Chuzhongsheng

初中生

假日教育活动读本

下册

JIARIJIAOYUHUODONGDUBEN

活动数学

HUO DONG SHU XUE

9

浙江科学技术出版社

JIARIJIAOYUHUODONGDUBENHUODONGSHUXUE

假日教育活动读本（下册）

活动数学

9

主　编　吴小平　刘一飞

编写者　高友军　潘宏伟　源穗宁　赵静波

浙江科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

假日教育活动读本. 活动数学. 9. 下册/吴小平, 刘一飞主编. —杭州: 浙江科学技术出版社, 2005. 1

ISBN 7-5341-2565-0

Ⅰ. 假... Ⅱ. 吴... Ⅲ. 数学课—初中—课外读物

Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 141194 号

假日教育活动读本(下册)

活 动 数 学

9

吴小平　刘一飞　主编

*

浙江科学技术出版社出版发行

杭州大漠照排印刷有限公司制作

杭州出版学校印刷厂印刷

开本: 700×1000　1/16　总印张: 19.5　总字数: 270 000

2005 年 1 月第 1 版

2006 年 1 月第 2 次印刷

ISBN 7-5341-2565-0

总定价: 24.00 元(共 4 册)

目录

MULU

1 该有多少种车票 …………………… 1

2 公主的肖像 ……………………… 5

3 奇妙的构图 ……………………… 9

4 $\sqrt{2}$的妙用 ……………………… 13

5 怎样能够取胜 …………………… 17

6 该班至少有同学几人 …………… 21

7 火车有多长 ……………………… 24

8 池塘里有多少条鱼 ……………… 28

9 为何多了一个洞 ………………… 33

10 怎样求坝底的宽 ………………… 37

11 怎样求铅球运动员的成绩 ……… 41

12 你知道哪个是坏球吗 …………… 46

13 三角形的周长是多少 …………… 50

14 捏合几次可拉出 128 根细面条 …… 55

15 三角形滚过的面积有多大 ……… 59

16 哪一个面积大 …………………… 63

参考答案 …………………………… 67

1　该有多少种车票

抛砖引玉

从宁波到杭州，乘坐火车将经过四个大站：余姚、曹娥、绍兴、萧山. 请问铁路部门对每一班次的火车将准备多少种车票，才能满足客人从宁波乘车到达目的地(甬杭之间)的各种需要？

显然，客人有从宁波到余姚、曹娥、绍兴、萧山及杭州的各种可能，也有从这几站上车到下面几站的可能. 因而车票不可能是 5 种，那么该有多少种呢？你能算出来吗？

温故知新

1. 两个原理

(1) 乘法原理：做一件事，完成它需要分 n 个阶段，第一阶段中有 m_1 种不同的方法，第二阶段中有 m_2 种不同的方法，…，第 n 阶段中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事就有 $N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种不同的方法.

(2) 加法原理：做一件事，完成它可以分成互不重复与遗漏的几类办法. 第一类办法中有 m 种不同的方法，第二类办法中有 m_2 种不同的方法，…，第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法.

2. 两个概念

(1) 组合：从 n 个不同元素中，任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素，不管次序合成一组的，叫做从 n 个不同元素中取 m 个元素的组合. 记作：C_n^m.

(2) 排列：从 n 个不同元素中♡，任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素，按照一定的次序排成一排的，叫做从 n 个不同元素中取 m 个元素的排列. 记作：P_n^m. 特别地，$m=n$ 时，记作：P_n.

3. 两个公式

(1) $P_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\dfrac{n!}{(n-m)!}$；　$P_n=n!$.

(2) $C_n^m=\dfrac{P_n^m}{P_m}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

思维点拨

例 1　如图 1－1，线段 AB 上有四点. 以 A、B、C、D、E、F 这 6 个点中的任意两点为端点，可以组成多少条不同的线段？

解：显然，图中每一线段都对应于从 6 个点中取出 2 个点的一个组合（AB 等价于 BA），故：

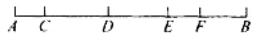

图 1－1

$C_6^2=\dfrac{6!}{2!(6-2)!}=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15.$

答：可组成 15 条不同的线段.

由此可见，"车票问题"也可归属于此类"线段问题". 即铁路部门应准备的车票种类应有 2×15 种.（问：为何要乘以 2？）

例 2　(1) 如图 1－2 中有多少个长方体？

(2) 如图 1－3 中有多少个长方体？

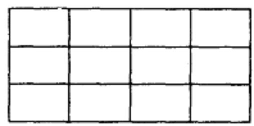

图 1－2

解：(1) $C_5^2\times C_4^2=60$.

(2) $C_4^2\times C_4^2\times C_3^2=108$.

例 3　满足 $x+y\leqslant5$ 的有序非负整数解有多少个（记为 (x,y)）？

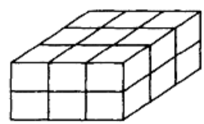

图 1－3

解：$\because$ x，y 都取非负整数，

$\therefore 0\leqslant x\leqslant5, 0\leqslant y\leqslant5$.

当 $x=0$ 时，y 可取 $0,1,\cdots,5$；

当 $x=1$ 时，y 可取 $0,1,\cdots,4$；

…

故　满足条件的解共有：$6+5+4+3+2+1=21$（种）

注：列举各种可能，然后进行分类讨论，是一种很好的解题办法.

例 4　某市举办了一次国际博览会，有 5 家美国公司、6 家日本公司、10 家中国公司提出申请参加会议，并且希望与异国的每一公司均洽谈一次. 请问：会议组织者应至少组织几次会谈才能满足与会者的要求？

解：中美会谈场次：$5\times10=50$（次）；

中日会谈场次：$6\times10=60$（次）；

美日会谈场次：$5\times6=30$（次）.

故需：$50+60+30=140$（次）.

例 5　三个白球、两个黑球排成一排，能有多少种不同的排列方法？

解法一：利用纯排列. 将白球编号为：a、b、c；将黑球编号为：m、n. 则这 5 个球排成一列有 P_5 种排列方法. 而其中的 3 个白球的 P_3 种排法，两个黑球的 P_2 种排法，均只能算一种，故：

$$\frac{P_5}{P_3P_2}=\frac{120}{6\times2}=10(\text{种}).$$

解法二：可利用组合：5 个排一列有 5 个位置. 先将白球放在任意 3 个位置上有 C_5^3 种排法，余下的空位可用两个黑球填上. 反过来，先将黑球放在任意 2 个位置上亦可.

则：$C_5^3=C_5^2=\frac{5\times4}{2\times1}$.

例 6 某新建城市的道路呈整齐的方格网状(如图 1-4)，由 A 到 B 有多少种不同的走法(要求路线最短)?

解：要求路线最短，则必须横向走四段，纵向走 3 段. 则在 7 段中必有 3 纵.

故 $C_7^3=\frac{7\times6\times5}{3!}=35(\text{种})$

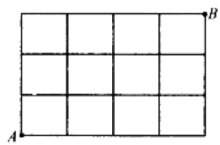

图 1-4

例 7 一只猴子爬一个 8 级的梯子，每次可爬一级或 2 级或 3 级. 则从地面到最上面一级，不同的爬法有多少种?

解：若有一级梯子：上法：$a_1=1$；

若有 2 级梯子：上法：$a_2=1+1=2$；

若有 3 级梯子：则可每次一级或 2 级与一级或一次 3 级，上法：$a_3=1+2+1=4$；

若有 4 级梯子：则必须至少在前 3 级的某一级停留一次，

可得 $a_4=a_1+a_2+a_3=7$.

$\therefore$ $a_8=a_5+a_6+a_7=81$.

思维训练

一、解答题

1. 有一段铁路，中间有 10 个站，问要准备几种车票?

2. 某班学生共订阅 A、B、C、D 4 种杂志，已知每人最多订阅 3 种杂志，最少订阅一种杂志，问共有多少种订阅方法?

3. 甲、乙两个自然数的和小于 50. 问甲、乙两数按不同的顺序取值，共有

几种？

4. 有 3 封信要寄往外地，这些信可投入 4 个不同的邮筒，问有多少种不同的投法？

5. 图 1－5 中有多少条不同的线段？

6. 用一张 1 元、一张 2 元、一张 5 元、一张 10 元人民币，可以组成多少种不同的币值？

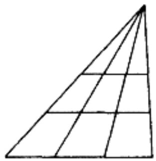

图 1－5

7. 将 2 面白旗、3 面红旗、2 面黄旗排成一排挂在桅杆上作为一种信号，问可挂出多少种不同的信号？若是可以挂面数不同的旗子，又可有多少种信号？

8. 将 5 只不同颜色的小球，全部投入 3 个小篮子，每只篮子最多投 2 只球，但不能有空篮子. 问有多少种不同的投法？

9. 新华、红星、前进、光明 4 个篮球队举行友谊赛，每两个队之间都要进行一场比赛. 试问：

(1) 一共要比赛多少场？

(2) 冠军、亚军获得者有几种可能？

10. 全班有 50 位同学，两两握手一次，共需握手多少次？又两两互赠一张照片，共需赠多少张？

11. 按 5 粒不同弹子的排列顺序造弹子锁，问能产生多少种不同的锁？

2　公主的肖像

抛砖引玉

数学家斯摩林曾编过这么一个问题：女主人公鲍西亚对求婚者说："这里有三只盒子：金盒、银盒、铅盒.金盒上写的是'肖像在这盒里'，银盒上写的是'肖像不在这盒里'、铅盒上写的是'肖像不在金盒里'.这三句话中只有一句是真话.谁能猜中我的肖像放在哪只盒子里，谁就能做我的丈夫."亲爱的同学，你能帮助求婚者猜出鲍西娅的肖像在哪个盒子里吗？

温故知新

逻辑：就是思维的规律.根据逻辑规律得出一定的结论就是逻辑推理.它要遵守四个基本规律：同一律、矛盾律、排中律、充足理由律.

(1) 同一律：我们在思考某一对象的整个过程中，每个概念必须在同一意义下使用.即：A 就是 A.

(2) 矛盾律：我们在思考某一对象的过程中，同一对象在同一时间和同一条件下，不应该具有两种互相矛盾的属性.即：A 不是 $\overline{A}$(非 A).

(3) 排中律：对同一对象，在同一条件和同一时间下，或者肯定它有某种属性，或者否定它有某种属性，不可能有第三种情况.即：或者 A，或者 $\overline{A}$.

(4) 充足理由律：由已知的事实推出新的事实，任何正确的判断都必须有充足的理由.

逻辑推理的一般方法为排他法和假设法.

(1) 排他法：用逻辑推理的方法，不断地否定和排除不可能存在的情况，从而得出符合要求的结论.

(2) 假设法：先作出假设，然后根据已知条件作出正确推理.若推出矛盾，则说明假设不合理，因此得出与假设相反的结果；如果从假设出发，没有推出矛盾，则说明假设合理.

思路点拨

例 1　本讲开头的例子，即可利用排中律解答.

解：金盒上的话与铅盒上的话意思截然相反.因此可以断定：必有一句是真话，另一句是假话.因为这三句话中只有一句是真话，因而银盒上的话是假的.所以肖像在银盒里.

注：抓住互相矛盾的两句话，利用排中律，往往是逻辑推理题解答的关键.

例2 某市有一家百货商场被窃.公安人员根据线索对赵、钱、孙、李四人进行审查.在审查中，这四个人的口供如下：

赵："我没有作案."

钱："我看到赵偷的."

孙："钱说谎，钱才是偷窃犯."

李："我不可能去偷东西."

破案后，发现罪犯确是他们四人中的一个，并且他们四人中只有一个人说了真话.其余的都说了假话.请问：谁说了真话？谁是偷窃犯？

解：四人中只有一人说的是真话，其余均说假话.根据矛盾律，发现赵与钱两人的话是对立的，则必有一真一假.可知孙与李说的均是假话.这样，李说的就是假话，即李为罪犯.钱说的也是假话，因此赵说的才是真话.

例3 在一家国际饭店，甲、乙、丙、丁四个朋友相遇，交谈时发现语言困难.在中、英、法、日四种语言中，每人只会两种，可惜选不出大家都会的语言，只有一种语言是三个人都知道的，并有下列条件：

(1) 乙不会英语.当甲和丙交谈时，乙当翻译.

(2) 甲会日语，丁不懂日语，但能交谈.

(3) 乙、丙、丁三人没有公共语言.

(4) 没有人又懂日语，又懂法语.

问：甲、乙、丙、丁各会什么语言？

解：由(1)(2)知：乙不会英语，甲会日语，丁不懂日语.因而可列表并打上"√"和"×".由(4)知：没有人同时会日语和法语，故甲不懂法语，乙一定懂中文，否则，乙一定得懂日语与法语了(每人只会两种语言).又由(1)，甲、丙交谈时乙翻译，故丙不懂甲的语言，因此丙不懂日语，必懂甲不懂的语言——法语.由题目知只有一种语言有三人懂，由表知不可能是日文；由(3)知，不可能是法文.由(1)知，甲、丙无互懂语言，故也不可能是英文，所以只有中文有三人都懂.此时甲若不懂中文，则乙、丙、丁有公共语言中文，与(3)矛盾.因而只有甲懂中文，不懂英语；丙不懂中文、丁懂中文.丙懂英语、乙懂法语不懂日文、丁不懂法文而懂英文.所以：甲懂中、日文；乙懂中、法文；丙会英、法文；丁会中、英文.

语言 \ 人名	甲	乙	丙	丁
中文	√	√	×	√
英语	×	×	√	√
法文	×	√	√	×
日文	√	×	×	×

注：利用列表作记号，能有效地把繁杂的条件表示出来，再通过逻辑关系，以求问题的解决.

例 4 某中学初三年级共 250 人.毕业考试成绩优秀的学生人数及科目如下表：

	单科			双科			三科
科目	数	语	外	数语	数外	语外	语数外
人数	131	117	152	61	79	62	53

这里，双科优秀者包括三科优秀；单科优秀者包括两科以上优秀的.试判断本统计表是否有误.

解：利用文氏图(见图 2－1).其中的三个圆分别表示数、语、外优秀人数.

则：$a+b+c+d+e+f+g=(a+d+e+g)+(b+d+f+g)+(c+e+f+g)-(d+g)-(f+g)-(g+e)+g=131+117+152-61-62-79+53=251$

而总学生数只有 250 人，故本统计表有误.

注：文氏图在解决集合论的关系中具有极佳的作用.

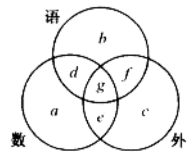

图 2－1

思维训练

1. 小明、小强、小华三个人参加迎春杯赛，他们是来自金城、沙市、水乡的选手，并分别获得一、二、三等奖.现在知道：①小明不是金城选手；②小强不是沙市选手；③金城的选手不是一等奖；④沙市的选手得二等奖；⑤小强不是三等奖.根据上述情况，小华就是________的选手，他得的是________等奖.

2. A、B、C、D 四个同学猜测他们之中谁被评上三好学生.A 说："如果，我被评上，那么 B 也被评上."B 说："如果我被评上，那么 C 也被评上."C 说："如果 D 没评上，那么我也没评上."实际上他们之中只有一个人没有被评上三好学生，并且

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

A、B、C 说的话都是正确的. 那么没有被评上三好学生的是________.

3. 甲、乙、丙、丁坐在同一排的彼此相邻座位上，座号是 1～4 号. 一个专说谎话的人说："乙坐在丙的旁边，甲坐在乙和丙的中间，乙的座位不是 3 号."那么，坐在 2 号座位上的是________.

4. 据说火星上有甲、乙两城，住在甲城的人从不说真话，住在乙城的人从不说假话. 有一次，两个宇航员降落到其中一个城市，正好碰到一个火星人. 第一个宇航员问他："这是甲城吗?"火星人回答："不是."但是他可能说谎. 于是，第二个宇航员提出一个很巧妙的问题，判断出了这是哪个城市. 第二个宇航员提的问题是________________________.

5. 一位法官审理一起珍宝盗窃案，有 4 名犯罪嫌疑人甲、乙、丙、丁. 他们的供词如下：

甲："罪犯在乙、丙、丁三人之中."

乙："我没有作案，是丙偷的."

丙："在甲和乙中间有一人是罪犯."

丁："乙说的是事实."

经过调查，证实这 4 人中有两人说的是真话，另两人说的是假话. 已知其中一人是罪犯. 问这罪犯是谁?

6. 有 50 名女孩，她们的肤色是白色的或黑色的，眼睛是蓝色的或褐色的. 若有 14 个是蓝眼睛、白肤色的，31 个黑肤色，18 个褐眼睛. 求褐眼睛、黑肤色的女孩数.

7. 有五所中学，每所中学派两支球队参加比赛. 比赛规定同一学校的两队不赛，不同学校的各队间都要赛一场. 比赛进行了若干天后，某个球队发现，其他 9 支球队比赛的场数各不相同. 问这支球队赛了多少场? 与它同校的另一支球队赛了多少场?

8. 世界杯足球赛小组比赛规定：胜者得 2 分，负者得 0 分，平局各得 1 分. 一个小组四队中得分高的两个队出线. 某小组 A、B、C、D 四队比赛. 当 A 胜 B，A 胜 C，与 C、D 平局后，比赛尚未结束. 请你预测一下：A 队能出线吗?

3 奇妙的构图

抛砖引玉

若关于 x 的方程 $|x^2-2x|=a$ 有两个不同的解，你能找出 a 的取值吗？你当然会说：能．只要我们对 a 的取值范围进行分类讨论，就可以做到．可你想过吗？这样的工作量将是很大的，且令人烦恼不已．有没有更好的办法呢？当然有．我们可以画图！

设 $y_1=|x^2-2x|$，$y_2=a$．很显然，本题就是 y_1 与 y_2 这两个函数的公共部分．由图 3－1，你是不是已经知道 a 的取值范围了？没错，正是"$a=0$ 和 $a>1$"．

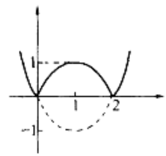

图 3－1

温故知新

1．构造法：构造出一个与问题 A 有关或等价的辅助问题 B．通过它帮助解决问题 A．

2．构造图形是构造法解题中的一种常用方法．它采用以图形的构造为主体，使原来的几何图形更加完整化、整体化；或是在原来的问题中构出一个新的图形来帮助思考，以解决问题．

3．构造过程中，常常伴随观察、分析、综合、联想、类比等思维过程，具有灵活性大、难度高、技巧性强等特点．对于思维的培养具有特别的效果．

思路点拨

例 1 一个六边形的六个内角相等，且连续四条边的长依次为 2、6、6、4．则该六边形的周长为多少？

解：画出图形．设四边如图 3－2 所示．

∵ 这六边形各内角相等，故

$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle E=\angle F=120°$，

则知它们的外角均为 60°．

故延长 CB、FA 交于 M，得正△ABM．

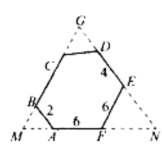

图 3－2

同理可得正$\triangle EFN$、正$\triangle GCD$.

知：$MN=GM=GN=2+6+6=14$，

$BM=2$，$EN=6$.

得：$GB=14-2=12$，$GC=CD$.

∴ 周长为：$12+2+6+6+4=30$.

注：此题还有多种图形的构造方法，同学们可以一试. 只要充分考虑图形的特殊性，我们就能进行类比、猜想.

例 2 已知：x、y、z 为正数，且 $xyz(x+y+z)=1$.

试求：表达式$(x+y)(y+z)$的最小值.

解：设$\begin{cases} a=x+y \\ b=x+z \\ c=z+x \end{cases}$ 构造以 a、b、c 为三边的三角形(见图 3－3)，

设 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，得：

$S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{(x+y+z)xyz}=1$

又 ∵ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}(x+y)(y+z)\cdot\sin C$

∴ $\frac{\sin C}{2}(x+y)(y+z)=1$，而 $\sin C\leqslant 1$.

即：$(x+y)(y+z)=\frac{2}{\sin C}\geqslant 2$.

当 $\sin C=1$，$\angle C=90^\circ$ 时，

得：$(x+y)(y+z)$ 的最小值为 a.

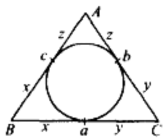

图 3－3

注：这又是一个构造三角形的例子，可以通过对三角形面积问题的联想，对三角形进行特殊化处理进行解决问题.

例 3 正数 a、b、c、A、B、C 满足 $a+A=b+B=c+C=k$.

求证：$aB+bC+cA<k^2$.

解：∵ $a+A=b+B=c+C=k$.

∴ 可构造一个以 k 为边的正方形，如图 3－4，显然，$aB=\text{Ⅰ}$，$bC=\text{Ⅱ}$，$cA=\text{Ⅲ}$.

得：$aB+bC+cA<k^2$.

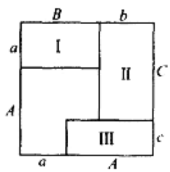

图 3－4

注：如果我们把正方形换成三角形呢？同学们也可试一下.

例 4 已知：$a^2+b^2=1$，$a>0$，$b>0$.

求代数式 $M=a^2b^2+(a+b)^2-3$ 的取值范围.

解：$\because a^2+b^2=1$，

$\therefore 2ab\leqslant a^2+b^2=1$.

$\therefore 0<ab\leqslant\frac{1}{2}$.

$\because M=a^2b^2+(a+b)^2-3$

$=a^2b^2+2ab-2$，

令 $ab=x$，则：

$M=x^2+2x-2=(x+1)^2-3\quad(0<x\leqslant\frac{1}{2})$，

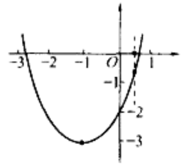

图 3-5

构造如图 3-5，得：$-2<M\leqslant-\frac{3}{4}$.

注：利用函数来构图，往往有意想不到的效果.

例 5 某校共有三个科技兴趣小组：天文、环保和计算机. 已知参加三个兴趣小组的学生分别有 24，25，30 人. 同时参加天文、环保兴趣小组的有 5 人，同时参加天文、计算机兴趣小组的有 2 人，同时参加环保、计算机兴趣小组的有 4 人，有 1 人同时参加这三个兴趣小组，问共有多少学生参加了科技兴趣小组？

解：此题可构造韦恩图来解答，如图 3-6，在各个部分填上相应的数字，则学生数就为：$17+4+1+3+25+1+18=69$（人）

注：韦恩图能把复杂的集合关系表示得更清楚、直观. 所以，它是解决有关集合问题的常用方法.

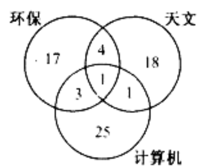

图 3-6

思维训练

一、填空题

1. 已知六边形的各外角均相等，其连续四边的长依次为 1cm、9cm、9cm、5cm，则这个六边形的周长是________cm.

2. 若方程 $|x^2-1|=x+m$ 的解的个数（相异解的个数）不少于 3，则 m 的取值范围是________.

3. $\triangle ABC$ 中，$AB=AC=2$，BC 边上有 100 个不同的点 $P_1,P_2,\cdots,P_{100}$，记 $m_i=AP_i^2+BP_i\cdot P_iC(i=1,2,\cdots,100)$，则 $m_1+m_2+\cdots+m_{100}=$________.

二、解答题

4. 设变量 x、y、z 介于 0 与 1 之间，求证：$x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1$.

5. 比较 a 与 $\frac{1}{a}$ 的大小.

6. 设 a、b、c、d 均为正数，求证：

存在以 $\sqrt{b^2+c^2}$、$\sqrt{a^2+c^2+d^2+2cd}$、$\sqrt{a^2+b^2+d^2+2ad}$ 为三边长的三角形，并求这个三角形的面积.

7. 某轮船公司每天中午都有一艘轮船从哈佛开往纽约，并且每天的同一时刻也有一艘轮船从纽约开往哈佛. 轮船在途中所花的时间来去都是七昼夜，而且都是匀速航行在同一条航线上. 问：今天中午从哈佛开出的轮船，在开往纽约的航行过程中，将会遇到几艘同一公司的轮船从对面开来？

8. 已知：$a>0$，$b>0$，$c>0$，$d>0$，且 $a^2+b^2=1$，$c^2+d^2=1$.

求证：$ac+bd\leqslant 1$.

9. 若 $0<x<1$，求证：$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+(1-x)^2}>2\sqrt{2}-1$.

4 $\sqrt{2}$ 的妙用

抛砖引玉

如果有人说：a、b 都是无理数，那么 a^b 也是无理数. 你认为呢？

相信有很多人会试着用几个数去试代一下，看看是否成立. 实际上你已经在不经意间使用了"构造式"这一数学思想了. "构造式"是构造法中的一种，这在上节中我们已经接触到了. 下面让我们来具体看一下.

温故知新

1. 用构造式解决问题，是构造法中的一种特殊手段. 它通过构造一个新的代数式或等式帮助我们开拓思路，促使问题的转化——使问题中原来隐晦不清的关系和性质在新的构造中清晰地展现出来，从而简捷地解决问题.

2. 根据问题的特征，可利用代数式的特点、方程的意义（包括概念、根的判别式、韦达定理）等构造式或方程，以解决问题.

思路点拨

例 1 命题"如果 a、b 都是无理数，那么 a^b 是无理数"是否正确？如果正确，给出证明；如果不正确，试说明理由.

解：不妨构造等式：$b=c=\sqrt{2}$.

可先假设原命题成立，则 $b^c=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}=a$.

故：$a^b=(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ 为无理数，

而：$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^2=2$ 为有理数.

∴ 原命题为错误的.

注：构造一个式子，使命题出现一个明显的错误，是解决问题中常用的方法之一.

例 2 已知 α、β 是方程 $x^2-x-1=0$ 的两个根，$\alpha>\beta$.

不解方程，求 $\dfrac{2}{\alpha^2}+3\beta^3$ 的值.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.