

成人高等教育系列教材  
Chengrengaozhengjiaoyuxiliejiaocai

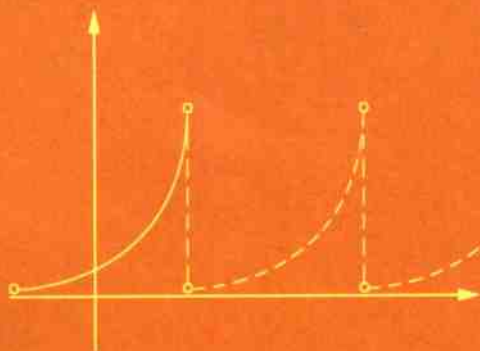


# 高等数学

## GAODENGSHUXUE

(本科使用) 上册

主编 陈凤平 副主编 吴满 曾令武



华南理工大学出版社

成人高等教育系列教材

# 高等数学

上册

(本科使用)

主 编 陈凤平

副主编 吴 满 曾令武

华南理工大学出版社

·广州·

## 内 容 提 要

本书按教育部 1998 年颁布的全国成人高等教育工科各专业本科高等数学基本要求编写,分上、下两册出版。

全书以微分学、积分学为主线编写,突出微分和积分两大基本数学方法及其理论,使基本概念更具系统性,避免了阐述上的重复,可以相应减少教学时数,适用于专科起点的本科生。

本书概念叙述深入浅出、说理清晰,注重几何直观和应用意识;例题典型,富有启发性,对提高解题能力和解题技巧极有帮助。每节配有习题及答案。

## 图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上下册)/陈凤平主编. —广州:华南理工大学出版社, 2002.8 (2006.1 重印)

(成人高等教育系列教材)

ISBN 7-5623-1846-8

I. 高… II. 陈… III. 高等数学-成人教育: 高等教育-教材  
IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 050737 号

总发行: 华南理工大学出版社

(广州五山华南理工大学 17 号楼, 邮编 510640)

发行部电话: 020-87113487 / 87111048 (传真)

E-mail: scutcl3@scut.edu.cn

<http://www.scutpress.com.cn>

责任编辑: 乔 丽

印刷者: 佛山市浩文彩色印刷有限公司

开 本: 850×1168 1/32 印张: 26.5 字数: 680 千

版 次: 2006 年 1 月第 1 版第 4 次印刷

印 数: 6001~9000 册

定 价(上下册): 37.00 元

版权所有 盗版必究

# “成人高等教育系列教材”编委会

|     |           |     |     |
|-----|-----------|-----|-----|
| 主 任 | 李元元       |     |     |
| 副主任 | 叶英模       | 金 军 | 杨昭茂 |
| 委 员 | (按姓氏笔画为序) |     |     |
|     | 叶英模       | 李元元 | 李定安 |
|     | 杨昭茂       | 金 军 | 霍福广 |

## 前 言

成人高等教育是我国高等教育事业的重要组成部分。针对成人教育的特点,改革教学内容,编写新教材,对于提高教学质量具有十分重要的意义。

成人本科,尤其是专科起点的本科教育正是当前成人高等教育的热点,但适用教材尚少。作者长期从事各类不同层次高等数学课程的教学,熟悉高等数学课程体系,尝试以微分学与积分学为主线编写这本新教材,力求突出微分与积分这一对高等数学重点,使知识结构更具条理性、系统性;理论阐述更为深刻、完整。

在内容选取上遵循“以应用为目的,以必需、够用为度,少而精”的原则。如方向导数、二重积分、曲面积分、傅立叶级数等,我们把握适度,同时,通过对有代表性的典型例题进行分析和求解,以达到提高基本运算能力的目的。

本书对高等工科、经济、管理各类专业学生适用,也可作为成人高等教育本科毕业生申请学位、报考研究生的复习辅导参考书。

本书由陈凤平主编,吴满、曾令武任副主编。本书凝集了作者及众多常年在华南理工大学高等数学教学第一线老师们的教学经验。

本书的出版得到华南理工大学继续教育学院的大力支持,责任编辑乔丽为本书付出了辛勤劳动,在此向他们一并致谢。

由于本教材在教学内容、体系上有所创新,作为尝试,书中不完善之处,恳请同行专家不吝赐教,也希望得到读者的意见和建议。

编 者

2002年6月于广州

# 目 录

|                 |      |
|-----------------|------|
| 第一章 向量代数与空间解析几何 | (1)  |
| 第一节 向量及其运算      | (1)  |
| 一、空间直角坐标系       | (1)  |
| 二、向量及其线性运算      | (4)  |
| 三、向量的坐标         | (7)  |
| 四、向量的数量积与向量积    | (12) |
| 习题 1-1          | (21) |
| 习题 1-1 答案       | (23) |
| 第二节 空间的平面与直线    | (24) |
| 一、平面方程          | (25) |
| 二、两平面间的位置关系     | (30) |
| 三、直线方程          | (32) |
| 四、两直线间的位置关系     | (35) |
| 习题 1-2          | (38) |
| 习题 1-2 答案       | (40) |
| 第三节 常见空间曲面与曲线   | (41) |
| 一、球面            | (41) |
| 二、柱面            | (42) |
| 三、旋转曲面          | (45) |
| 四、空间曲线在坐标面上的投影  | (47) |
| 五、用截痕法了解曲面      | (49) |
| 习题 1-3          | (52) |

|                                     |       |
|-------------------------------------|-------|
| 习题 1-3 答案 .....                     | (54)  |
| <b>第二章 函数、极限与连续</b> .....           | (56)  |
| 第一节 函数 .....                        | (56)  |
| 一、函数概念 .....                        | (56)  |
| 二、函数的运算 .....                       | (62)  |
| 三、函数的特性 .....                       | (68)  |
| 四、初等函数 .....                        | (75)  |
| 习题 2-1 .....                        | (77)  |
| 习题 2-1 答案 .....                     | (80)  |
| 第二节 数列的极限 .....                     | (82)  |
| 一、数列的极限 .....                       | (82)  |
| 二、收敛数列的性质 .....                     | (89)  |
| 习题 2-2 .....                        | (91)  |
| 习题 2-2 答案 .....                     | (91)  |
| 第三节 函数的极限 .....                     | (92)  |
| 一、自变量 $x$ 的绝对值无限增大时函数的极限 .....      | (92)  |
| 二、自变量 $x$ 无限趋于定值 $x_0$ 时函数的极限 ..... | (95)  |
| 三、单侧极限 .....                        | (100) |
| 四、函数极限的性质 .....                     | (101) |
| 习题 2-3 .....                        | (103) |
| 习题 2-3 答案 .....                     | (104) |
| 第四节 无穷小与无穷大 .....                   | (105) |
| 一、无穷小 .....                         | (105) |
| 二、无穷大 .....                         | (108) |
| 三、无穷小与无穷大的关系 .....                  | (111) |
| 习题 2-4 .....                        | (112) |
| 习题 2-4 答案 .....                     | (113) |

---

|                    |           |
|--------------------|-----------|
| 第五节 一元函数求极限的基本方法   | (114)     |
| 一、极限运算法则           | (114)     |
| 二、极限存在的准则及两个重要极限   | (121)     |
| 三、无穷小比较及等价无穷小代换    | (129)     |
| 习题 2-5             | (133)     |
| 习题 2-5 答案          | (135)     |
| 第六节 多元函数的极限        | (136)     |
| 一、二元函数的极限          | (136)     |
| 二、多元函数的极限          | (139)     |
| 习题 2-6             | (140)     |
| 习题 2-6 答案          | (141)     |
| 第七节 函数的连续性         | (142)     |
| 一、一元函数的连续性         | (142)     |
| 二、连续函数的运算与初等函数的连续性 | (146)     |
| 三、函数的间断点           | (149)     |
| 四、闭区间上连续函数的性质      | (152)     |
| 五、多元函数的连续性         | (156)     |
| 习题 2-7             | (159)     |
| 习题 2-7 答案          | (160)     |
| <br>第三章 微分学        | <br>(162) |
| 第一节 一元函数导数         | (162)     |
| 一、实践中的变化率问题        | (162)     |
| 二、一元函数导数的定义        | (165)     |
| 三、左导数与右导数          | (167)     |
| 四、可导函数的连续性         | (169)     |
| 五、导数的几何意义          | (171)     |
| 习题 3-1             | (173)     |

---



---

|                             |       |
|-----------------------------|-------|
| 习题 3-1 答案 .....             | (174) |
| 第二节 导数的基本运算 .....           | (176) |
| 一、导数公式与四则运算求导法则 .....       | (176) |
| 二、复合函数求导法则 .....            | (178) |
| 三、反函数与参数方程所确定的函数的求导法则 ..... | (182) |
| 四、相关变化率 .....               | (184) |
| 五、高阶导数 .....                | (185) |
| 习题 3-2 .....                | (189) |
| 习题 3-2 答案 .....             | (190) |
| 第三节 微分 .....                | (192) |
| 一、微分的概念 .....               | (192) |
| 二、微分的几何意义 .....             | (194) |
| 三、微分基本公式及四则运算法则 .....       | (195) |
| 四、一阶微分形式的不变性 .....          | (197) |
| 五、微分在近似计算中的应用 .....         | (199) |
| 习题 3-3 .....                | (200) |
| 习题 3-3 答案 .....             | (201) |
| 第四节 多元函数的偏导数 .....          | (202) |
| 一、二元函数偏导数定义 .....           | (202) |
| 二、偏导数的几何意义 .....            | (207) |
| 三、高阶偏导数 .....               | (208) |
| 四、多元函数连续与可偏导没有必然联系 .....    | (209) |
| 习题 3-4 .....                | (210) |
| 习题 3-4 答案 .....             | (211) |
| 第五节 全微分 .....               | (213) |
| 一、二元函数全微分概念 .....           | (213) |
| 二、全微分存在的必要条件 .....          | (214) |
| 三、全微分存在的充分条件 .....          | (215) |

|                                              |       |
|----------------------------------------------|-------|
| 四、全微分在近似计算中的应用 .....                         | (219) |
| 习题 3-5 .....                                 | (220) |
| 习题 3-5 答案 .....                              | (220) |
| 第六节 多元函数微分法 .....                            | (221) |
| 一、复合函数微分法 .....                              | (221) |
| 二、全微分形式不变性 .....                             | (229) |
| 三、隐函数微分法 .....                               | (231) |
| 习题 3-6 .....                                 | (239) |
| 习题 3-6 答案 .....                              | (241) |
| 第七节 方向导数与梯度 .....                            | (243) |
| 一、方向导数 .....                                 | (243) |
| 二、梯度 .....                                   | (247) |
| 习题 3-7 .....                                 | (248) |
| 习题 3-7 答案 .....                              | (249) |
| 第八节 微分中值定理 .....                             | (250) |
| 一、定理的引入 .....                                | (250) |
| 二、定理的证明 .....                                | (252) |
| 三、应用定理解题之例 .....                             | (258) |
| 习题 3-8 .....                                 | (261) |
| 习题 3-8 答案 .....                              | (263) |
| 第九节 泰勒中值定理 .....                             | (264) |
| 一、一阶泰勒公式 .....                               | (264) |
| 二、泰勒中值定理 .....                               | (266) |
| 习题 3-9 .....                                 | (272) |
| 习题 3-9 答案 .....                              | (273) |
| 第十节 罗必塔法则 .....                              | (274) |
| 一、 $\left[ \frac{0}{0} \right]$ 型罗必塔法则 ..... | (274) |

|                                                                                      |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 二、 $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ 型罗必塔法则 .....                                 | (277)     |
| 三、可化为 $\left[\frac{0}{0}\right]$ 型或 $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ 型的未定式 ..... | (278)     |
| 习题 3-10 .....                                                                        | (285)     |
| 习题 3-10 答案 .....                                                                     | (287)     |
| 第十一节 函数的极值与最值 .....                                                                  | (288)     |
| 一、一元函数的极值与最值 .....                                                                   | (288)     |
| 二、二元函数的极值与最值 .....                                                                   | (296)     |
| 习题 3-11 .....                                                                        | (306)     |
| 习题 3-11 答案 .....                                                                     | (310)     |
| 第十二节 微分学在几何上的应用 .....                                                                | (312)     |
| 一、一元函数图形的性态 .....                                                                    | (312)     |
| 二、曲率及曲率圆 .....                                                                       | (326)     |
| 习题 3-12(1) .....                                                                     | (333)     |
| 习题 3-12(1) 答案 .....                                                                  | (336)     |
| 三、平面曲线的切线与法线 .....                                                                   | (337)     |
| 四、空间曲线的切线与法平面 .....                                                                  | (340)     |
| 五、曲面的切平面与法线 .....                                                                    | (343)     |
| 习题 3-12(2) .....                                                                     | (347)     |
| 习题 3-12(2) 答案 .....                                                                  | (348)     |
| <br>第四章 不定积分 .....                                                                   | <br>(350) |
| 第一节 不定积分的概念 .....                                                                    | (350)     |
| 一、原函数 .....                                                                          | (350)     |
| 二、不定积分 .....                                                                         | (352)     |
| 三、不定积分基本公式 .....                                                                     | (353)     |
| 四、不定积分的线性性质 .....                                                                    | (354)     |

---

|                       |       |
|-----------------------|-------|
| 习题 4-1 .....          | (356) |
| 习题 4-1 答案 .....       | (358) |
| 第二节 换元积分法 .....       | (360) |
| 一、第一换元积分法 .....       | (360) |
| 习题 4-2(1) .....       | (370) |
| 习题 4-2(1) 答案 .....    | (372) |
| 二、第二换元积分法 .....       | (374) |
| 习题 4-2(2) .....       | (380) |
| 习题 4-2(2) 答案 .....    | (381) |
| 第三节 分部积分法 .....       | (383) |
| 习题 4-3 .....          | (390) |
| 习题 4-3 答案 .....       | (391) |
| 第四节 原函数为初等函数的积分 ..... | (393) |
| 一、有理函数的积分 .....       | (394) |
| 二、三角函数有理式的积分 .....    | (399) |
| 习题 4-4 .....          | (402) |
| 习题 4-4 答案 .....       | (403) |

# 第一章 向量代数与空间解析几何

解析几何的基本知识对学习微积分是必不可少的,本章对空间解析几何的主要内容加以概括.首先建立空间直角坐标系并引进向量,然后以向量为工具讨论空间的平面和直线,最后介绍常见的空间曲面和曲线.

## 第一节 向量及其运算

### 一、空间直角坐标系

在空间取定一点  $O$ ,以点  $O$  为原点作三条两两互相垂直的数轴  $Ox$ 、 $Oy$ 、 $Oz$ (长度单位一般相同),这样便构成空间直角坐标系(图 1-1a).

三条数轴称为坐标轴,分别叫做  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴.通常按右手系规定坐标轴的指向,即用右手的拇指、食指、中指叉开后的指向为方向,如图 1-1(b)所示.若拇指表示  $x$  轴的正向,食指表示  $y$  轴的正向,则中指就是  $z$  轴的正向了.

每两条坐标轴确定的一个平面,称为坐标面,由  $x$  轴、 $y$  轴确

定的叫  $xOy$  坐标面; 由  $y$  轴、 $z$  轴确定的叫  $yOz$  坐标面; 由  $z$  轴、 $x$  轴确定的叫  $zOx$  坐标面, 这三个坐标面把整个空间分成八个部分, 每一个部分称为一个卦限, 八个卦限的次序如图 1-2 所示.

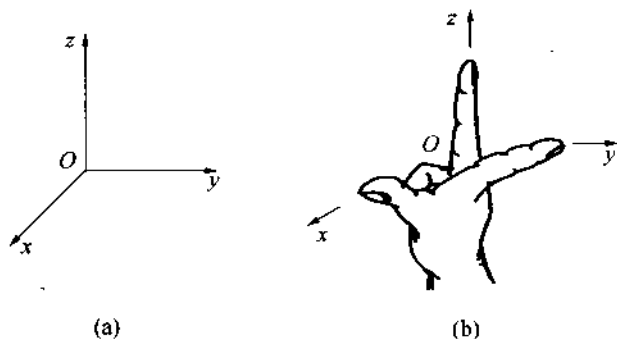


图 1-1

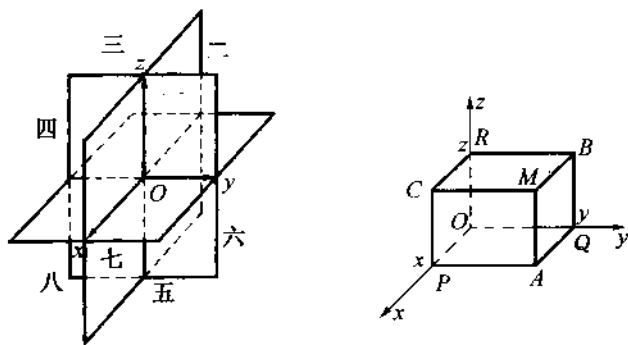


图 1-2

图 1-3

在空间直角坐标系下, 空间的点  $M$  与有序数组  $(x, y, z)$  之间一一对应, 如图 1-3 所示. 于是, 我们便称有序数组  $(x, y, z)$  为点  $M$  的直角坐标, 记为  $M(x, y, z)$ .

显然,在空间直角坐标系中:

原点  $O$  的坐标为  $(0,0,0)$ ;

在  $x$  轴上点  $P$  的坐标为  $(x,0,0)$ ;

在  $y$  轴上点  $Q$  的坐标为  $(0,y,0)$ ;

在  $z$  轴上点  $R$  的坐标为  $(0,0,z)$ ;

在  $xOy$  坐标面上点  $A$  的坐标为  $(x,y,0)$ ;

在  $yOz$  坐标面上点  $B$  的坐标为  $(0,y,z)$ ;

在  $zOx$  坐标面上点  $C$  的坐标为  $(x,0,z)$ .

**例 1** 设  $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$  为空间两点,求  $M_1$  与  $M_2$  之间的距离  $|M_1M_2|$ .

**解** 过点  $M_1, M_2$  各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面,这六个平面围成一个以  $M_1M_2$  为对角线的长方体,如图 1-4 所示. 由勾股定理可得

$$\begin{aligned} |M_1M_2|^2 &= |M_1N|^2 + |NM_2|^2 \\ &= |M_1P|^2 + |M_1Q|^2 + |M_1R|^2 \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} |M_1P| &= |P_1P_2| = |x_2 - x_1| \\ |M_1Q| &= |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1| \\ |M_1R| &= |R_1R_2| = |z_2 - z_1| \end{aligned}$$

所以

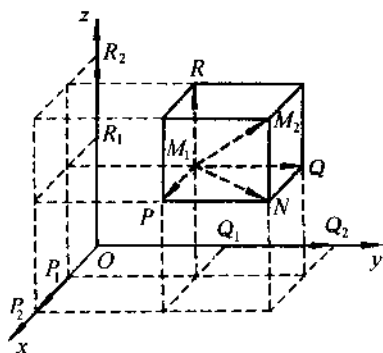


图 1-4

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

这就是空间两点间的距离公式.

特别地,空间点  $M(x, y, z)$  到原点  $O(0, 0, 0)$  的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

**例 2** 在  $xOz$  平面上求一点,使之与点  $A(1, -3, 2)$ ,  $B(-3, 0, -1)$  及  $C(6, 3, -1)$  等距离.

**解** 所求点  $M$  在  $xOz$  平面上,故设其坐标为  $(x, 0, z)$ ,则由  $|MA| = |MB|$  得

$$\sqrt{(x-1)^2 + 3^2 + (z-2)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + 0^2 + (z+1)^2}$$

由  $|MB| = |MC|$  得

$$\sqrt{(x+3)^2 + 0^2 + (z+1)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + 3^2 + (z+1)^2}$$

整理以上两式得方程组

$$\begin{cases} 4x + 3z = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

解得  $x=2, z=-2$ , 故所求点为  $M(2, 0, -2)$ .

## 二、向量及其线性运算

### 1. 向量的概念

在实践中,我们常遇到两类性质不同的量:一类是只有大小的量,例如时间、温度、距离等,称之为数量.另一类量,不仅有大小而且还有方向,例如力、速度、加速度等,这种量称之为向量.

几何上,用带有箭头指向的线段来表示向量,线段的长度表示向量的数值大小,而线段的指向表示向量的方向,图 1-5 表示以  $A$  为起点、 $B$  为终点的向量,并记为  $\overrightarrow{AB}$  或小写黑体字  $\mathbf{a}$ ,手写时记为  $\vec{a}$ .



向量的数值大小叫做向量的模.  
向量  $\overrightarrow{AB}$  (或  $\mathbf{a}$ ) 的模记为  $|\overrightarrow{AB}|$  (或  $|\mathbf{a}|$ ).

模等于 1 的向量叫做单位向量.

模等于 0 的向量叫零向量, 记作  $\mathbf{0}$ , 零向量没有确定的方向, 或说它的方向是任意的.

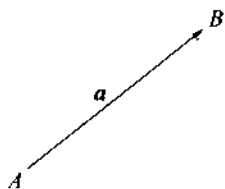


图 1-5

如果两个向量  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  的模相等, 且方向相同(指向相同), 则称这两个向量相等, 记作  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ .

根据这个规定, 只要不改变向量模的大小和方向, 向量是可以任意平行移动的. 换句话说, 向量与它的起点无关, 这种向量称之为自由向量. 本章所论述的向量均指自由向量.

与向量  $\mathbf{a}$  模相等而方向相反的向量, 称为  $\mathbf{a}$  的负向量, 记作  $-\mathbf{a}$ .

下面我们力的合成法则为依据, 定义向量的线性运算.

## 2. 向量的加减法

实验证实, 两个力的合力符合平行四边形法则. 以这一实践知识为依据, 可定义两向量和的平行四边形法则:

设有  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  两向量, 平移  $\mathbf{a}$  (或  $\mathbf{b}$ ) 使它们的起点重合, 以  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  为邻边作平行四边形, 则与  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  同起点的对角线向量  $\mathbf{c}$  称为  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的和(图 1-6a), 记作

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

由于平行四边形对边相等且平行, 所以, 向量  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$ . 这样, 在向量求和的作图上(图 1-6b), 可以简化为自  $\mathbf{a}$  的终点  $A$ , 作  $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$ , 连接  $OC$ , 则向量  $\overrightarrow{OC}$  就是  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的和向量. 这种方法又叫做向量加法的三角形法则.

根据求和运算法则, 容易验证向量加法有下列运算律: