中学数学复习资料

江苏人民出版社

中学数学复习资料

吴新萃　陈光蓉　周焕山　王玉琦
毛毓球　洪修仁　汪　涛　郑声扬

江苏人民出版社

中学数学复习资料

*

江苏人民出版社出版
江苏省新华书店发行
南通县印刷厂印刷

1979年5月第1版
1979年5月第1次印刷
印数：1－250,000册

书号：7100·042　定价：0.90元

编 者 的 话

本书按《全日制十年制学校中学数学教学大纲（试行草案）》、《一九七九年全国高等学校招生考试复习大纲》以及现行中学教材内容编写，供高中毕业生系统复习中学数学知识时参考。

本书分代数、平面几何、立体几何、三角、解析几何和综合题六部分，简要地复述中学数学的基本概念、基本性质和运算法则。全书配置了相当数量的典型例题和习题，以及具有一定难度的复习题和综合应用题，目的在于使读者进一步掌握解（证）题方法，提高运算、逻辑推理、逻辑表达、空间想象和综合应用各部分数学知识的能力。书后附有习题、复习题的答案、提示或解答。

考虑到读者的需要，本书还编进了复数、排列、组合、数学归纳法、二项式定理、极限、概率和极坐标等内容。这些已超出《一九七九年全国高等学校招生考试复习大纲》规定的范围，请读者注意。

限于编者水平和时间仓促，缺点错误在所难免，恳请广大读者予以批评指正。

编　者

一九七九年二月

目　　录

代　　数

平面几何

立体几何

三　　角

代　　数

一、数

内　容　提　要

（一）数的分类

在人类发展的最初阶段，由于人们对于计数和测量的需要，就产生了正整数（自然数）的概念。随着人类社会的发展，用正整数来表示测量的结果逐渐感到不够，这样就引入了新的数。第一次引入的新数就是正分数，为了表示没有，又引进了零。为了表示相反方向的量，又引入负有理数。这时研究的数就扩张到有理数。

由于在测量中用度量单位去测量一个任意的量的时候，所得的量数不一定都是有理数，这样又需要引入新的数，这引入的新数就是无理数。这样，把研究的数从有理数扩张到了实数。

数学运算的发展也产生了新的矛盾。例如在实数范围里，$x^2=-1$的方程就没有解，为了解决这种矛盾，还需要引进新数，这新的数就是虚数。这样，把研究的数的范围从实数又扩张到了复数。

现在我们把已学过的各种数的范围归纳如下表：

- 复数 $(a+bi)$
  - 实数 $(b=0)$
    - 有理数
      - 整数
        - 自然数（正整数）
        - 零
        - 负整数
      - 分数（可化为有限小数或无限循环小数）
        - 正分数
        - 负分数
    - 无理数——无限不循环小数
  - 虚数 $(b\neq 0)$

（二）数的性质

1．自然数集的性质

自然数就是1，2，3，……，n，……。全部自然数称自然数集。自然数集有下面三个主要性质：

（1）自然数集含有无限多个数，它有最小的数1，没有最大的数；

（2）自然数是有序的，任意两个自然数都可以比较大小；

（3）在自然数集内总可以进行加法和乘法运算。

2．有理数集的性质

有理数集包括正整数(自然数)，负整数，零，以及正负分数。任何一个有理数都可以表示成分数$\frac{p}{q}$$(q\neq 0)$的形式。有理数集有以下的性质：

（1）有理数集没有最小的数，也没有最大的数；

（2）任意两个有理数都能比较它们的大小；

（3）在有理数集内，可以进行加减乘除（零不能为除

数）乘方五种运算。

3．实数集的性质

无限不循环小数叫做无理数，有理数和无理数统称实数。通常用具有一定精确度的有限小数来近似地表示无理数。实数集有下面几个性质：

（1）实数集没有最小数，也没有最大数；

（2）任意两个实数可以比较大小；

（3）在实数集内，可以进行加、减、乘、除（零不能为除数）、乘方运算。在方根存在时，可以进行开方运算。

4．复数集的性质

$\sqrt{-1}$叫做虚数单位，记作i，虚数单位i与实数的乘积叫做虚数。

形如$a+bi$的数叫做复数(其中a、b都是实数)。若$b=0$，这个复数就是实数a；若$a=0$，这个复数就是纯虚数bi。复数集有以下的性质：

（1）复数集没有顺序，即两个复数中只要有一个不是实数，就不规定它的大小；

（2）在复数集合里可以进行加、减、乘、除（除数不能为零）、乘方和开方运算。

（三）数的几何表示法

1．实数和数轴

（1）数轴　规定了原点、方向和长度单位，用来表示数的一条直线叫做数轴。

（2）实数在数轴上的表示　任何实数都可以用数轴上的一个点来表示；反过来，数轴上的任何一个点都表示一个实数。也就是说，实数和数轴上的点有一一对应关系。

有理数和数轴上的点不是一一对应关系。任何一个有理

数都可以用数轴上的点表示，但反过来，数轴上的一个点，不一定表示一个有理数。

2．复数和复平面

（1）复平面　表示复数的坐标平面叫做复平面。

（2）复数在复平面上的表示

复数$a+bi$可以用复平面内的点M来表示，这个点的横坐标是a，纵坐标是b（如图1—1）。

很明显，实数所对应的点在x轴上，虚数所对应的点在y轴上，所以x轴叫做实轴，y轴叫做虚轴。

复数和复平面上的点之间有一一对应关系。

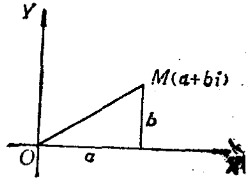

图1—1

（四）数的绝对值

1．实数的绝对值　实数a的绝对值$|a|$，在数轴上就是表示a这个点到原点的距离。

$$|a|=\begin{cases} a & （当a>0时） \\ 0 & （当a=0时） \\ -a & （当a<0时） \end{cases}$$

2．复数的绝对值　复数的绝对值也叫做复数的模。

$$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

实际上，它就是复平面上$a+bi$的对应点M到原点的距离$|OM|$。

（五）共轭复数和复数相等的条件

1．共轭复数　如果两个复数的实部相等，虚部的系数是相反数，那么这两个复数叫做共轭复数。复数$a+bi$与复数$a-bi$是共轭复数。显然，任何实数都与它本身共轭。

2．复数的相等

（1）若$a=a'$，$b=b'$，则$a+bi=a'+b'i$；反过来若$a+bi=a'+b'i$，则$a=a'$，$b=b'$。

（2）若$a=0$，$b=0$，则$a+bi=0$；反过来若$a+bi=0$，则$a=0$，$b=0$。

（六）复数的三角函数表示法

1．表示法 $a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，其中$r$为模数，$r=\sqrt{a^2+b^2}$；$\theta$为幅角，它是$x$轴正方向与向量$OM$所夹的角．

$$\cos\theta=\frac{a}{r}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

$$\sin\theta=\frac{b}{r}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

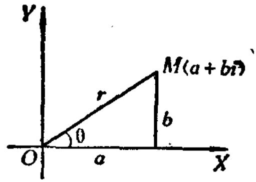

图1—2

2．幅角的主值　不等于零的复数$a+bi$的幅角有无数值．这些值相差2π的整数倍．其中适合于$0\leqslant\theta<2\pi$的幅角的值，叫做幅角的主值．

很明显，正数的幅角主值是0；负数的幅角主值是π。系数是正数的纯虚数的幅角的主值是$\frac{\pi}{2}$；系数是负数的纯虚数的主值是$\frac{3}{2}\pi$。

θ的终边在那一象限可以按照a和b的符号来决定。

3．复数的三角函数式化成代数式

由$a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$求出。

（七）数的运算

1．实数的运算

（1）有理数的运算　有理数可进行加、减、乘、除（除

数不为零）和乘方运算。

（2）实数的运算　在进行实数的四则运算和乘方时，对于无理数一般按指定的精确度，用和它近似的有理数代替后再进行计算。

（3）实数的开方

①定义　若$x^n=a$，则x叫做a的n次方根（n为自然数），记作$\sqrt[n]{a}$，显然$(\sqrt[n]{a})^n=a$。

②符号法则　正数的偶次方根有两个值，这两个值的绝对值相等而符号相反；负数的偶次方根不存在；奇次方根的符号与被开方数符号相同。

③算术根　正数a的n次方根的正值叫做算术根。记号仍是$\sqrt[n]{a}$。

当$n=2$时，$\sqrt{a}$表示a的算术平方根。

根据算术平方根的定义，可以得到一个实数的平方的算术平方根：

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a\geqslant 0) \\ -a & (a<0). \end{cases}$$

2．复数的运算

在复数范围里可以进行加、减、乘、除（除数不为零）、乘方和开方运算。

（1）复数的加减法　可以按照多项式的加、减法来进行，实部和实部相加减，虚部和虚部相加减。

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i.$$

（2）复数的乘法　可以按照多项式乘法来进行，在所得结果中把i^2换成-1，并把实数和纯虚数分别合并。

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i.$$

（3）复数的除法　可以把它们的商写成分式，然后把分

子和分母都乘以分母的共轭复数，并把结果化简

$$(a+bi)\div(c+di)=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

（4）复数的乘方　可以按照二项式定理来计算，在所得的结果中把i的幂化简。法则是：$i^{4n}=1$，$i^{4n+1}=i$，$i^{4n+2}=-1$，$i^{4n+3}=-i$（n是整数）。

（5）复数的开平方　设$\sqrt{a+bi}=x+yi$，

则$a+bi=(x^2-y^2)+2xyi$，

根据复数相等条件$\begin{cases}x^2-y^2=a,\\2xy=b,\end{cases}$

即可解出x和y来。

3．复数的三角函数式运算

（1）乘法　$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$。

这个法则适用于任意个因数的积。

（2）除法

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

（3）乘方　$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$（$n$是正整数），这个定理叫棣美弗定理。

（4）开方　$\sqrt[n]{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$

$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$。

例　　题

1．计算$(-3)^2-(1\frac{1}{2})^3\times\frac{2}{9}-6\div\left|-\frac{2}{3}\right|$。

解　原式$=9-\frac{27}{8}\times\frac{2}{9}-6\times\frac{3}{2}=9-\frac{3}{4}-9=-\frac{3}{4}$。

2．计算

$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$。

解　第三与第四因式的乘积是

$\sqrt{2^2-(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}})^2}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$，

再乘以第二因式得：$\sqrt{2-\sqrt{3}}$，

最后，原式$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=1$。

3．设a是任意实数，化简$\sqrt{a^2}+\sqrt{(1-a)^2}$。

解　$\sqrt{a^2}+\sqrt{(1-a)^2}=|a|+|1-a|$

$$=\begin{cases}2a-1 & (\text{当}a\geqslant1\text{时})\\ 1 & (\text{当}0\leqslant a<1\text{时})\\ 1-2a & (\text{当}a<0\text{时})。\end{cases}$$

4．计算　(1)$|x-2|+|x-9|$；

(2)$|5x-2|+|2x-3|$。

解　(1)当$x\geqslant9$时，

$|x-2|+|x-9|=x-2+x-9=2x-11$；

当$2<x<9$时，

$|x-2|+|x-9|=x-2+9-x=7$；

当$x\leqslant2$时，

$|x-2|+|x-9|=2-x+9-x=-2x+11$。

(2)当$x\leqslant\frac{2}{5}$时，

$|5x-2|+|2x-3|=2-5x+3-2x=5-7x$;

当$\frac{2}{5}<x<\frac{3}{2}$时，

$|5x-2|+|2x-3|=5x-2+3-2x=3x+1$;

当 $x\geqslant\frac{3}{2}$时，

$|5x-2|+|2x-3|=5x-2+2x-3=7x-5$。

5．求证 $\sqrt{2}$不是有理数。

证明 假设$\sqrt{2}$是有理数，那么一定有$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$（$\frac{p}{q}$是既约分数）。

即 $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$，也就是$2q^2=p^2$

$\because p^2$是偶数，$\therefore p$也一定是偶数。

设$p=2m$，

则 $(2m)^2=2q^2$，即

$q^2=2m^2$，

$\therefore$ q也是偶数。

$\therefore$ p与q有公约数2，这与假设矛盾。

$\therefore$ $\sqrt{2}$不是有理数。

6．证明四个连续偶数的积加16后，是一个完全平方数。

证明 设四个连续偶数是$2n$，$2n+2$，$2n+4$，$2n+6$。

则有 $2n(2n+2)(2n+4)(2n+6)+16$

$=2n(2n+6)(2n+2)(2n+4)+16$

$=(4n^2+12n)[(4n^2+12n)+8]+16$

$=(4n^2+12n)^2+8(4n^2+12n)+16$

$$=[(4n^2+12n)+4]^2.$$

7．计算：

（1）$4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\div 2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$；

（2）$(1+\sqrt{3}i)^{10}$；　（3）$\sqrt[3]{1-i}$。

解　（1）

$$4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\div 2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{4}{2}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=2(0+i)=2i;$$

（2）$\because 1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$，

$$\therefore(1+\sqrt{3}i)^{10}=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{10}$$

$$=2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{3}+i\sin\frac{10\pi}{3}\right)$$

$$=1024\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=-512-512\sqrt{3}i;$$

（3）$\because 1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$，

$$\therefore \sqrt[3]{1-i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)}$$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)$$

$$=\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}+k\cdot\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}+k\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right].$$

$(k=0，1，2)$

$\therefore \sqrt[3]{1-i}$有下面的三个值：

$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right),$$

$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right),$$

$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12}+i\sin\frac{23\pi}{12}\right).$$

8．用棣美弗定理推导三倍角的正余弦公式。

解　按照棣美弗定理：

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos3\theta+i\sin3\theta,$$

另一方面按照乘法公式：

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3$$
$$=\cos^3\theta+3\cos^2\theta\cdot i\sin\theta+3\cos\theta\cdot(i\sin\theta)^2+(i\sin\theta)^3$$
$$=(\cos^3\theta-3\cos\theta\cdot\sin^2\theta)+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)$$
$$=(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+i(3\sin\theta-4\sin^3\theta).$$

根据复数相等条件得

$$\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta,$$