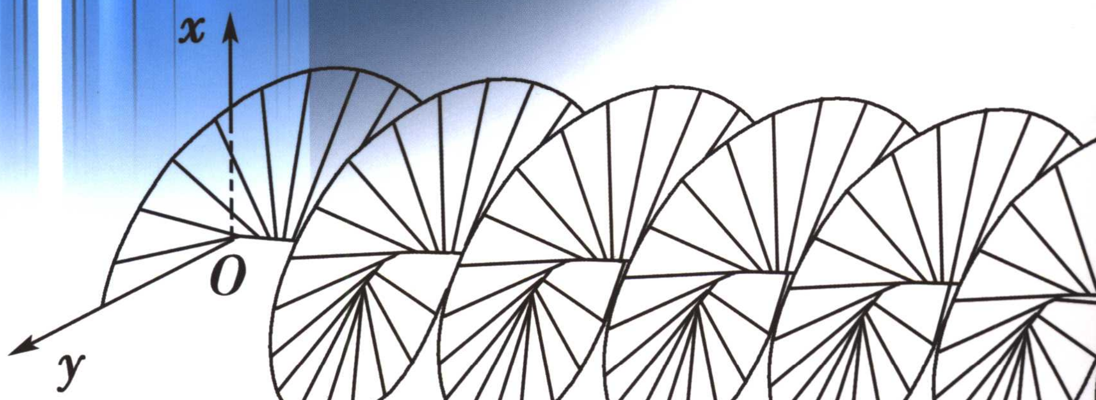
主　编　孙玉发
副主编　尹成友　郭业才
韦　康　张建华

电磁场与电磁波

DIANCICHANG YU DIANCIBO



合肥工业大学出版社

电磁场与电磁波

主　编　孙玉发

副主编　尹成友　郭业才

　　　　韦　康　张建华

合肥工业大学出版社

内 容 提 要

本书在大学物理的基础上系统论述了宏观电磁场与电磁波的基本规律和基本分析方法。全书共分8章：矢量分析，静电场与恒定电场，恒定磁场，静态场边值问题的解法，时变电磁场，平面电磁波，导行电磁波，电磁波辐射。书中有大量的例题与习题，书末为附录，给出了矢量恒等式、物理量的符号与单位等。

本书可作为高等院校本科电子信息类专业及相关专业的教材和参考书，也可作为有关科技人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波/孙玉发主编. —合肥：合肥工业大学出版社，2006.4

ISBN 7-81093-381-7

Ⅰ.电… Ⅱ.孙… Ⅲ.①电磁场—高等学校—教材②电磁波—高等学校—教材 Ⅳ.O441.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第026456号

电磁场与电磁波

主编 孙玉发　　责任编辑 陆向军

出 版	合肥工业大学出版社	版 次	2006年5月第1版
地 址	合肥市屯溪路193号	印 次	2006年5月第1次印刷
邮 编	230009	开 本	787×1092 1/16
电 话	总编室：0551-2903038 发行部：0551-2903198	印 张	19 字 数 474千字
网 址	www.hfutpress.com.cn	发 行	全国新华书店
E-mail	press@hfutpress.com.cn	印 刷	合肥现代印务有限公司

ISBN 7-81093-381-7/O·25　　定价：28.00元

前　言

“电磁场与电磁波”课程是电子信息类本科各专业学生必修的一门核心基础课，它所涉及的内容是电子信息类本科学生知识结构的必要组成部分。通过该课程的学习，使学生能够分析电子信息技术中电磁场与电磁波的基本特性，培养学生的科学思维方法和创新精神，为学习有关专业课程奠定必要的基础。

本书是合肥工业大学出版社规划的电子信息类教材之一。本教材的主要读者对象为电子信息类专业的本科生，也可供相关专业的科技人员参考。

本书共分八章，第1章首先介绍矢量分析的基本知识，为后面的学习奠定数学基础。第2章～第4章介绍静态场，分别讨论了静电场、恒定电场和恒定磁场的基本方程、基本性质和基本分析方法。在第4章中专门讨论了静态场边值问题的基本解法，包括解析法中的分离变量法、镜像法和数值法中的有限差分法。第5章～第8章介绍时变电磁场和电磁波的基本理论、基本性质和基本分析方法，讨论了麦克斯韦方程组和边界条件、平面电磁波在理想介质和导电媒质以及各向异性媒质中的传播特性、平面电磁波在两种不同媒质分界面上的反射与透射特性、均匀导波系统中电磁波的传播特性以及电磁波的辐射特性。带*号的部分为选修内容。每章末尾均附有小结。书末附录给出了一些常用的矢量恒等式、物理量的符号与单位、部分材料的介电常数和电导率，以便读者查用。

本书由孙玉发、尹成友、郭业才、韦康和张建华合作编写，其中第1章和第5章的似稳电磁场部分由尹成友编写，第2章、第3章由韦康编写，第4章、第5章由郭业才编写，第6章由张建华编写，第7章、第8章由孙玉发编写，最后由孙玉发负责全书的统稿工作。本书的编写参照了全国高等学校电磁场教学与教材研究会2004年制定的教学基本要求，同时融入了编写者长期从事“电磁场与电磁波”课程教学的经验和体会。

在本书的编写过程中，得到了许多同志的大力支持与帮助，合肥工业大学出版社为本书的出版给予了大力支持和帮助，作者在此一并表示衷心的感谢。

由于编写者水平有限，书中难免存在一些缺点和错误，敬请广大读者批评指正。

编　者

2006 年 5 月于合肥

目　　录

第4章 静态场边值问题的解法

第5章 时变电磁场

第6章 平面电磁波

第 1 章　矢量分析

广义而言,如果在空间中一个区域内的每一点都有一物理量的确定值与之对应,则在这个区域中就构成该物理量的场。如果这个物理量是一个确定的数值的标量,这种场就叫标量场,如温度场、密度场、电位场等。如果这个物理量是一个既有确定数值又有确定方向的矢量,这种场就叫矢量场,如水流中的速度场、地球表面的重力场、带电体周围的电场等等。

在电路理论中论述的是电压和电流,而在电磁场理论中论述的是电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$ 和磁场强度矢量 $\boldsymbol{H}$。研究场理论比路理论更难的原因,主要是电路中研究的电压、电流只存在于导线中,而电场、磁场存在于三维空间,因此场理论中有数目较多的独立变量。一般的电场和磁场可能是四个独立变量的函数,如三个空间坐标变量和一个时间变量。矢量分析是研究电磁场理论的重要数学工具。因此,本书在第 1 章就较详细地介绍了这部分内容。本章首先介绍一下三种常用坐标系的构成,三种常用坐标系的坐标变量、坐标单位矢量之间的关系;然后重点介绍矢量分析中的三度,即:梯度、散度和旋度;最后简单介绍一下格林定理和亥姆霍兹定理。

1.1　三种常用的坐标系

为了考察某一物理量在空间的分布和变化规律,必须引入坐标系。而且,常常根据被研究对象几何形状的不同而采用不同的坐标系,以便问题的解决更为简单。在电磁场理论中,用得最多的是直角坐标系、圆柱坐标系(简称柱坐标系)和球坐标系。

1.1.1　坐标系的构成

两个曲面相交形成一条交线,三个曲面相交可有一个交点。因此,空间一点的坐标可以用三个参数来表示,其中每个参数确定一个坐标面。如果在空间的任一点 M 上,三个相交的坐标曲面相互正交,即各曲面在交点上的法线相互正交,这样构成的坐标系,称为正交曲面坐标系。直角坐标系、柱坐标系和球坐标系就是许多正交曲面坐标系中最常用的三种。

为了矢量分析的需要,在空间任一点,可沿三个坐标曲面的法线方向各取一个单位矢量。它的模等于 1 并以各坐标变量正的增加方向作为正方向。一个正交曲面坐标系的坐标单位矢量相互正交并满足右手螺旋法则。

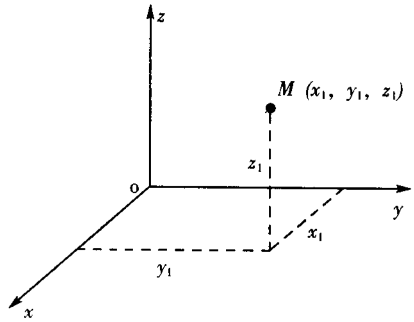


图 1-1　直角坐标系

1. 直角坐标系

如图 1-1 所示,直角坐标系中的三个坐标变量是 x,y,z。它们的变化范围是

$$-\infty < x < \infty, \qquad -\infty < y < \infty, \qquad -\infty < z < \infty$$

决定空间任一点 $M(x_1,y_1,z_1)$ 的三个坐标曲面是:

(1) $x = x_1$,这是垂直于 x 轴的平面。x_1 是点 M 到平面 yoz 的垂直距离。

(2)$y = y_1$，这是垂直于 y 轴的平面。y_1 是点 M 到平面 xoz 的垂直距离。

(3)$z = z_1$，这是垂直于 z 轴的平面。z_1 是点 M 到平面 xoy 的垂直距离。

如图 1-2 所示，过空间任意点 $M(x,y,z)$ 的坐标矢量记为 $\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$。它们相互正交，而且遵循 $\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z$ 的右手螺旋法则。$\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$ 的方向不随 M 点位置的变化而变化，这是直角坐标系的一个很重要的特征。在直角坐标系内的任一矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表示为

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z \tag{1-1}$$

其中 A_x,A_y,A_z 分别是矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$ 方向上的投影。

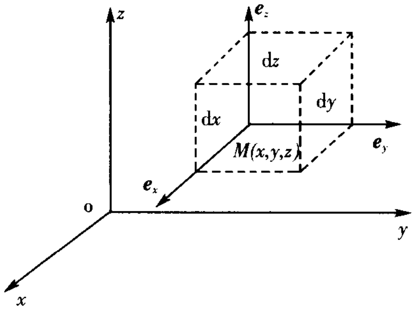


图 1-2　直角坐标系的单位矢量

由点 $M(x,y,z)$ 沿 $\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$ 方向分别取微分长度元 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$。由 $x,x+\mathrm{d}x;y,y+\mathrm{d}y;z,z+\mathrm{d}z$ 这六个面决定一个直角六面体，它的各个面的面积元是

$$\mathrm{d}s_x = \mathrm{d}y\mathrm{d}z(\text{与 } \boldsymbol{e}_x \text{ 垂直})$$

$$\mathrm{d}s_y = \mathrm{d}x\mathrm{d}z(\text{与 } \boldsymbol{e}_y \text{ 垂直})$$

$$\mathrm{d}s_z = \mathrm{d}x\mathrm{d}y(\text{与 } \boldsymbol{e}_z \text{ 垂直})$$

其体积元 $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$。

2. 柱坐标系

如图 1-3 所示，柱坐标系中的三个坐标变量是 ρ,φ,z。与直角坐标系相同，也有一个 z 变量。各变量的变化范围是

$$0 \leqslant \rho < \infty \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi \qquad -\infty < z < \infty$$

决定空间任一点 $M(\rho_1,\varphi_1,z_1)$ 的三个坐标曲面是：

(1)$\rho = \rho_1$，这是以 z 轴为轴线，以 ρ_1 为半径的圆柱面。ρ_1 是点 M 到 z 轴的垂直距离。

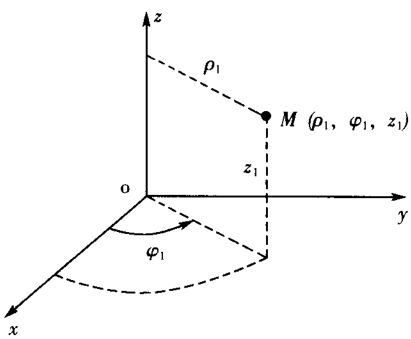


图 1-3　柱坐标系

(2)$\varphi = \varphi_1$，这是以 z 轴为界的半平面，φ_1 是 xoz 平面与通过 M 点的半平面之间的夹角。若 M 点在 z 轴上则 φ 角是不确定的。

(3)$z = z_1$，这是与 z 轴垂直的平面，z_1 是点 M 到 xoy 平面的垂直距离。

如图 1-4 所示，过空间任意点 $M(\rho,\varphi,z)$ 的坐标单位矢量为 $\boldsymbol{e}_\rho,\boldsymbol{e}_\varphi,\boldsymbol{e}_z$。它们相互正交，而且遵循 $\boldsymbol{e}_\rho \times \boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_z$ 的右手螺旋法则。值得注意的是，除 $\boldsymbol{e}_z$ 外，$\boldsymbol{e}_\rho,\boldsymbol{e}_\varphi$ 的方向都随 M 点位置的变化而变化，但三者之间总是保持上述正交关系。在点 M 的任一矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表示为

$$\boldsymbol{A} = A_\rho\boldsymbol{e}_\rho + A_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + A_z\boldsymbol{e}_z \tag{1-2}$$

其中，A_ρ,A_φ,A_z 分别是矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{e}_\rho,\boldsymbol{e}_\varphi,\boldsymbol{e}_z$ 方向上的投影。

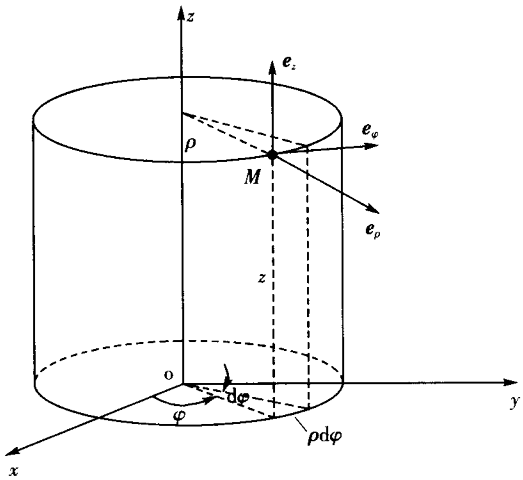


图 1-4　柱坐标系的单位矢量

在点 $M(\rho,\varphi,z)$ 处沿 $\boldsymbol{e}_\rho,\boldsymbol{e}_\varphi,\boldsymbol{e}_z$ 方向的长度元分别是

$$\mathrm{d}l_\rho = \mathrm{d}\rho \qquad \mathrm{d}l_\varphi = \rho\mathrm{d}\varphi \qquad \mathrm{d}l_z = \mathrm{d}z \tag{1-3}$$

由六个坐标曲面决定的六面体上的面积元是

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s_\rho &= \mathrm{d}l_\varphi \mathrm{d}l_z = \rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z(\text{与 } \boldsymbol{e}_\rho \text{ 垂直}) \\ \mathrm{d}s_\varphi &= \mathrm{d}l_\rho \mathrm{d}l_z = \mathrm{d}\rho\mathrm{d}z(\text{与 } \boldsymbol{e}_\varphi \text{ 垂直}) \\ \mathrm{d}s_z &= \mathrm{d}l_\rho \mathrm{d}l_\varphi = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi(\text{与 } \boldsymbol{e}_z \text{ 垂直}) \end{aligned} \tag{1-4}$$

这个六面体的体积元是

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}l_\rho \mathrm{d}l_\varphi \mathrm{d}l_z = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z \tag{1-5}$$

3. 球坐标系

如图 1-5 所示，球坐标系中的三个坐标变量是 r,θ,φ。与柱坐标系相似，也有一个 φ 变量。它们的变化范围是

$$0 \leqslant r < \infty$$

$$0 \leqslant \theta < \pi$$

$$0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

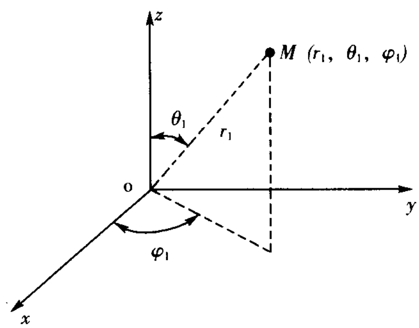


图 1-5　球坐标系

决定空间任一点 $M(r_1,\theta_1,\varphi_1)$ 的三个坐标曲面是：

(1)$r = r_1$，这是以原点为中心，以 r_1 为半径的球面。r_1 是点 M 到原点的直线距离。

(2)$\theta = \theta_1$，这是以原点为顶点，以 z 轴为轴线的圆锥面。θ_1 是正向 z 轴与连线 OM 之间的夹角。坐标变量 θ 称为极角。

(3)$\varphi = \varphi_1$，这是以 z 轴为界的半平面，φ_1 是 xoz 平面与通过 M 点的半平面之间的夹角。坐标变量 φ 称为方位角。位于 z 轴上的点的 φ 角是不确定的。

如图 1-6 所示，过空间任意点 $M(r,\theta,\varphi)$ 的坐标单位矢量为 $\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_\varphi$。它们相互正交，而且遵循 $\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_\theta=\boldsymbol{e}_\varphi$ 的右手螺旋法则。必须注意，$\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta$ 和 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 的方向都因 M 点位置的变化而变化，但三者之间总是保持上述正交关系。在点 M 的任一矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表示为

$$\boldsymbol{A}=A_r\boldsymbol{e}_r+A_\theta\boldsymbol{e}_\theta+A_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi \tag{1-6}$$

其中，A_r,A_θ,A_φ 分别是矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向上的投影。

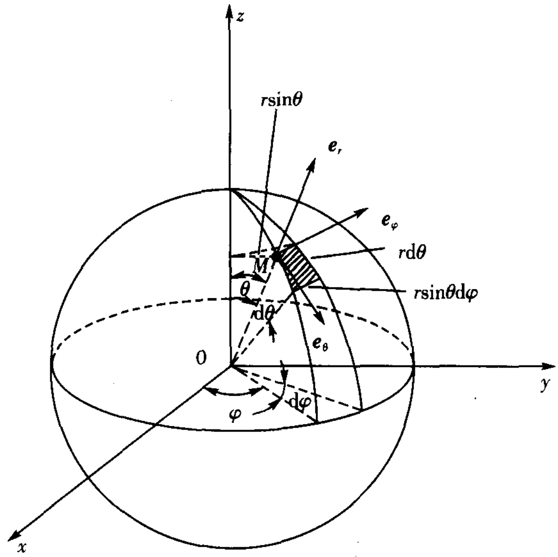


图 1-6 球坐标系的单位矢量

在点 $M(r,\theta,\varphi)$ 处沿 $\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向的长度元分别是

$$\mathrm{d}l_r=\mathrm{d}r\qquad \mathrm{d}l_\theta=r\mathrm{d}\theta\qquad \mathrm{d}l_\varphi=r\sin\theta\mathrm{d}\varphi \tag{1-7}$$

由六个坐标曲面决定的六面体上的面积元是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s_r&=\mathrm{d}l_\theta\mathrm{d}l_\varphi=r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi(\text{与 }\boldsymbol{e}_r\text{ 垂直})\\ \mathrm{d}s_\theta&=\mathrm{d}l_r\mathrm{d}l_\varphi=r\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi(\text{与 }\boldsymbol{e}_\theta\text{ 垂直})\\ \mathrm{d}s_\varphi&=\mathrm{d}l_r\mathrm{d}l_\theta=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi(\text{与 }\boldsymbol{e}_\varphi\text{ 垂直})\end{aligned} \tag{1-8}$$

这个六面体的体积元是

$$\mathrm{d}V=\mathrm{d}l_r\mathrm{d}l_\theta\mathrm{d}l_\varphi=r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \tag{1-9}$$

1.1.2 三种坐标系的坐标变量之间的关系

由图 1-7 所示的几何关系，可直接写出三种坐标系的坐标变量之间的关系。

1. 直角坐标系与柱坐标系的关系

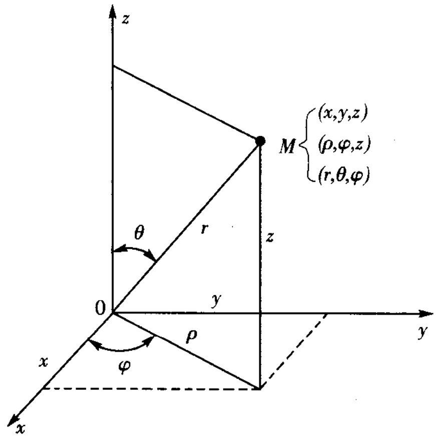


图 1－7　三种坐标系的坐标变量之间的关系

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \tag{1-10}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} = \arcsin\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ z = z \end{cases} \tag{1-11}$$

2. 直角坐标系与球坐标系的关系

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{1-12}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \arcsin\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} = \arcsin\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \tag{1-13}$$

3. 柱坐标系与球坐标系的关系

$$\begin{cases} \rho = r\sin\theta \\ \varphi = \varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{1-14}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \theta = \arcsin\dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \arccos\dfrac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \\ \varphi = \varphi \end{cases} \tag{1-15}$$

1.1.3 三种坐标系的坐标单位矢量之间的关系

由于直角坐标系和柱坐标系都有一个 z 变量，因而有一个共同的坐标单位矢量 $\boldsymbol{e}_z$。而其他坐标矢量都落在 xoy 平面内，因此，这两种坐标系的坐标矢量及其关系可以用图1-8表示。从图中可以看出，它们的坐标单位矢量之间的相互转换关系，可以通过简单的矢量分解（投影）得到，也可以通过直角坐标旋转变换得到。将这种变换关系写成矩阵形式为

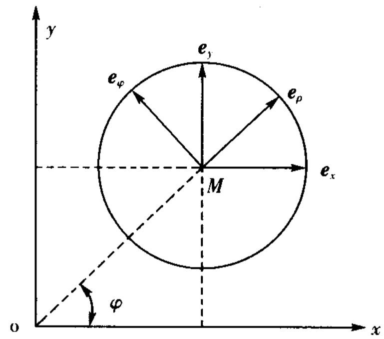


图 1-8 直角坐标系与柱坐标系的坐标单位矢量之间的关系

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_\rho \\ \boldsymbol{e}_\varphi \\ \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix} \tag{1-16}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_\rho \\ \boldsymbol{e}_\varphi \\ \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix} \tag{1-17}$$

由于柱坐标系和球坐标系都有一个 φ 变量，因而有一个共同的坐标单位矢量 $\boldsymbol{e}_\varphi$。而其他坐标矢量都落在过 z 轴的平面内，因此，这两种坐标系的坐标矢量及其关系可以用图 1-9 表示。从图中可以看出，它们的坐标单位矢量之间的相互转换关系，同样可以通过简单的矢量分解（投影）得到，也可以通过直角坐标旋转变换得到。将这种变换关系写成矩阵形式为

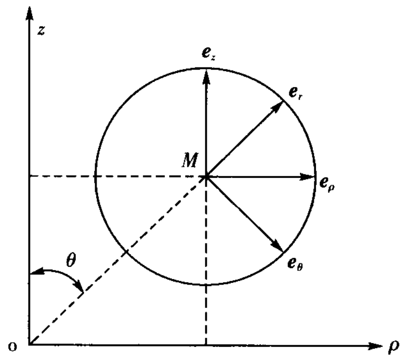


图 1-9 柱坐标系与球坐标系的坐标单位矢量之间的关系

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_\theta \\ \boldsymbol{e}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_\rho \\ \boldsymbol{e}_\varphi \\ \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix} \tag{1-18}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_\rho \\ \boldsymbol{e}_\varphi \\ \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_\theta \\ \boldsymbol{e}_\varphi \end{bmatrix} \tag{1-19}$$

由于直角坐标系和球坐标系中，空间任一点的坐标单位矢量及其关系要用立体图形才能表示出来，它们的坐标单位矢量之间的相互转换关系相对要复杂一些。但利用前面得到的坐标单位矢量之间的相互转换关系，将式(1-16)代入式(1-18)，将式(1-19)代入式(1-17)可以得到

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_\theta \\ \boldsymbol{e}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix} \tag{1-20}$$

$$\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_\varphi \end{bmatrix} \tag{1-21}$$

从前面的分析可以看出，式(1-16)与式(1-17)、式(1-18)与式(1-19)、式(1-20)与式(1-21)的转换系数矩阵是互为逆矩阵，不难看出，这些转换系数矩阵也是互为转置矩阵。这是因为，这些转换矩阵都是幺阵，幺阵具有 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^T$ 的性质。

【例1-1】 如果有一矢量在柱坐标系下的表达式为 $\boldsymbol{A} = A_\rho \boldsymbol{e}_\rho + A_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi + A_z \boldsymbol{e}_z$，试求出它在直角坐标系下的各分量大小。

【解】 利用式(1-16)，容易得到

$$A_x = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_x = A_\rho \boldsymbol{e}_\rho \cdot \boldsymbol{e}_x + A_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi \cdot \boldsymbol{e}_x + A_z \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_x = A_\rho \cos\varphi - A_\varphi \sin\varphi$$

$$A_y = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_y = A_\rho \boldsymbol{e}_\rho \cdot \boldsymbol{e}_y + A_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi \cdot \boldsymbol{e}_y + A_z \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_y = A_\rho \sin\varphi + A_\varphi \cos\varphi$$

$$A_z = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_z = A_\rho \boldsymbol{e}_\rho \cdot \boldsymbol{e}_z + A_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi \cdot \boldsymbol{e}_z + A_z \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_z = A_z$$

将上式综合起来，写成简明矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}$$

显然，上式的转换矩阵与式(1-17)的转换矩阵一致。其他坐标系的矢量变换可以类似得到，它们与坐标单位矢量的变换是一致的。

【例1-2】 写出空间任一点在直角坐标系下的位置矢量表达式，然后将此位置矢量转换成在柱坐标系和球坐标系下的矢量。

【解】 在空间任一点 $P(x,y,z)$ 的位置矢量为

$$\boldsymbol{A} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$$

利用[例1-1]中的结论，得

$$A_\rho = x\cos\varphi + y\sin\varphi \qquad A_\varphi = -x\sin\varphi + y\cos\varphi \qquad A_z = z$$

代入 $x = \rho\cos\varphi$，　$y = \rho\sin\varphi$，得

$$A_\rho = \rho \qquad A_\varphi = 0 \qquad A_z = z$$

于是，位置矢量在柱坐标系下的表达式为

$$\boldsymbol{A} = \rho\boldsymbol{e}_\rho + z\boldsymbol{e}_z$$

同理可得，在球坐标系下的位置矢量表达式为

$$\boldsymbol{A} = r\boldsymbol{e}_r$$

可见，位置矢量在不同坐标系下的表达式是不同的。

【例1-3】 试判断下列矢量场 $\boldsymbol{E}$ 是否是均匀矢量场：

(1) 柱坐标系中 $\boldsymbol{E} = E_1\sin\varphi\boldsymbol{e}_\rho + E_1\cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + E_2\boldsymbol{e}_z$，其中 E_1、E_2 都是常数。

(2) 在球坐标系中 $\boldsymbol{E} = E_0\boldsymbol{e}_r$，其中 E_0 是常数。

【解】 均匀矢量场 $\boldsymbol{E}$ 的定义是：在场中所有点上，$\boldsymbol{E}$ 的模处处相等，$\boldsymbol{E}$ 的方向彼此平行。只要这两个条件中有一个不符合就称为非均匀矢量场。

因为只有在直角坐标系中各点的坐标单位矢量方向是固定的，而在柱坐标系和球坐标系中的各单位坐标矢量的方向随空间点位置的变化而变化，所以判断场是否均匀，最好将柱、球坐标系的坐标单位矢量转换为直角坐标系的坐标单位矢量。

(1) 由式(1-16)得 $\boldsymbol{e}_\rho = \cos\varphi\boldsymbol{e}_x + \sin\varphi\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_\varphi = -\sin\varphi\boldsymbol{e}_x + \cos\varphi\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_z$，代入已知 $\boldsymbol{E}$ 的柱坐标表示式，可得到 $\boldsymbol{E}$ 的直角坐标系表示式为

$$\boldsymbol{E} = E_1\boldsymbol{e}_y + E_2\boldsymbol{e}_z$$

$\boldsymbol{E}$ 的模 $|\boldsymbol{E}| = \sqrt{E_1{}^2 + E_2{}^2} =$ 常数，$\boldsymbol{E}$ 与 y 轴的夹角

$$\alpha = \arctan\frac{E_2}{E_1} = \text{常数}$$

所以 $\boldsymbol{E}$ 是均匀矢量场。

(2) $\boldsymbol{E} = E_0\boldsymbol{e}_r$，虽然这一矢量场在各点的模数是一个常数，但它的方向是 $\boldsymbol{e}_r$ 的方向。显然在不同点 $\boldsymbol{e}_r$ 的方向是不同的，所以它不是均匀矢量场。

利用式(1-20)，将球坐标单位矢量转换为直角坐标单位矢量后得

$$\boldsymbol{E} = E_0\boldsymbol{e}_r = E_0\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_x + E_0\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_y + E_0\cos\theta\boldsymbol{e}_z$$

可以看出，$\theta = 0°$ 时，$\boldsymbol{E}$ 的方向是沿 z 轴的，而当 $\theta = 90°$ 时，则没有 z 轴分量，这清楚地说明 $\boldsymbol{E}$ 在不同点有不同的方向。

1.2　矢量表示法与矢量函数的微积分

1.2.1　矢量表示法

1. 在三维正交曲面坐标系中的某点，若沿三个相互垂直的坐标单位矢量方向的三个分量都给定，则一个从该点发出的矢量也就确定了。例如，在图 1-10 的直角坐标系中，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的三个分量是 A_x，A_y，A_z。矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表示为

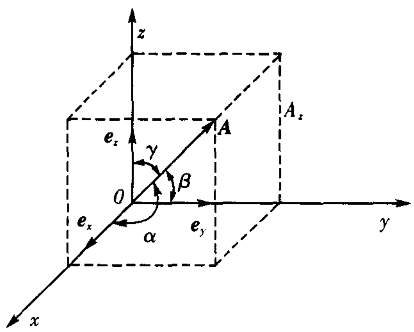


图 1-10　直角坐标系中矢量的分解

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z \tag{1-22}$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 的长度或模值 $|\boldsymbol{A}|$（记为 A）可以从图 1-10 中直接写出

$$A = \sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2} \tag{1-23}$$

如果矢量 $\boldsymbol{A}$ 与坐标轴 ox，oy，oz 的正向之间的夹角（方向角）分别是 α,β,γ，则 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 叫做矢量 $\boldsymbol{A}$ 的方向余弦。根据矢量标积的定义，分量 A_x，A_y，A_z 是矢量 $\boldsymbol{A}$ 分别在坐标单位

矢量 e_x, e_y, e_z 方向上的投影，即

$$\begin{cases} A_x = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_x = A\cos\alpha \\ A_y = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_y = A\cos\beta \\ A_z = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_z = A\cos\gamma \end{cases} \tag{1-24}$$

所以式(1-22)又可写为

$$\boldsymbol{A} = A\cos\alpha\boldsymbol{e}_x + A\cos\beta\boldsymbol{e}_y + A\cos\gamma\boldsymbol{e}_z \tag{1-25}$$

2. 模等于1的矢量叫做单位矢量。与任一矢量 $\boldsymbol{A}$ 同方向的单位矢量在本书中规定用 $\boldsymbol{e}_A$ 表示。按矢量与数量乘积的定义，则有

$$\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{e}_A = A\boldsymbol{e}_A$$

由式(1-25)，在直角坐标系中，则有

$$\boldsymbol{e}_A = \frac{\boldsymbol{A}}{A} = \cos\alpha\boldsymbol{e}_x + \cos\beta\boldsymbol{e}_y + \cos\gamma\boldsymbol{e}_z \tag{1-26}$$

3. 在直角坐标系中，以坐标原点 o 为起点，引向空间任一点 $M(x,y,z)$ 的矢量 $\boldsymbol{r}$，称为点 M 的矢径，如图1-10中的 $\boldsymbol{A}$。如果取 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{r}$，则根据式(1-22)、式(1-23)、式(1-25)和式(1-26)，有

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z \tag{1-27}$$

$$|\boldsymbol{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1-28}$$

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \cos\alpha\boldsymbol{e}_x + \cos\beta\boldsymbol{e}_y + \cos\gamma\boldsymbol{e}_z \tag{1-29}$$

从式(1-27)看出：空间点的矢径 $\boldsymbol{r}$ 在三个坐标轴上的投影数值恰好分别等于点 M 的坐标值。因此，空间一点 M 对应着一个矢径；反之，每一矢径 $\boldsymbol{r}$ 对应着空间确定的一个点 M，即矢径的终点。所以 $\boldsymbol{r}$ 又称为位置矢量。点 $M(x,y,z)$ 可以表示为 $M(\boldsymbol{r})$。

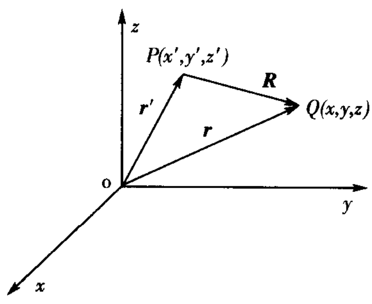


图1-11 空间矢量表示方法

4. 如果空间任一矢量 $\boldsymbol{R}$ 的起点是 $P(x',y',z')$，终点是 $Q(x,y,z)$，如图1-11所示，根据矢径的表示式(1-27)及矢量的加法规则，矢量 $\boldsymbol{R}$ 可表示为

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' = (x-x')\boldsymbol{e}_x + (y-y')\boldsymbol{e}_y + (z-z')\boldsymbol{e}_z \tag{1-30}$$

矢量 $\boldsymbol{R}$ 的模值记为 R，就是点 $P(x',y',z')$ 与 $Q(x,y,z)$ 点之间的距离，由式(1-30)得

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \tag{1-31}$$

矢量的 $\boldsymbol{R}$ 单位矢量

$$e_R = \frac{\boldsymbol{R}}{R} = \frac{(x-x')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\boldsymbol{e}_x$$

$$+\frac{(y-y')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\boldsymbol{e}_y+\frac{(z-z')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\boldsymbol{e}_z \tag{1-32}$$

式中,三个分量的系数也就是矢量 $\boldsymbol{R}$ 的方向余弦。

如果空间有一长度元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$,它在直角坐标单位矢量 $\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$ 上的投影值分别是 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$,则

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}x\boldsymbol{e}_x + \mathrm{d}y\boldsymbol{e}_y + \mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z \tag{1-33}$$

$$\mathrm{d}l = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2} \tag{1-34}$$

1.2.2 矢量代数运算

假设两个矢量 $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{e}_x + B_y\boldsymbol{e}_y + B_z\boldsymbol{e}_z$

1. 矢量的和差:把两个矢量的对应分量相加或相减,就得到它们的和或差,即

$$\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B} = (A_x \pm B_x)\boldsymbol{e}_x + (A_y \pm B_y)\boldsymbol{e}_y + (A_z \pm B_z)\boldsymbol{e}_z \tag{1-35}$$

2. 矢量的标量积和矢量积:矢量的相乘有两种定义,标量积(点乘)和矢量积(叉乘)。标量积 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 是一标量,其大小等于两个矢量模值相乘,再乘以它们夹角 α_{AB}(取小角,即 $\alpha_{AB} < \pi$)的余弦,即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = AB\cos\alpha_{AB} \tag{1-36}$$

它就是一个矢量的模与另一矢量在该矢量上的投影的乘积。它符合交换律

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \tag{1-37}$$

并有

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{1-38}$$

矢量积 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 是一个矢量,其大小等于两个矢量的模值相乘,再乘以它们夹角 $\alpha_{AB}(\leqslant\pi)$ 的正弦,实际就是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 所形成的平形四边形面积,其方向与 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 呈右手螺旋关系,为 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 所在平面的右手法向 $\boldsymbol{n}$。

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = AB\sin\alpha_{AB}\boldsymbol{n} \tag{1-39}$$

它不符合交换律。由定义知

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} \tag{1-40}$$

并有

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_z = 0 \\ &\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z, \quad \boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_x, \quad \boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \end{aligned} \tag{1-41}$$