatorname{tg} A = 2\frac{1}{3}$, 求作锐角 A .

【解】 我们把 $2\frac{1}{3}$ 写成 $\frac{7}{3}$. 取适当的长度单位 l (图 1.6), 作直角 C . 在它的一边上截取 $CB=7l$, 在另一边上截取 $CA=3l$. 连结 AB . 那末, 直角三角形 ABC 中的 $\angle A$ 就是所求作的锐角.

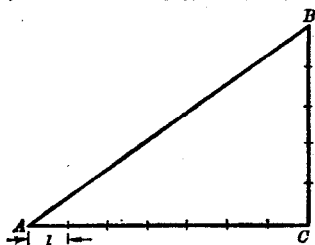


图 1.7

例 4. 已知 $\operatorname{ctg} A = 1.4$, 求作锐角 A .

【解】 这里, $1.4 = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$. 取适当的长度单位 l . 我们

在直角 C (图 1.7) 的两边上分别取 $AC=7l$, $CB=5l$. 连结 AB . 直角三角形 ABC 中的 $\angle A$ 就是所求作的锐角.

从上面的这些例题中, 我们看到, 要画出具有已知三角函数值的锐角 A , 它的一般步骤是:

把已知的三角函数值表示成分数 $\frac{m}{n}$ 的形式.

已 知	直 角 三 角 形 的 边 长	
$\sin A = \frac{m}{n}$	$a=m,$	$c=n$
$\cos A = \frac{m}{n}$	$b=m,$	$c=n$
$\operatorname{tg} A = \frac{m}{n}$	$a=m,$	$b=n$
$\operatorname{ctg} A = \frac{m}{n}$	$b=m,$	$a=n$

选取一个适当的长度单位，画直角三角形 ABC ，使 $\angle C$ 是直角，并且使 $\angle A$ ， $\angle B$ 和 $\angle C$ 的对边 a ， b 和 c 分别适合于上面表中的条件。

这样，直角三角形 ABC 中的角 A 就是所求作的锐角。

习 题 1.2

1. 已知一个锐角的正弦等于 0.5，作出这个锐角；并量量看大约等于多少度？
2. 已知 $\cos A = 0.7$ ，作出锐角 A ；并量出它的近似值。
3. 已知一个锐角的正割等于 1.5；求作这个锐角。
4. 已知 $\operatorname{cosec} A = 2$ ；求作锐角 A 。
5. 已知 $\operatorname{tg} A = \frac{5}{4}$ ；作出锐角 A ，并量出它的近似值。
6. 已知 $\operatorname{ctg} A = \frac{4}{5}$ ；作出锐角 A ，并和前题中所求的角作比较。

§1.3 余角的三角函数

在 §1.1 中我们已经知道，每一个锐角都有六个三角函数。在图 1.8 的直角三角形 ABC 中，除了 $\angle A$ 是锐角以外， $\angle B$ 也是锐角。因此， $\angle B$ 也有六个三角函数。根据 §1.1 中讲过的三角函数的定义，可以知道 $\angle B$ 的六个三角函数是

$$\sin B = \frac{\angle B \text{ 的对边}}{\text{斜边}} = \frac{b}{c};$$

$$\cos B = \frac{\angle B \text{ 的邻边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c};$$

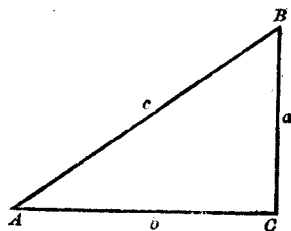


图 1.8