中学基础知识讲座

现代数学

XIANDAI SHUXUE

第 一 集

四川人民出版社

中学基础知识讲座

现 代 数 学

第 一 集

四川省数学会普及组主编
程 汉 晋 编 著

四川人民出版社
一九八〇年·成都

封面设计：邹小工

现代数学（第一集）

四川人民出版社出版　（成都盐道街三号）
四川省新华书店发行　渡口新华印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/32　印张 8　字数 176 千
1980 年 2 月第 1 版　1980 年 2 月第 1 次印刷
印数：1—51,500册

书号：13118.27　定价：0.65 元

前　　言

科学技术现代化是实现四个现代化的关键，必须加强现代科学技术的教育。数学是各门科学技术的工具和基础，更应加强现代数学的教学。在现行全日制十年制学校《中学数学教学大纲》(试行草案)中，除了传统数学外，已增加了一部分科学技术中常用的现代数学。为了适应中学数学教师、青年学生的需要，我们根据《中学数学教学大纲》的要求，编写了中学基础知识讲座《现代数学》。本书共十讲，前六讲，去年应读者急需，曾由四川省教育局教材编写处油印发省内各地（州）、市、县教育部门，作为学习与教学参考。由于印数甚少，远不能满足需要。现经编者加以修订整理，交四川人民出版社出版。全书十讲编成三集。

第一集包括三讲：集与函数；线性方程与矩阵；向量与几何变换。

第二集包括四讲：函数与极限；连续与导数；积分；级数。

第三集包括三讲：概率；逻辑代数；[illegible]数结构。

本书各讲以现行《中学数学教学大纲》中新增加的内容，略为扩大、加深和提高，文字[illegible]较简明扼要，内容由浅入深。由于各讲的篇幅不大，本书还适宜短期培训师资使用。为了便于读者阅读，每集后面还附有习题解答。

限于编者水平，本书错误之处在所难免，欢迎读者批评指正。

编者识于四川师范学院数学系

一九七九年六月

目　　次

第一讲　集 与 函 数

一、集的概念与运算

1·1　集的概念

“集”是一种不可以精确定义的数学基本概念，我们只能给以一种描述：凡是具有某种特殊性质相异而确定的东西的全体即称之为集，构成集的东西称为这个集的元素.

若构成一个集的元素是数，叫做数集；构成一个集的元素是点，叫做点集，这两种集，在数学中应用最为广泛.

例如，小学开始学习“10 以内的数”，这些数 1、2、3、4、5、6、7、8、9 就 构成一个数集.

后来学到“10000 以内的数”，这些数 1、2、3、……、9999”，也构成一个数集.

最后学到“一切自然数”，这些数 1、2、3……同样构成一个数集，叫做自然数集.

又在初中学习了“正负整数、正负分数与零”，所有这些数构成一个数集，叫做有理数集.

后来学到正负无理数（如$\sqrt{2}$、$-\sqrt{2}$等），所有的有理数与无理数又构成一个数集，叫实数集.

又学了数轴上的点，数轴上的所有点，就构成一个点集，叫做直线点集.

到了高中学了坐标平面上的点，坐标平面上的所有点，也构成一个集，叫做平面点集.

对于集我们应当注意下列两点：

（1）集中元素是相异而无序的，例如1、2、3、4与4、2、3、1都表示集且为相同的集，而1、1、3、3为集应表示为1、3；

（2）集必须有确定的界限，不能含糊不清，例如："一切自然数"有确定的界限是一个集"，"一切甚大的数"无确定的界限不是一个集.

1·2 集中常用的符号

我们通常用大写字母：A、B、C…… X、Y、Z 表示集，而用小写字母：a、b、c……、x、y、z 表示集中的元素。又用：

$a\in A$（读为 a 属于 A），表示 a 是 A 的元素；

$a\overline{\in} A$（读为 a 不属于 A），表示 a 不是集 A 的元素；.

$A\subset B$（读为 B 包含 A），表示 A 是 B 的子集，即是每一个 $a\in A\Longrightarrow a\in B$*；

$A=B$（读为 A 等于 B），表示集 A 与集 B 相等，即是每一个 $a\in A\Longleftrightarrow a\in B$**；

$A=\{a、b、c\cdots\cdots\}$ 表示集合 A 含有元素 a、b、c……；

$A=\{x|p(x)\}$，表示使命题 $p(x)$ 成立的 x 的全体；

$A=\{x|x\in B, p(x)\}$，表示使命题 $p(x)$ 成立所有属于集 B 的 x 的全体；

ϕ 表示空集，即是没有元素的集.

例1 如 $A=\{1、2、3、4、5\}$，则 $2\in A$，$5\in A$，而 $0\overline{\in} A$，$7\overline{\in} A$.

例2 如 $A=\{1、2、3、4、5\}$，$B=\{1、2、3、4、5、6、7\}$，

---

* $a\in A\Longrightarrow a\in B$，表示"$a$ 是 A 的元素必然是 B 的元素"，也就是 B 包含 A 的所有元素.

** $a\in A\Longleftrightarrow a\in B$，表示"$a$ 是 A 的元素必然 a 是 B 的元素"，反之"a 是 B 的元素必然 a 是 A 的元素"，也就是 A 与 B 所含元素完全一样.

则 $A\subset B$，并且 $A\subset A$，即集是自身的子集.

例3 如 $A=\{-1, 1\}$，$B=\{x\mid x^2-1=0\}$.因 $x^2-1=0$，则 $x=1$，$x=-1$，所以：$B=\{x\mid x^2-1=0\}=\{-1, 1\}$，故知 $A=B$.

例4 $B=\{1、2、3\cdots\cdots\}$ 自然数集，则：

$$A=\{x\mid x\in B,\ 2<x<7\}=\{3、4、5、6\}.$$

例5 $A=\{x\mid x^2+1=x^2+2\}=\phi$.

例6 如果B是任何集，则$\phi\subset B$，即是空集为任何集的子集.

因为 $A\subset B$ 的意义是：

"a 是 A 的元素，必然 a 是 B 的元素"。

这个意义与下面的意义是一样的，即：

"a 不是 B 的元素，必然 a 不是 A 的元素"

若 $A=\phi$，即是没有元素的集，当然有：

"a 不是 B 的元素，必然 a 不是 ϕ 的元素"，

所以知 $\phi\subset B$.

1·3 集的运算

1. 和集、交集、差集的定义

定义1 若 $x\in C\Longleftrightarrow x\in A$ 或 $x\in B$(即若是 C 的元素，必然是 A 或 B 的元素，反之亦然)则集 C 叫做集 A 与集 B 的和集或并集. 记为

$$C=A\cup B.\quad(参看图1·1)$$

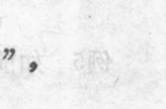

图 1·1

例1 如 $A=\{1、2、3、4、5\}$，

$B=\{4、5、6、7\}$，则

$C=A\cup B=\{1、2、3、4、5、6、7\}$.

例2 $A=\{1、2、3、4、5\}$， $B=\{1、3、5\}$，则：

$$C=A\cup B=\{1、2、3、4、5\}=A.$$

定义 2　若 $x\in C\Longleftrightarrow x\in A$ 和 $x\in B$(即若是 C 的元素必然是 A 和 B 的元素，反之亦然.)则集 C 叫做集 A 与集 B 的交集. 记为

$$C=A\cap B.$$ （参看图1·2）

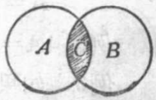

图 1·2

例3　如前面例 1 的 A、B，则：

$$C=A\cap B=\{4、5\}.$$

例4　如前例 2 中的 A、B，则：

$$C=A\cap B=\{1、3、5\}=B.$$

定义 3　若 $x\in C\Longleftrightarrow x\in A$ 而 $x\notin B$(即若是 C 的元素，必然是 A 的元素而不是 B 的元素，反之亦然)则集 C 叫做集 A 与集 B 的差集. 记为：

$$C=A-B.$$ （参看图1·3）

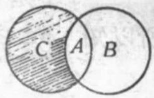

图 1·3

例5　如前面例 1 中的 A,B，则：

$$C=A-B=\{1、2、3\}.$$

例6　如前面例 2 中的 A、B 则：

$$C=A-B=\{2、4\}，\ B-A=\phi.$$

2．集的运算律

定理 1·1（运算律）：

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$；

$$A\cap B=B\cap A.$$

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$$

(3) 分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C).$$

证：（初学时这个证明可以省略不看）

上面定律的证明，都可以用集相等的定义：

“$A=B$ 时，　即是 $x\in A\Longleftrightarrow x\in B$”

来证明．现在证明 (3) 之一如下面：

$x\in(A\cup B)\cap C\Longleftrightarrow x\in(A\cup B)$ 和 $x\in C\Longleftrightarrow(x\in A$ 或 $x\in B)$ 和 $x\in C\Longleftrightarrow(x\in A$ 和 $x\in C)$ 或 $(x\in B$ 和 $x\in C)\Longleftrightarrow x\in A\cap C$ 或 $x\in B\cap C\Longleftrightarrow x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

即是　$x\in(A\cup B)\cap C\Longleftrightarrow x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$\therefore$　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

例7　设 $A=\{1、2、5\}$，$B=\{2、3、4\}$，$C=\{3、5、7\}$，则

$A\cap B=\{2\}$，$(A\cap B)\cup C=\{2、3、5、7\}$，

又　$A\cup C=\{1、2、3、5、7\}$，$B\cup C=\{2、3、4、5、7\}$，

则　$(A\cup C)\cap(B\cup C)=\{2、3、5、7\}$，

$\therefore$　$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

这是用具体的例子来说明分配律之二是成立。

例8　证明：$(A\cup B)\cap A=A$.

证：$\because$　$(A\cup B)\cap A=(A\cap A)\cup(B\cap A)$，

但　$A\cap A=A$，$B\cap A\subset A$，

则　$(A\cap A)\cup(B\cap A)=A\cup(B\cap A)=A$，（参看习题一第4题）

$\therefore$　$(A\cup B)\cap A=A$.

3．空间与余集

我们有时为了研究和叙述上的方便，事先引入一个固定的集X而被研究的一切集都是X的子集，这时我们称X为一个空间或全集．

例如：在小学阶段学习算术时，是把零和一切正有理数组成的集X作为空间，其他“10以内的数”、“10000以内的数”、“一切自然数”、“一切小数”、“一切分数”等都是X的子集．

又如在中学阶段学习平面上的几何图形时，是把平面上一切点组成的点集X作为空间，其他"三角形"、"四边形"、"圆"等都是X的子集（图形是点组成的集）.

有了空间的概念，我们下面给以余集的定义：

定义4　设集X是空间，集A是X的子集；则$X-A$叫做集A的余集或补集，记为：

$$X-A=A^C\text{或}\bar{A}.\quad(\text{参看图}1\cdot4)$$

图 1·4

例9　设$X=\{1、2、3、4、5、6、7\}$，

$A=\{2、3、4\}$，　$B=\{1、2、4、6\}$，

则　$A^C=\{1、5、6、7\}$，$B^C=\{3、5、7\}$.

例10　设$X=(-\infty,+\infty)$（即全体实数组成的集）

$A=(3,+\infty)$，　$B=[3,5]$，则：

$A^C=(-\infty,3]$　$B^C=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$.

定理1.2（*De-Morgan*公式）

(1) $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$；　(2) $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

证：(1) ∵　$x\in(A\cup B)^C\Longleftrightarrow x\in X-(A\cup B)\Longleftrightarrow x\in X$而$x\overline{\in}(A\cup B)\Longleftrightarrow x\in X$而$(x\overline{\in}A$和$x\overline{\in}B)\Longleftrightarrow(x\in X$而$x\overline{\in}A)$和$(x\in X$而$x\overline{\in}B)\Longleftrightarrow(x\in X-A)$和$(x\in X-B)\Longleftrightarrow x\in A^C\cap B^C$.

即　$x\in(A\cup B)^C\Longleftrightarrow x\in A^C\cap B^C$，

∴　$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$.

(2) 的证明法与（1）相同.

例11　如上面例9中的X、A、B则：

$A\cap B=\{2、4\}$，$(A\cap B)^C=X-(A\cap B)$

$=\{1、3、5、6、7\}$.

又　$A^C=X-A=\{1、5、6、7\}$，$B^C=X-B=\{3、5、7\}$，

则　$A^C\cup B^C=\{1、3、5、6、7\}$，

∴　$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

1·4 序对集

我们在数学中，会遇到集的元素不是单个的元素。而是由两个有顺序的元素组成一对作为元素.

例如：坐标平面上的点集，它的元素用数表示出来，就是两个有顺序的数x、y组成的数对(x,y).

下面对于序对集给以定义：

定义1.5　由两个元x、y组成的元素对(x,y)，当且仅当$x=x'$，$y=y'$时，有$(x,y)=(x',y')$；则(x,y)叫做序对. 由序对为元素组成的集，叫做序对集.

例1　设坐标平面的点为：

$$(3,2)、(2,3)、(4,5)、(2,5)、(2,3)，$$

其中：　$$(3,2)\neq(2,3)\neq(4,5)\neq(2,5),$$

它们表示不同的点.

只有　$$(2,3)=(2,3),$$

它们表示相同的点.

例2　在小学学习乘法九九表，是组成下面的序对集：

一一得一，一二得二，一三得三，……就是由序对$(1,1)$，$(1,2)$，$(1,3)$……得出结果的，这样组成的序对共有$9\times9=81$对，组成一个序对集.

象下面九九表中，这样组成的序对集，我们给以下面的定义：

定义1.6　设有两个集A与B，将A中的每一元素x与B中的每一元素y，配成所有的序对(x,y)组成的序对集，叫做A与B的直积集或卡氏积，记为$A\times B$，即是：

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}.$$

例3　如$A=\{1、2、3、\cdots\cdots、9\}$，则：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)	(7,1)	(8,1)	(9,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)	(7,2)	(8,2)	(9,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)	(7,3)	(8,3)	(9,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)	(7,4)	(8,4)	(9,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)	(7,5)	(8,5)	(9,5)
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)	(7,6)	(8,6)	(9,6)
7	(1,7)	(2,7)	(3,7)	(4,7)	(5,7)	(6,7)	(7,7)	(8,7)	(9,7)
8	(1,8)	(2,8)	(3,8)	(4,8)	(5,8)	(6,8)	(7,8)	(8,8)	(9,8)
9	(1,9)	(2,9)	(3,9)	(4,9)	(5,9)	(6,9)	(7,9)	(8,9)	(9,9)

$$A\times A=\{(1,1)(2,1)(3,1)\cdots\cdots(9,9)\},$$

如例2的九九表中，有81个元素.

例4　如$A=\{1、2、3、5\}$，$B=\{4、5、6\}$则直积集 $A\times B$ 的元素如下：

(1,4)　(2,4)　(3,4)　(5,4)

(1,5)　(2,5)　(3,5)　(5,5)

(1,6)　(2,6)　(3,6)　(5,6)

又直积集 $B\times A$ 的元素如下：

(4,1)　(5,1)　(6,1)

(4,2)　(5,2)　(6,2)

(4,3)　(5,3)　(6,3)

(4,5)　(5,5)　(6,5)

从上面看到$A\times B$与$B\times A$一般是不相等的.

例5　如 A是 全体实数组成的集，则 $A\times A$ 是坐标平面

上所有点组成的点集。

习 题 一

1．设$X=\{a、b、c、d\}$求出X的所有子集．

2．设$X=\{1、2、3、4、5、6、7、8、9、10\}$（空间）$A=\{6、8、9\}$ $B=\{1、3、7、8、9\}$，$C=\{2、6、8、9\}$求出：

(1) $A\cup B$与$A\cap C$；

(2) $(A\cup B)\cup C$与$A\cup(B\cup C)$；

(3) $(A\cap B)\cap C$与$A\cap(B\cap C)$．

3．用2题的所设，求出：

(1) $(A\cup B)\cap C$与$(A\cap C)\cup(B\cap C)$；

(2) $(A\cup B)^C$与$A^C\cap B^C$．

4．证明$A\subset B\Longleftrightarrow A=A\cap B$；　$A\subset B\Longleftrightarrow B=A\cup B$．

5．设$A\subset B$，C是任一集，证明：

(1) $A\cap C\subset B\cap C$；　(2) $A\cup C\subset B\cup C$．

6．设$A=\{1、2、3、4\}$，求出$A\times A$．

7．设$A=\{1、2、3、4\}$，$B=\{3、4、5\}$，求出$A\times B$与$B\times A$．

8．设$A=[1,5]$（闭区间），$B=[2,6]$（闭区间），在坐标平面上作出$A\times B$．

9．设$A=(2,6)$（开区间），$B=(1,6)$（开区间），在坐标平面上作出$A\times B$．

10．推广定义 1.6　$A\times B\times C=(A\times B)\times C$；设$A=\{1、2、3\}$，$B=\{2、3、4\}$，$C=\{1、2\}$，作出$A\times B\times C$．

二、关系与函数

2·1　关系

关系这个概念，在研究数学中是经常遇到的概念，如一