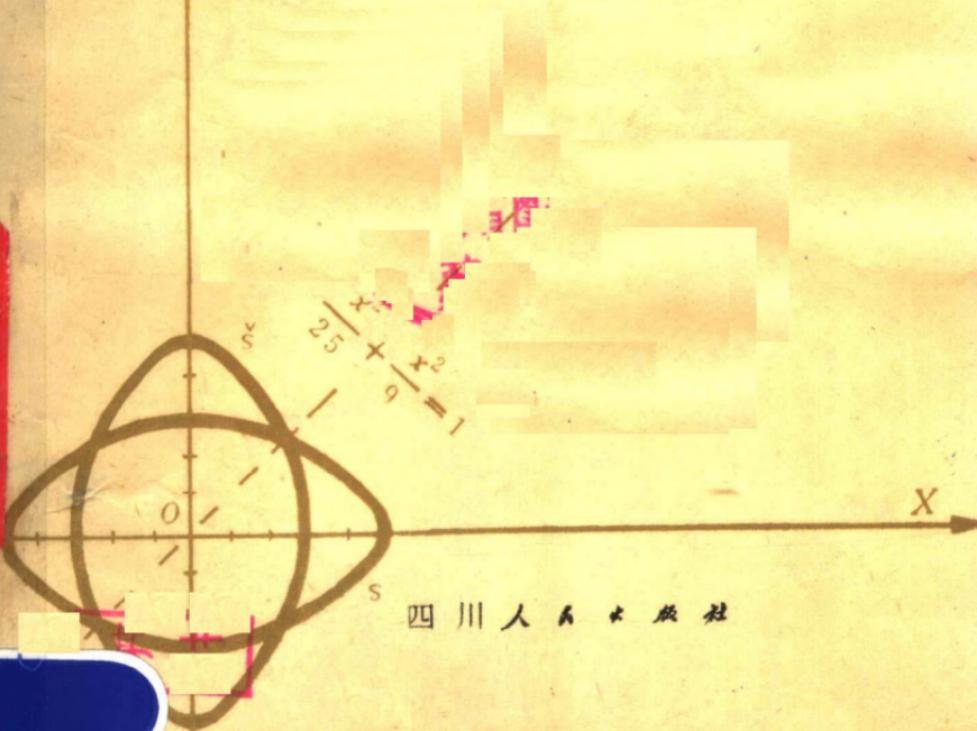


中学基础知识讲座

现代数学

XIANDAI SHUXUE

第一集



四川人民出版社

中学基础知识讲座

现代数学

第一集

四川省数学会普及组主编
程汉晋编著

四川人民出版社

一九八〇年·成都

封面设计：邹小工

现代数学(第一集)

四川人民出版社出版

(成都盐道街三号)

四川省新华书店发行

渡口新华印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 8 字数 176 千

1980 年 2 月第 1 版 1980 年 2 月第 1 次印刷

印数：1—51,500 册

书号：13118.27

定价：0.65 元

前　　言

科学技术现代化是实现四个现代化的关键，必须加强现代科学技术的教育。数学是各门科学技术的工具和基础，更应加强现代数学的教学。在现行全日制十年制学校《中学数学教学大纲》（试行草案）中，除了传统数学外，已增加了一部分科学技术中常用的现代数学。为了适应中学数学教师、青年学生的需要，我们根据《中学数学教学大纲》的要求，编写了中学基础知识讲座《现代数学》。本书共十讲，前六讲，去年应读者急需，曾由四川省教育局教材编写处油印发省内各地（州）、市、县教育部门，作为学习与教学参考。由于印数甚少，远不能满足需要。现经编者加以修订整理，交四川人民出版社出版。全书十讲编成三集。

第一集包括三讲：集与函数；线性方程与矩阵；向量与几何变换。

第二集包括四讲：~~数与极限；连续与导数；积分；级数。~~

第三集包括三讲：~~概率；复数；数结构。~~

本书各讲以现行《~~中学数学教~~大纲》中新增加的内容，略为扩大、加深和提高。~~文字~~较简明扼要，内容由浅入深。由于各讲的篇幅不大，本书还适宜短期培训师资使用。为了便于读者阅读，每集后面还附有习题解答。

限于编者水平，本书错误之处在所难免，欢迎读者批评指正。

编者识于四川师范学院数学系

一九七九年六月

目 次

第一讲 集与函数

一、集的概念与运算	(1)
1·1 集的概念	(1)
1·2 集中常用的符号	(2)
1·3 集的运算	(3)
1·4 序对集	(7)
习题一	(9)
二、关系与函数	(9)
2·1 关系	(9)
2·2 函数	(11)
2·3 反关系与反函数	(15)
2·4 连续曲线、光滑曲线与约当曲线	(20)
2·5 复合函数与子序列	(21)
习题二	(24)
三、可列集与不可列集	(26)
3·1 集的对等	(26)
3·2 可列集	(28)
3·3 不可列集	(32)
习题三	(35)

第二讲 线性方程组与矩阵

一、用行列式解线性方程组	(36)
1·1 二元线性方程组	(36)
1·2 三元齐次线性方程组	(38)

1·3	三元线性方程组	(42)
1·4	行列式的性质	(49)
	习题一	(55)
二、线性型与矩阵		(58)
2·1	线性型与矩阵	(58)
2·2	线性型的相加与矩阵的加法	(59)
2·3	线性型乘以数与矩阵乘以数	(60)
2·4	线性型的代换与矩阵乘法	(62)
2·5	单位矩阵与转置矩阵	(65)
2·6	逆线性型与逆矩阵	(67)
2·7	用逆矩阵解线性方程组	(73)
	习题二	(74)
三、用矩阵研究线性方程组的解与解法		(77)
3·1	矩阵的秩与矩阵的初等变换	(77)
3·2	齐次线性方程组的解	(82)
3·3	线性相关与线性无关	(85)
3·4	线性方程组的解	(91)
3·5	线性方程组的解法	(100)
	习题三	(106)

第三讲 向量与几何变换

一、平面向量	(109)	
1·1	有向线段	(109)
1·2	向量和它的坐标	(111)
1·3	向量的加法	(115)
1·4	向量乘以数与线性相关	(116)
1·5	向量的数量积与正交向量	(121)
1·6	平面向量的推广	(123)
1·7	用向量解证几何问题举例	(124)
	习题一	(128)

二、中心正交变换	(129)
2·1 映射与变换	(129)
2·2 恒等变换与旋转变换	(131)
2·3 反射变换	(133)
2·4 变换的乘积	(136)
2·5 正交矩阵与中心正交变换	(138)
习题二	(140)
三、中心仿射变换	(141)
3·1 位似变换	(141)
3·2 压伸变换	(142)
3·3 中心对称变换	(143)
3·4 中心对称变换的特征向量	(144)
3·5 错切变换(切变)	(148)
3·6 中心仿射变换	(149)
习题三	(153)
四、仿射变换	(154)
4·1 平移变换	(154)
4·2 仿射变换	(155)
4·3 仿射坐标	(157)
4·4 坐标的正交变换	(159)
4·5 二次曲线的仿射分类	(161)
习题四	(165)
五、射影变换	(167)
5·1 齐次坐标与影射平面	(167)
5·2 过两点的直线与两直线的交点	(169)
5·3 点列与二重比	(171)
5·4 射影变换	(174)
5·5 射影坐标	(180)
习题五	(184)

六、变换群与几何学	(186)
6·1 群与变换群	(186)
6·2 射影变换群	(187)
6·3 仿射变换群	(189)
6·4 正交变换群	(189)
6·5 几何学的分类	(190)
习题六	(193)
[附] 习题解答	(195)

第一讲 集与函数

一、集的概念与运算

1.1 集的概念

“集”是一种不可以精确定义的数学基本概念，我们只能给以一种描述：凡是具有某种特殊性质相异而确定的东西的全体即称之为集，构成集的东西称为这个集的元素。

若构成一个集的元素是数，叫做数集；构成一个集的元素是点，叫做点集，这两种集，在数学中应用最为广泛。

例如，小学开始学习“10以内的数”，这些数1、2、3、4、5、6、7、8、9就构成一个数集。

后来学到“10000以内的数”，这些数1、2、3、……、9999，也构成一个数集。

最后学到“一切自然数”，这些数1、2、3……同样构成一个数集，叫做自然数集。

又在初中学习了“正负整数、正负分数与零”，所有这些数构成一个数集，叫做有理数集。

后来学到正负无理数（如 $\sqrt{2}$ 、 $-\sqrt{2}$ 等），所有的有理数与无理数又构成一个数集，叫做实数集。

又学了数轴上的点，数轴上的所有点，就构成一个点集，叫做直线点集。

到了高中学了坐标平面上的点，坐标平面上的所有点，也构成一个集，叫做平面点集。

对于集我们应当注意下列两点：

(1) 集中元素是相异而无序的，例如 1、2、3、4 与 4、2、3、1 都表示集且为相同的集，而 1、1、3、3 为集应表示为 1、3；

(2) 集必须有确定的界限，不能含糊不清，例如：“一切自然数”有确定的界限是一个集，“一切甚大的数”无确定的界限不是一个集。

1·2 集中常用的符号

我们通常用大写字母：A、B、C……X、Y、Z 表示集，而用小写字母：a、b、c……x、y、z 表示集中的元素。又用：

$a \in A$ (读为 a 属于 A)，表示 a 是 A 的元素；

$a \notin A$ (读为 a 不属于 A)，表示 a 不是集 A 的元素；

$A \subset B$ (读为 B 包含 A)，表示 A 是 B 的子集，即是每一个 $a \in A \Rightarrow a \in B$ ；

$A = B$ (读为 A 等于 B)，表示集 A 与集 B 相等，即是每一个 $a \in A \Leftrightarrow a \in B$ ；

$A = \{a, b, c, \dots\}$ 表示集合 A 含有元素 a、b、c……；

$A = \{x | p(x)\}$ ，表示使命题 $p(x)$ 成立的 x 的全体；

$A = \{x | x \in B, p(x)\}$ ，表示使命题 $p(x)$ 成立所有属于集 B 的 x 的全体；

\emptyset 表示空集，即是没有元素的集。

例1 如 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，则 $2 \in A, 5 \in A$ ，而 $0 \notin A, 7 \notin A$ 。

例2 如 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ， $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ，

* $a \in A \Rightarrow a \in B$ ，表示“a 是 A 的元素必然是 B 的元素”，也就是 B 包含 A 的所有元素。

** $a \in A \Leftrightarrow a \in B$ ，表示“a 是 A 的元素必然 a 是 B 的元素”，反之“a 是 B 的元素必然 a 是 A 的元素”，也就是 A 与 B 所含元素完全一样。

则 $A \subset B$, 并且 $A \subset A$, 即集是自身的子集.

例3 如 $A = \{-1, 1\}$, $B = \{x | x^2 - 1 = 0\}$. 因 $x^2 - 1 = 0$,
则 $x = 1$, $x = -1$, 所以: $B = \{x | x^2 - 1 = 0\} = \{-1, 1\}$,
故知 $A = B$.

例4 $B = \{1, 2, 3, \dots\}$ 自然数集, 则:

$$A = \{x | x \in B, 2 < x < 7\} = \{3, 4, 5, 6\}.$$

例5 $A = \{x | x^2 + 1 = x^2 + 2\} = \emptyset$.

例6 如果 B 是任何集, 则 $\emptyset \subset B$, 即是空集为任何集的子集.

因为 $A \subset B$ 的意义是:

“ a 是 A 的元素, 必然 a 是 B 的元素”.

这个意义与下面的意义是一样的, 即:

“ a 不是 B 的元素, 必然 a 不是 A 的元素”

若 $A = \emptyset$, 即是没有元素的集, 当然有:

“ a 不是 B 的元素, 必然 a 不是 \emptyset 的元素”,

所以知 $\emptyset \subset B$.

1.3 集的运算

1. 和集、交集、差集的定义

定义1 若 $x \in C \Leftrightarrow x \in A$ 或 $x \in B$ (即若是 C 的元素,
必然是 A 或 B 的元素, 反之亦然) 则集 C 叫做集 A 与集 B 的
和集或并集. 记为

$$C = A \cup B. \quad (\text{参看图1.1})$$

例1 如 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$$B = \{4, 5, 6, 7\}, \text{ 则}$$

$$C = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

例2 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, 则:



图 1.1

$$C = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} = A.$$

定义 2 若 $x \in C \Leftrightarrow x \in A$ 和 $x \in B$ (即若是 C 的元素必然是 A 和 B 的元素, 反之亦然.) 则集 C 叫做集 A 与集 B 的交集. 记为

$$C = A \cap B.$$

(参看图 1·2)

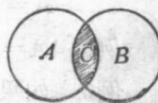
例3 如前面例 1 的 A, B , 则:

$$C = A \cap B = \{4, 5\}.$$

例4 如前例 2 中的 A, B , 则:

$$C = A \cap B = \{1, 3, 5\} = B.$$

图 1·2



定义 3 若 $x \in C \Leftrightarrow x \in A$ 而 $x \notin B$ (即若是 C 的元素, 必然是 A 的元素而不是 B 的元素, 反之亦然) 则集 C 叫做集 A 与集 B 的差集. 记为:

$$C = A - B.$$

(参看图 1·3)

例5 如前面例 1 中的 A, B , 则:

$$C = A - B = \{1, 2, 3\}.$$

例6 如前面例 2 中的 A, B 则:

$$C = A - B = \{2, 4\}, B - A = \emptyset.$$

图 1·3



2. 集的运算律

定理 1·1 (运算律):

(1) 交换律: $A \cup B = B \cup A;$

$$A \cap B = B \cap A.$$

(2) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

(3) 分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C);$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

证: (初学时这个证明可以省略不看)

上面定律的证明, 都可以用集相等的定义:

“ $A=B$ 时， 即是 $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ ”

来证明。现在证明 (3) 之一如下面：

$x \in (A \cup B) \cap C \Leftrightarrow x \in (A \cup B)$ 和 $x \in C \Leftrightarrow (x \in A \text{ 或 } x \in B) \text{ 和 } x \in C \Leftrightarrow (x \in A \text{ 和 } x \in C) \text{ 或 } (x \in B \text{ 和 } x \in C) \Leftrightarrow x \in A \cap C \text{ 或 } x \in B \cap C \Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ，
即是 $x \in (A \cup B) \cap C \Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ，
 $\therefore (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

例7 设 $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{3, 5, 7\}$, 则

$$\begin{aligned} & A \cap B = \{2\}, (A \cap B) \cup C = \{2, 3, 5, 7\}, \\ \text{又} \quad & A \cup C = \{1, 2, 3, 5, 7\}, B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 7\}, \\ \text{则} \quad & (A \cup C) \cap (B \cup C) = \{2, 3, 5, 7\}, \\ \therefore \quad & (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). \end{aligned}$$

这是用具体的例子来说明分配律之二是成立。

例8 证明： $(A \cup B) \cap A = A$.

$$\begin{aligned} \text{证: } \because \quad & (A \cup B) \cap A = (A \cap A) \cup (B \cap A), \\ \text{但} \quad & A \cap A = A, B \cap A \subset A, \\ \text{则} \quad & (A \cap A) \cup (B \cap A) = A \cup (B \cap A) = A, (\text{参} \\ & \quad \text{看习题一第4题}) \\ \therefore \quad & (A \cup B) \cap A = A. \end{aligned}$$

3. 空间与余集

我们有时为了研究和叙述上的方便，事先引入一个固定的集 X 而被研究的一切集都是 X 的子集，这时我们称 X 为一个空间或全集。

例如：在小学阶段学习算术时，是把零和一切正有理数组成的集 X 作为空间，其他“10 以内的数”、“10000 以内的数”、“一切自然数”、“一切小数”、“一切分数”等都是 X 的子集。

又如在中学阶段学习平面上的几何图形时，是把平面上一切点组成的点集 X 作为空间，其他“三角形”、“四边形”、“圆”等都是 X 的子集（图形是点组成的集）。

有了空间的概念，我们下面给以余集的定义：

定义4 设集 X 是空间，集 A 是 X 的子集，则 $X - A$ 叫做集 A 的余集或补集，记为：

$$X - A = A^c \text{ 或 } \bar{A} \quad (\text{参看图1·4})$$

例9 设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,

$$A = \{2, 3, 4\}, \quad B = \{1, 2, 4, 6\},$$

则 $A^c = \{1, 5, 6, 7\}, B^c = \{3, 5, 7\}$.

例10 设 $X = (-\infty, +\infty)$ (即全体实数组成的集)

$$A = (3, +\infty), \quad B = [3, 5], \text{ 则:}$$

$$A^c = (-\infty, 3] \quad B^c = (-\infty, 3) \cup (5, +\infty).$$

定理1.2 (*De-Morgan公式*)

$$(1) (A \cup B)^c = A^c \cap B^c; \quad (2) (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

证：(1) $\because x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \in X - (A \cup B) \Leftrightarrow x \in X$ 而 $x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow x \in X$ 而 $(x \in A \text{ 和 } x \in B) \Leftrightarrow (x \in X \text{ 而 } x \in A) \text{ 和 } (x \in X \text{ 而 } x \in B) \Leftrightarrow (x \in X - A) \text{ 和 } (x \in X - B) \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$.

即 $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$,

$$\therefore (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

(2) 的证明法与(1)相同。

例11 如上面例9中的 X, A, B 则：

$$A \cap B = \{2, 4\}, \quad (A \cap B)^c = X - (A \cap B)$$

$$= \{1, 3, 5, 6, 7\}.$$

$$\text{又 } A^c = X - A = \{1, 5, 6, 7\}, \quad B^c = X - B = \{3, 5, 7\},$$

$$\text{则 } A^c \cup B^c = \{1, 3, 5, 6, 7\},$$

$$\therefore (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$



图 1·4

1·4 序对集

我们在数学中，会遇到集的元素不是单个的元素。而是由两个有顺序的元素组成一对作为元素。

例如：坐标平面上的点集，它的元素用数表示出来，就是两个有顺序的数 x, y 组成的数对 (x, y) 。

下面对于序对集给以定义：

定义1.5 由两个元 x, y 组成的元素对 (x, y) ，当且仅当 $x=x'$, $y=y'$ 时，有 $(x, y)=(x', y')$ ；则 (x, y) 叫做序对。由序对为元素组成的集，叫做序对集。

例1 设坐标平面的点为：

$(3, 2)$ 、 $(2, 3)$ 、 $(4, 5)$ 、 $(2, 5)$ 、 $(2, 3)$ ，

其中： $(3, 2) \neq (2, 3) \neq (4, 5) \neq (2, 5)$ ，

它们表示不同的点。

只有 $(2, 3)=(2, 3)$ ，

它们表示相同的点。

例2 在小学学习乘法九九表，是组成下面的序对集：

一一得一，一二得二，一三得三，……就是由序对 $(1, 1)$,
 $(1, 2)$, $(1, 3)$ ……得出结果的，这样组成的序对共有 $9 \times 9 = 81$ 对，组成一个序对集。

象下面九九表中，这样组成的序对集，我们给以下面的定义：

定义1.6 设有两个集 A 与 B ，将 A 中的每一元素 x 与 B 中的每一元素 y ，配成所有的序对 (x, y) 组成的序对集，叫做 A 与 B 的直积集或卡氏积，记为 $A \times B$ ，即是：

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

例3 如 $A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ，则：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)	(7,1)	(8,1)	(9,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)	(7,2)	(8,2)	(9,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)	(7,3)	(8,3)	(9,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)	(7,4)	(8,4)	(9,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)	(7,5)	(8,5)	(9,5)
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)	(7,6)	(8,6)	(9,6)
7	(1,7)	(2,7)	(3,7)	(4,7)	(5,7)	(6,7)	(7,7)	(8,7)	(9,7)
8	(1,8)	(2,8)	(3,8)	(4,8)	(5,8)	(6,8)	(7,8)	(8,8)	(9,8)
9	(1,9)	(2,9)	(3,9)	(4,9)	(5,9)	(6,9)	(7,9)	(8,9)	(9,9)

$$A \times A = \{(1,1)(2,1)(3,1) \dots (9,9)\},$$

如例2的九九表中，有81个元素。

例4 如 $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ 则直积集 $A \times B$ 的元素如下：

$$(1,4) \quad (2,4) \quad (3,4) \quad (5,4)$$

$$(1,5) \quad (2,5) \quad (3,5) \quad (5,5)$$

$$(1,6) \quad (2,6) \quad (3,6) \quad (5,6)$$

又直积集 $B \times A$ 的元素如下：

$$(4,1) \quad (5,1) \quad (6,1)$$

$$(4,2) \quad (5,2) \quad (6,2)$$

$$(4,3) \quad (5,3) \quad (6,3)$$

$$(4,5) \quad (5,5) \quad (6,5)$$

从上面看到 $A \times B$ 与 $B \times A$ 一般是不相等的。

例5 如 A 是全体实数组成的集，则 $A \times A$ 是坐标平面

上所有点组成的点集。

习 题 一

1. 设 $X = \{a, b, c, d\}$ 求出 X 的所有子集。
2. 设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (空间) $A = \{6, 8, 9\}$
 $B = \{1, 3, 7, 8, 9\}, C = \{2, 6, 8, 9\}$ 求出：
 - (1) $A \cup B$ 与 $A \cap C$ ；
 - (2) $(A \cup B) \cup C$ 与 $A \cup (B \cup C)$ ；
 - (3) $(A \cap B) \cap C$ 与 $A \cap (B \cap C)$ 。
3. 用 2 题的所设，求出：
 - (1) $(A \cup B) \cap C$ 与 $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ ；
 - (2) $(A \cup B)^c$ 与 $A^c \cap B^c$ 。
4. 证明 $A \subset B \iff A = A \cap B; A \subset B \iff B = A \cup B$.
5. 设 $A \subset B, C$ 是任一集，证明：
 - (1) $A \cap C \subset B \cap C$ ；
 - (2) $A \cup C \subset B \cup C$.
6. 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 求出 $A \times A$.
7. 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5\}$, 求出 $A \times B$ 与 $B \times A$.
8. 设 $A = [1, 5]$ (闭区间), $B = [2, 6]$ (闭区间), 在坐标平面上作出 $A \times B$.
9. 设 $A = (2, 6)$ (开区间), $B = (1, 6)$ (开区间), 在坐标平面上作出 $A \times B$.
10. 推广定义 1.6 $A \times B \times C = (A \times B) \times C$; 设 $A = \{1, 2, 3\}$,
 $B = \{2, 3, 4\}, C = \{1, 2\}$, 作出 $A \times B \times C$.

二、关系与函数

2·1 关系

关系这个概念，在研究数学中是经常遇到的概念，如一