JINGSAI gaozhong

SHUXUE 数学竞赛题库 JINGSAITIKU

高中数学竞赛

SHUXUE

金版题典

开明数学工作室 组编

作为数学普及活动的各种数学竞赛（大到IMO，小到地区性的赛事），曾经润泽了众多的师生。课外数学活动，在启发数学学习兴趣和提高解决数学问题能力方面所发挥的作用，就我国基础教育来说，不是可有可无，而是不可或缺。也正因如此，几十年来，包括数学竞赛在内的数学课外活动受到广大师生和家长的长期欢迎和支持。

开明出版社

数学竞赛题库

JINGSAI gaozhong

高中数学竞赛

SHUXUE

金版题典

开明数学工作室 组编

作为数学普及活动的各种数学竞赛（大到IMO，小到地区性的赛事），曾经润泽了众多的师生。课外数学活动，在启发数学学习兴趣和提高解决数学问题能力方面所发挥的作用，就我国基础教育来说，不是可有可无，而是不可或缺。也正因如此，几十年来，包括数学竞赛在内的数学课外活动受到广大师生和家长的长期欢迎和支持。

开明出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛金版题典/开明数学工作室.—北京:开明出版社,2005.1

ISBN 7-80205-103-7

Ⅰ.高... Ⅱ.开... Ⅲ.数学课-高中-习题 Ⅳ.G634.505

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第011212号

策　　划　焦向英
项目执行　赵　非
责任编辑　开　群

高中数学竞赛金版题典

组编　开明数学工作室
出版　开明出版社(北京海淀区西三环北路19号)
印刷　保定市印刷厂
发行　新华书店北京发行所
开本　787×1092毫米　1/16开
印张　25
字数　723千
版次　2005年1月第1版　2005年1月第1次印刷
书号　ISBN 7-80205-103-7
印数　00 001~15 000册
定价　29.50元

写在前面

在这套《题典》即将出版之际，作为编者，我们有很多话想对读者朋友们说。前人说过，“数学是思维的体操”，“聪明人的游戏”。毫无疑问，作为数学普及活动的各种数学竞赛（大到IMO，小到地区性的赛事），曾经润泽了众多的师生。课外数学活动在启发数学学习兴趣和提高解决数学问题能力方面所发挥的作用，就我国基础教育来说，不是可有可无，而是不可或缺。也正因如此，几十年来，包括数学竞赛在内的数学课外活动受到广大师生和家长的长期欢迎和支持。

众所周知，各类数学竞赛的命题大多由术业专攻、经验丰富的专家、老师负责。因此，就题目的质量来说，无论是命题深度，还是解题的灵活度，都远超过同学们日常所做的题目。我们本着“精中选精”、“举一反三”、“既可查又可做”的目的，对精选出的各类题目进行了深加工，力争本书既“好用”又“够用”。

除了在题目的选择上我们努力做到精挑细选，在解题方面，对典型题目我们会给出尽可能多并且实用的解法，帮助读者打开思路；对有难度的题目我们会给出最原始的解法，从入手点开始写，这样才能理清思路的来源，进而才能取得“举一反三”的效果。我们尤其注重将正确的思维方法传授给读者，而不是向读者进行高深概念的灌输，使读者得到真正意义上的提高。

本书的大部分编者都很年轻，有一些是刚刚走上工作岗位的青年教师，更多的则是还就读于清华、北大、中科院的研究生，不过有一点我们很值得读者信任，就是我们几乎全部都自小经过各大奥数赛事的历练（我们中有小学奥赛、“我爱数学”夏令营、华罗庚金杯、希望杯、迎春杯、初中数学联赛、高中数学联赛、高中数学冬令营的佼佼者，甚至IMO的金牌），如今又登上奥数讲台，结合我们的亲身经验，从事各类奥数培训。

感谢开明出版社给我们提供了这样一个表达我们思路的机会，同时也感谢开明使我们这些人彼此结识，不仅仅我们每个人都多了很多朋友，而且在互相的交流中我们自身也得到了提高。

编　者

2005年1月

目　　录

第一篇

第二篇

第三篇

第一篇

01 集　合

集合是数学中的重要概念,很多数学中的其它概念是建立在集合的基础上的.中学数学中对于集合的学习是集合问题中很浅显的一部分,竞赛中集合的问题也一般出在选择题或判断题中,但这并不表示这一部分不重要.先看一下这部分的知识要点:

(1)集合的表示方法:常用的有列举法和描述法;

(2)集合的有关概念及性质:元素、全集、子集、补集;

(3)集合的关系:$\supseteq,\subseteq,\supset,\subset$;

(4)集合的运算:交与并($\cap,\cup$).

[例1]已知集合 $A=\{y\mid 2<y<3\}$,$x=\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3}}$,判断 x 与 A 的关系.

【分析】判断 x 与 A 的关系,就是判断 x 是否满足 A 中元素的条件 $2<x<3$,运算中要注意对数的性质.

【解答】$\because\ x=\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3}}=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{2}+\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{5}=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{10}=\log_3 10$,而 $2=\log_3 9<\log_3 10<\log_3 27=3$,即满足 $2<x<3$,$\therefore\ x\in A$.

【评注】本题是判断元素与集合的关系,也就是看元素是否具有对应集合的性质,反过来如果满足集合的条件,那么其一定属于这个集合.

[例2]若 $A=\{x\mid x=a^2+2a+4,a\in\mathbf{R}\}$,$B=\{y\mid y=b^2-4b+3,b\in\mathbf{R}\}$,试确定 A 与 B 的关系.

【分析与解答】$\because\ x=a^2+2a+4=(a+1)^2+3\geqslant 3$,$\therefore\ A$ 中元素 x 都满足 $x\geqslant 3$.

同样,$\because\ y=b^2-4b+3=(b-2)^2-1\geqslant -1$,$\therefore\ B$ 中元素 y 都满足 $y\geqslant -1$.

所以 $A\subset B$.

【评注】本题判断集合与集合之间的关系,关键是先确定 x 与 y 的取值范围,然后再通过一个集合的元素与另一个集合的关系来说明 A 与 B 的关系.

[例3]已知集合 $A=\{x\mid x^2+3x+2<0\}$,$B=\{x\mid x^2-4ax+3a^2<0\}$,且 $A\subset B$,求参数 a 的取值范围.

【分析】首先确定集合 A,B,再利用集合 $A\subset B$ 的关系求解.

【解答】由已知易求得 $A=\{x\mid -2<x<-1\}$,$B=\{x\mid (x-a)(x-3a)<0\}$,对参数 a 的值进行讨论:

当 $a>0$ 时,$B=\{x\mid a<x<3a\}$,由 $A\subset B$ 知此时无解;

当 $a=0$ 时,$B=\phi$,显然也无解;

当 $a<0$ 时,$B=\{x\mid 3a<x<a\}$,由 $A\subset B$ 解得 $-1\leqslant a\leqslant -\dfrac{2}{3}$.

综上,参数 a 的取值范围为 $[-1,-\dfrac{2}{3}]$.

【评注】在本题中,集合的定义是一个二次三项式,那么对于集合 B,要分类讨论使其取值范围数字化,才能通过条件求出参数的范围.

[例4]设集合 $A=\{1,3,x\}$,$B=\{1,x^2\}$,若 $B\subset A$,且 $x\notin B$,求集合 A.

【分析与解答】观察集合 A,B,因为 $B\subset A$,

且 $x \notin B$,所以 $x^2=3$,即 $x=\pm\sqrt{3}$,由集合的性质,得到 $A=\{1,3,\sqrt{3}\}$ 或 $A=\{1,3,-\sqrt{3}\}$.

【评注】题目中若没有 $x \notin B$ 这个条件,则需要分 $x^2=x, x^2=3$ 两种情况讨论求解,读者可以自行练习一下.

[例5]已知全集 $U=\{2,3,a^2+2a-3\}$, $A=\{2,|a+7|\}$, $C_U A=\{5\}$(其中 $C_U A$ 表示集合 A 的补集),求 a 的值.

【分析】解题时要清楚集合及补集的有关知识.

【解答】$\because\ C_U A=\{5\}$, $\therefore\ 5 \in U$ 且 $5 \notin A$,又$\because\ |a+7| \in A$, $\therefore\ |a+7| \in U$, $\therefore\ a^2+2a-3=5$,解得 $a=-4$ 或 $a=2$,但当 $a=2$ 时,$|a+7|=9 \notin A$(舍去),故 $a=-4$.

【评注】这种集合的基本问题一般用到集合中元素的互异性. 另外,最后得出结果时要注意根据已知条件进行取舍,这点容易被忽略.

[例6]已知集合 $A=\{a,a+d,a+2d\}$, $B=\{a,aq,aq^2\}$(a 为常数),若 $A=B$,求 d,q 的值.

【分析与解答】由 $A=B$,得到

$$\begin{cases}a+d=aq\\ a+2d=aq^2\end{cases}\ (1)\quad 或 \begin{cases}a+d=aq^2\\ a+2d=aq\end{cases}\ (2).$$

由(1)解得 $q=1$,但当 $q=1$ 时,$a=aq=aq^2$,这与集合中元素的互异性矛盾,于是只有(2) $\begin{cases}a+d=aq^2\\ a+2d=aq\end{cases}$,利用 $q=1$ 这个条件解(2)得到:$\begin{cases}q=-\dfrac{1}{2}\\ d=-\dfrac{3}{4}a\end{cases}$ 代到 A,B 中发现满足 $A=B$,并且满足集合中元素的互异性.

所以 d,q 的值分别为 $-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{4}a$.

【评注】题目很容易,但非常基本,注意集合中元素的互异性,由于两个集合元素只需一一对应即可,对应方式可以有很多情况,所以分情况讨论是这种题目的常用方法.

[例7]若集合 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$, $B=\{x|x^2-ax+(a-1)=0\}$, $C=\{x|x^2-bx+2=0\}$,并且满足 $B \subset A, C \subseteq A$,求实数 a,b 的值.

【分析与解答】由 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$ 求得 $A=\{1,2\}$. 由 $B \subset A$,所以 B 的可能性只有三种:$\phi,\{1\},\{2\}$,而 $x^2-ax+(a-1)=0$ 的根为 1 和 $a-1$,所以 B 只有一种可能$\{x\}$,此时 $a-1=1$,即 $a=2$.

$C \subseteq A$,并由 C 中元素的性质知当 $b=3$ 时,$A=C$.

另一种情况是 $C=\phi$,此时 $b^2-8<0 \Rightarrow -2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$.

所以实数 a,b 满足 $a=2, b=3$ 或 $-2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$.

【评注】空集 ϕ 是任何集合的子集,在求解过程中要注意不要丢掉 ϕ.

[例8]求集合 $A=\{x|-1 \leqslant \log_{\frac{1}{x}}10<-\dfrac{1}{2}, 1<x \in \mathbf{N}\}$ 的真子集的个数.

【分析】求集合的子集或真子集的个数,要先求出集合中元素的个数 n,则该集合所有子集的个数为 2^n,真子集的个数为 2^n-1.

【解答】$\because\ A=\{x|-1 \leqslant \log_{\frac{1}{x}}10<-\dfrac{1}{2}, 1<x \in \mathbf{N}\}$

$$=\{x|-1 \leqslant -\frac{1}{\lg x}<-\frac{1}{2}, 1<x \in \mathbf{N}\}$$

$$=\{x|1 \leqslant \lg x<2, 1<x \in \mathbf{N}\}$$

$$=\{x|10 \leqslant x<100, 1<x \in \mathbf{N}\}.$$

所以集合 A 中元素的个数为 90 个,集合 A 的真子集的个数为 $2^{90}-1$.

【评注】一个元素个数为 n 的集合的所有子集的个数为 2^n,真子集的个数为 2^n-1. 这是一个很常用的结论,这个集合的所有子集的集合被称作它的幂集.

[例9]设集合 $M=\{1,2,\cdots,1000\}$,现对 M 的任一非空子集 X,令 a_X 表示 X 中最大数与最小数之和,求所有这样的 a_X 的算术平均值.

【分析与解答】对每个 X,都有 $\phi \subset X \subseteq M$,令 $X'=\{1001-x|x \in X\}$ 与 X 配对,则 $\phi \subset X' \subseteq M$,易知这样的对应是从 M 的非空子集族到自身的一一对应,并且满足 $a_X+a_{X'}=2 \times 1001$. 从而所有的 a_X 的算术平均值与 $a_{X'}$ 的算术平均值的和为 2×1001,并且这两个平均值相等,所以

所有的 a_X 的算术平均值为 1001.

【评注】本题中构造一一对应成为求解的关键，这个构造使得我们将要求的原集合平均值简单化为若干个相等值的平均值，这种方法在涉及到集合所有子集的问题中很常见.

[例 10] 设 S 为集合 $\{1,2,3,\cdots,50\}$ 的子集，并且 S 中任意两个不同元素之和不能被 7 整除，那么 S 中元素最多有多少个?

【分析与解答】将集合 $\{1,2,3,\cdots,50\}$ 中的元素按被 7 除所得的余数相同分为 7 个子集，即:

$A_1=\{1,8,15,22,29,36,43,50\}$;

$A_2=\{2,9,16,23,30,37,44\}$;

$A_3=\{3,10,17,24,31,38,45\}$;

$A_4=\{4,11,18,25,32,39,46\}$;

$A_5=\{5,12,19,26,33,40,47\}$;

$A_6=\{6,13,20,27,34,41,48\}$;

$A_0=\{7,14,21,28,35,42,49\}$.

可知 S 中最多包含 A_0 的一个元素，而如果 S 包含其它任何一个子集中一个元素时，则它可以包含这个子集中的全部元素；另外，S 不能同时包含 A_1,A_6 中的元素；同样，S 不能同时包含 A_2,A_5 或 A_3,A_4 中的元素.

故 S 中元素最多有 $1+8+7+7=23$ 个.

[例 11] 若非空集合 $A=\{x|2a+1\leqslant x\leqslant 3a-5\}$，$B=\{x|3\leqslant x\leqslant 22\}$，求能使 $A\subseteq A\cap B$ 成立的所有 a 的集合.

【分析与解答】显然 $A\cap B\subseteq A$，又由已知 $A\subseteq A\cap B$，则 $A\cap B=A$，所以 $A\subseteq B$. 即满足

$$\begin{cases}2a+1\geqslant 3\\3a-5\leqslant 22\\2a+1\leqslant 3a-5\end{cases}\Rightarrow 6\leqslant a\leqslant 9$$

所以能使 $A\subseteq A\cap B$ 成立的所有 a 的集合为 $\{a|6\leqslant a\leqslant 9\}$.

【评注】集合的交与并有显然成立的两个结论即 $A\cap B\subseteq A$，$A\cup B\supseteq A$，这两个结论可以推导出很多的结论，要熟练地掌握它们.

[例 12] 已知集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，$B=\{a_1^2,a_2^2,a_3^2,a_4^2\}$，其中 $a_1<a_2<a_3<a_4$，$a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbf{N}$，若 $A\cap B=\{a_1,a_4\}$，$a_1+a_4=10$，且 $A\cup B$ 中所有元素的和为 124，求集合 A,B.

【分析与解答】因为 $a_1<a_2<a_3<a_4$，且 $A\cap B=\{a_1,a_4\}$，所以 $a_1=a_1^2$，又 $a_1\in\mathbf{N}$，所以 $a_1=1$，又 $a_1+a_4=10$，可得 $a_4=9$，并且 $a_2^2=a_4$ 或 $a_3^2=a_4$.

若 $a_2^2=9$，即 $a_2=3$，则有 $1+3+a_3+9+a_3^2+81=124$，解得 $a_3=5$（$a_3=-6$ 舍去），此时 $A=\{1,3,5,9\}$，$B=\{1,9,25,81\}$；

若 $a_3^2=9$，即 $a_3=3$，此时只能有 $a_2=2$，则 $A\cup B$ 所有元素的和为 $100\neq 124$，不合题意.

综上，求得 $A=\{1,3,5,9\}$，$B=\{1,9,25,81\}$.

【评注】本题的难点在于依据已知条件推断集合 A,B 中元素的特征，同时上述解答中再次使用了分类讨论的思想，分类讨论是我们分析解决问题的基本手段之一，将问题分为多个部分，每一部分的难度比整体都要低，这样就能使问题变得简明.

[例 13] 设集合 $A=\{x|2x^2-px+q=0\}$，$B=\{x|6x^2+(p+2)x+5+q=0\}$，若 $A\cap B=\{\frac{1}{2}\}$，求 $A\cup B$.

【分析与解答】$\because A\cap B=\{\frac{1}{2}\}$，$\therefore x=\frac{1}{2}$ 是两方程的公共解，把 $x=\frac{1}{2}$ 代入两方程中得到关于 p,q 的二元一次方程组 $\begin{cases}2q+5=-15\\2q-p=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=-7\\q=-4\end{cases}$，代入 A,B 中得到 $A=\{x|2x^2+7x-4=0\}$，$B=\{x|6x^2-5x+1=0\}$，即 $A=\{\frac{1}{2},-4\}$，$B=\{\frac{1}{2},\frac{1}{3}\}$，所以 $A\cup B=\{-4,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\}$.

【评注】由 $A\cap B=\{\frac{1}{2}\}$ 得出 $x=\frac{1}{2}$ 是该两方程的公共解是解决本题的关键，一个元素属于多个集合，也就意味着其满足多个性质，就能形成方程或方程组来求解.

[例 14] 设集合 $A=\{a^2,a+1,-3\}$，$B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$，如果 $A\cap B=\{-3\}$，求实数 a 的值.

【分析与解答】$A\cap B=\{-3\}$，所以 $-3\in B$，而 $a^2+1>0$，只能有 $a-3=-3$ 或 $2a-3=$

-3,于是有 $a=0$ 或 $a=-1$.

当 $a=0$ 时,$a+1=a^2+1=1$,即 $1\in A\cap B$,与 $A\cap B=\{-3\}$ 矛盾,不成立,经检验,$a=-1$ 符合题意. 从而实数 a 的值为 -1.

【评注】本题中用到了集合中元素的确定性和互异性. 注意,由于中间步骤讨论时可能出现多余的解,得到结论后的检验是必不可少的.

[例 15]设集合 $A=\{1,2,3,m\}$,$B=\{m^2,3\}$ 满足 $A\cup B=\{1,2,3,m\}$,求实数 m 的值.

【分析】仍然用集合中元素的确定性和互异性求解.

【解答】由集合 A,B 内元素的互异性可知 $m\neq 1,2,3,\sqrt{3}$. 另外,$A\cup B=\{1,2,3,m\}=A$,则 $m^2=1,2$ 或 m.

$m^2=1$ 时,则 $m=-1(m\neq 1)$,经检验符合题意;

$m^2=2$ 时,则 $m=\pm\sqrt{2}$,经检验都符合题意;

$m^2=m$ 时,则 $m=0(m\neq 1)$,经检验符合题意.

综上,$m=-1,\pm\sqrt{2},0$.

【评注】本题是集合问题中的典型题,具有一定的代表性,解答中要注意集合相关概念和分类讨论的方法.

[例 16](1995 年全国高中数学联赛试题)设 $M=\{1,2,\cdots,1995\}$,$A\subseteq M$,且当 $x\in A$ 时 $15x\notin A$,则 A 中元素的个数的最大值是多少?

【分析与解答】用 $n(A)$ 表示 A 中元素的个数,由题设,x 与 $15x(x=9,10,\cdots,133)$ 这两个数中至少有一个不属于 A,所以至少有 $125(=133-9+1)$ 个数不属于 A,即 $n(A)\leqslant 1995-125=1870$.

另一方面,取 $A=\{1,2,\cdots,8\}\cup\{134,135,\cdots,1995\}$,知 A 满足题设条件并且此时 $n(A)=1870$. 所以 $n(A)$ 的最大值就是 1870.

【评注】本题解答中得到 x 与 $15x(x=9,10,\cdots,133)$ 这两个数中至少有一个不属于 A 是非常巧妙的一步,使得求解过程简单明了.

[例 17](2001 年全国高中数学联赛试题)已知 a 为给定的实数,那么集合 $M=\{x|x^2-3x-a^2+2=0,x\in\mathbf{R}\}$ 的子集的个数为多少?

【分析与解答】考查 $M=\{x|x^2-3x-a^2+2=0,x\in\mathbf{R}\}$ 中的元素为方程 $x^2-3x-a^2+2=0$ 的实根,而判别式 $\Delta=1+4a^2>0$ 恒成立,即该方程必有两个不等实根,从而 M 有 2 个元素,所以 M 的子集个数为 $2^2=4$.

【评注】虽然 a 的数值没有给出来,但经过计算发现该方程判别式的符号与 a 无关,始终都是正的,这样根的性质便确定了,那么集合 M 就求出来了.

[例 18]设全集是实数集,若 $A=\{x|\sqrt{x-2}\leqslant 0\}$,$B=\{x|10^{x^2-2}=10^x\}$,求 $A\cap\overline{B}$.

【分析与解答】由 $\sqrt{x-2}\leqslant 0$,得到 $x=2$,故 $A=\{2\}$;由 $10^{x^2-2}=10^x$,得到 $x^2-x-2=0$,故 $B=\{-1,2\}$.

所以 $A\cap\overline{B}=\phi$.

【评注】本题中,$\overline{B}$的意思是 B 的补集. 集合的补集和其本身满足的性质刚好相反.

[例 19]集合 $M=\{(x,y)||\tan\pi y|+\sin^2\pi x=0\}$,$N=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2\}$,则 $M\cap N$ 有多少个元素?

【分析与解答】集合 M 中的元素满足:$\tan\pi y=\sin^2\pi x=0$,解得 $\begin{cases}x=k\\y=h\end{cases}(k,h\in\mathbf{Z})$,即集合 M 为坐标平面上整点的全体;集合 N 中的元素满足 $x^2+y^2\leqslant 2$,即集合 N 为以原点为中心,$\sqrt{2}$为半径的圆内点所组成的点集.

可以画图来看,该圆内部共有 9 个整点,说明 $M\cap N$ 中共有 9 个元素.

【评注】解决本题需要用到解析几何的知识. 另外,一些非负数的和为零,说明它们每个都为零,因为如果有一个大于 0,那么它们的和也会大于 0.

[例 20]设集合 $M=\{-1,0,1\}$,$N=\{2,3,4,5,6\}$,映射 $f:M\to N$,则对任意的 $x\in M$,$x+f(x)+xf(x)$ 恒为奇数的映射 f 有多少个?

【分析与解答】令 $y=x+f(x)+xf(x)$,显然,当 $f(-1)$,$f(0)$,$f(1)$ 取定时 $f(x)$ 随之确

定.

当 $x=-1$ 时,$y=x+f(x)-f(x)=x=-1$,y恒为奇数,故 $f(-1)$ 有 5 种可能选择;

当 $x=0$ 时,$y=f(0)$,故 $f(0)$ 仅能为 3 和 5,有 2 种可能选择;

当 $x=1$ 时,$y=x+f(x)+f(x)=1+2f(x)$,因为 $f(x)$ 为整数,所以 y 恒为奇数,故 $f(1)$ 有5 种可能选择. 根据乘法原理,使 y 恒为奇数的映射 f 共有 $5\times2\times5=50$ 个.

【评注】本题的综合性较强,要用到集合、函数以及组合等多方面的知识. 注意题目中并没说映射 f 为一一映射,故 $f(-1),f(0),f(1)$ 的取值可以相同.

[例 21] 设集合 $S=\{1,2,3,\cdots,18\}$ 的五元子集 $S_5=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ 中任何两个元素之差不为 1,问这样的子集 S_5 共有多少个?

【分析与解答】不妨令 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$,因为 $S_5=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ 中任何两个元素之差不为 1,所以 $a_1,a_2-1,a_3-2,a_4-3,a_5-4$ 互不相同,所以可以作子集 $S_5=\{a_1,a_2-1,a_3-2,a_4-3,a_5-4\}$,知 S_5' 与 S_5 一一对应,而 S_5' 是集合 $\{1,2,3,\cdots,14\}$ 的五元子集,有 $C_{14}^5=2002$ 个.

【评注】本题的技巧性很强,关键是根据已知条件构造出与 S_5 一一对应的集合 S_5',而 S_5' 是比较好计算个数的集合.

[例 22] 知集合 $M=\{(x,y)\mid y=\sqrt{2x-x^2}\}$,$N=\{(x,y)\mid y=k(x+1)\}$,当 $M\cap N\neq\phi$ 时,求实数 k 的取值范围.

【分析与解答】集合 $M=\{(x,y)\mid y=\sqrt{2x-x^2}\}$,$N=\{(x,y)\mid y=k(x+1)\}$ 中,$M\cap N\neq\phi$ 等价于方程 $\sqrt{2x-x^2}=k(x+1)$ 有实数解,$2x-x^2$ 在根号内,显然 $0\leqslant x\leqslant2$,从而知道 $k\geqslant0$. 将原方程两边平方并整理,得 $(k^2+1)x^2+2(k^2-1)x+k^2=0$,有实数解,则 $\Delta=4(k^2-1)^2-4k^2(k^2+1)\geqslant0$,解得 $-\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant k\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$,又有 $k\geqslant0$,所以最后求得 k 的取值范围为 $[0,\frac{\sqrt{3}}{3}]$.

【评注】$M\cap N\neq\phi$ 等价于方程 $\sqrt{2x-x^2}=k(x+1)$ 有实数解这一步很关键,能得到这一步这道题就很容易解决了.

[例 23] 集合 $M=\{u\mid u=12m+8n+4l,m,n,l\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{v\mid v=20p+16q+12r,p,q,r\in\mathbf{Z}\}$. 求证:$M=N$.

【分析】求证两集合 $M=N$,一般的证法是分别证明 $M\subseteq N$ 和 $N\subseteq M$.

【解答】如果 $u\in M$,由 M 的定义,则存在 $m,n,l\in\mathbf{Z}$ 使得 $u=12m+8n+4l=20n+16l+12(m-n-l)\in N$,从而 $M\subseteq N$;同样,如果 $v\in N$,由 N 的定义,存在 $p,q,r\in\mathbf{Z}$ 使得 $v=20p+16q+12r=12r+8(2q)+4(5q)\in M$,从而 $N\subseteq M$.

综上,证明了 $M=N$.

【评注】在证明两集合 M,N 相等时,分别证明 $M\subseteq N$ 和 $N\subseteq M$ 是常用的方法. 这种方法实际上类似于证明等式 $A=B$ 时,通过证明 $A\leqslant B$ 和 $A\geqslant B$ 这两个不等式来证明等式.

[例 24] 集合 $A=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$,其中 $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5\in\mathbf{N}$,把 A 中的所有二元子集两元素之和组成集合 $B=\{3,4,5,\cdots,11,13\}$,求集合 A.

【分析与解答】由题意得到 $x_1+x_2=3$,$x_4+x_5=13$;另外,在所有 A 的二元子集中,每个元素都出现 4 次,求得集合 B 中元素之和为 $4(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)=76$,由上面三个等式可以求得 $x_3=3$,再由 $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5\in\mathbf{N}$,求得 $x_1=1,x_2=2$,同时观察 B 的结构,可求得 $x_4=5,x_5=8$.

综上,求得集合 A 为$\{1,2,3,5,8\}$.

【评注】在求 x_3 的时候,用了先求 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 总和的技巧,在其它地方也有广泛应用. 另外,求得 $x_1=1,x_2=2$ 的时候用到了 $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\in\mathbf{N}$ 的条件.

[例 25] 已知集合 $A=\{x,xy,\lg(xy)\}$,$B=\{0,|x|,y\}$,如果 $A=B$,求值:$(x+\frac{1}{y})+(x^2+\frac{1}{y^2})+\cdots+(x^{2003}+\frac{1}{y^{2003}})$.

【分析与解答】根据集合内元素的互异性,由 B 知 $x\neq0,y\neq0$,而 $0\in B$ 且 $A=B$,所以 $0\in$

A,所以只有 $\lg(xy)=0$,从而 $xy=1$. 这样就得到 $1\in A$,又 $A=B$,则 $1\in B$. 所以有 $\begin{cases}xy=1\\|x|=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}xy=1\\y=1\end{cases}$(此时 $x=y=1$ 与元素互异性矛盾).

所以得到只有 $x=y=-1$,代入所求等式 $(x+\frac{1}{y})+(x^2+\frac{1}{y^2})+\cdots+(x^{2003}+\frac{1}{y^{2003}})=-2+2-2+\cdots+2-2=-2$.

【评注】解决本题的关键是由已知 A,B 的关系确定 x,y 的值,而 x,y 得以确定了以后,问题就迎刃而解了.

[例26]以某些整数为元素的集合 P 具有如下性质:(1)P 中的元素有正数,有负数;(2)P 中的元素有奇数,有偶数;(3)$-1\notin P$;(4)若 $x,y\in P$,则 $x+y\in P$. 试证明:(1)$0\in P$;(2)$2\notin P$.

【分析与解答】由(1),不妨设存在正整数 m 和负整数 n,且满足 $m,n\in P$,则反复应用(4)可得 $m\cdot n\in P$,$m\cdot(-n)\in P$,从而 $0=m\cdot n+m\cdot(-n)\in P$.

下面用反证法证明 $2\notin P$:

假设 $2\in P$,则 P 中的负数全为偶数,若不然,存在奇数 $-2k-1\in P$,$k\in\mathbf{N}$,而 $-1=(-2k-1)+2k\in P$ 与(3)矛盾,所以由(2)知必有正奇数 $2n-1\in P$,负偶数 $-2m\in P$,$m,n\in\mathbf{N}$,取 k,使得 $k\cdot|-2m|>2n-1$,则负奇数 $-2m\cdot k+2n-1\in P$,矛盾.

从而证明假设不成立,即 $2\notin P$.

【评注】本题在解答中用到了一些数论知识的技巧,主要是对整除性和奇偶性的一些分析. 由于集合的定义可以多种多样,其性质可以涉及到数论,组合甚至几何等方面.

[例27]集合 $M=\{x|\cos x+\lg\sin x=1\}$ 中元素的个数是多少?

【分析与解答】显然有 $-1\leqslant\cos x$,$\sin x\leqslant 1$,这样 $\lg\sin x\leqslant 0$,从而 $\cos x+\lg\sin x=1$ 有解的惟一可能是 $\cos x=1$,$\sin x=1$,但这种 x 显然是不存在的,所以 M 是空集,故元素个数为 0.

【评注】注意有些题中无解也是一个答案. 在求个数中 0 是也一个数,求集合中 ϕ 也是一个集合.

[例28]已知集合 $A=\{x|x-a=0\}$,$B=\{x|ax-1=0\}$,若 $A\cap B=B$,求实数 a.

【分析与解答】$A\cap B=B$ 等价于 $B\subseteq A$. 考虑:若 $B=\phi$,则有 $a=0$,此时 $A\cap B=\phi=B$,符合题意;若 $B\neq\phi$,则 $a\neq 0$,有 $A\{x|x=a\}$,$B=\{x|x=\frac{1}{a}\}$,为了满足 $B\subseteq A$,需要 $\frac{1}{a}=a$,解得 $a=\pm 1$,代入 A,B 发现满足 $A\cap B=B$.

所以所求实数 a 的值为 0 或 ± 1.

【评注】本题关键注意在解决集合问题时,不要忽略了 ϕ 的存在. 否则的话,我们将会丢失一种解的可能,答案就不完整.

[例29]设方程 $x^2-2x+p=0$ 的解集为 A,方程 $x^3+qx^2+rx=0(r\neq 0)$ 的解集为 B,$A\cup B=\{0,-1,3\}$,$A\cap B=\{3\}$,求实数 p,q,r 的值.

【分析与解答】由 $A\cup B=\{0,-1,3\}$,$A\cap B=\{3\}$ 可知 $3\in A$,即 3 是方程 $x^2-2x+p=0$ 的一个根,由韦达定理知另一个根为 $2-3=-1$,从而 $p=3\times(-1)=-3$;另外,可知 0 和 3 是方程 $x^3+qx^2+rx=0(r\neq 0)$ 的根,而 -1 不是此方程的根,故 $B=\{0,-3\}$.

再由已知 $r\neq 0$,知道 0 不是该方程的重根,从而 3 是方程 $x^3+qx^2+rx=0$ 的二重根,即 $(x-3)^2=x^2+qx+r$,所以 $q=-6$,$r=9$.

求得实数 p,q,r 的值分别为 $p=-3$,$q=-6$,$r=9$.

【评注】本题需要用到方程的知识和技巧,通过集合的定义可以得到方程的解,再通过解来求得各个系数.

[例30]满足条件 $|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant 4|x_1-x_2|$ 的函数 $g(x)$ 形成一个集合 M,其中 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,并且 ${x_1}^2,{x_2}^2\leqslant 1$,则求函数 $y=f(x)=x^2+3x-2(x\in\mathbf{R})$ 与集合 M 的关系.

【分析】求函数 $y=f(x)=x^2+3x-2(x\in\mathbf{R})$ 与集合 M 的关系,即是求该函数是否属于集合 M.

【解答】计算 $|f(x_1)-f(x_2)|=|{x_1}^2+3x_1-2-({x_2}^2+3x_2-2)|=|(x_1-x_2)(x_1+x_2)+3$

$(x_1-x_2)|=|x_1-x_2|\cdot|x_1+x_2+3|$. 当 $x_1=\frac{4}{6}, x_2=\frac{5}{6}$ 时, $|f(x_1)-f(x_2)|=\frac{9}{2}|x_1-x_2|>4|x_1-x_2|$, 可见 $f(x)\notin M$.

【评注】题中 M 是一个关于函数的集合, 判断一个函数 $f(x)$ 是否在 M 中, 只要找到一个或几个特殊的 x_i 使得 $f(x_i)$ 不符合 M 中的条件即能证明 $f(x)\notin M$.

[例 31] 设 $a,b\in\mathbf{R}$, 集合 $A=\{a,a^2,ab\}$, $B=\{1,a,b\}$, 若 $A=B$, 求 $a^{2003}+b^{2003}$ 的值.

【分析与解答】因为 $A=B$, 所以应该满足集合 A 与集合 B 中所有元素的和与积对应相等. 即满足: $\begin{cases}a+a^2+ab=1+a+b\\ a\cdot a^2\cdot ab=1\cdot a\cdot b\end{cases}$, 并由集合内元素的互异性得 $\begin{cases}a,b\neq 1\\ a\neq b,ab,a^2\end{cases}$, 将上面几个式子联立解得 $\begin{cases}a=-1\\ b=0\end{cases}$.

从而 $a^{2003}+b^{2003}=-1$.

【评注】在集合问题中, "如果两个集合相等, 那么它们中所有元素的和相等, 所有元素的积相等." 是一条重要结论, 往往能使题目简化.

[例 32] 已知集合 M 满足 $\{2,5\}\subseteq M\subset\{1,2,3,4,5\}$, 求不同的 M 的个数.

【分析与解答】用穷举法.

二元集 1 个: $\{2,5\}$;

三元集 3 个: $\{2,5,1\}$, $\{2,5,3\}$, $\{2,5,4\}$;

四元集 3 个: $\{2,5,1,3\}$, $\{2,5,1,4\}$, $\{2,5,3,4\}$.

所以不同的 M 的个数为 7.

【评注】在简单的问题中, 穷举法也不失为一种好方法. 另外, 在本题的解答中, 一定要分清 $\subseteq$ 和 $\subset$ 的区别, 两者的区别就是它们能不能相等.

[例 33] 设 S_n 表示自然数集合 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的一切子集的元素之和 (假定空集的元素和为 0), 求 S_{2004}.

【分析与解答】已经知道 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的所有子集一共有 2^n 个, 而对于任意元素 $i\in\{1,2,3,\cdots,n\}$, 显然有 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 中包含 i 的子集与集合 $\{1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n\}$ 的子集个数相等, 即 2^{n-1}, 这样就说明 i 在集合 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的所有子集中一共出现 2^{n-1} 次, 对所有的 i 求和, 可得: $S_n=(\sum_{i=1}^{n}i)\cdot 2^{n-1}$.

所以 $S_{2004}=2^{2003}\times\frac{2004\times(2004+1)}{2}=2004\times 2005\times 2^{2002}$.

【评注】本题的关键在于得出 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 中包含 i 的子集与集合 $\{1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n\}$ 的子集个数相等, 这种一一对应的方法在集合问题以及组合问题中应用很广泛.

[例 34] 设 X 为非空的正整数集合, 并满足条件: (1) 若 $x\in X$, 则 $4x\in X$; (2) 若 $x\in X$, 则 $[\sqrt{x}]\in X$ ($[x]$ 表示不大于 x 的最大正整数), 求证: X 是全体正整数集.

【分析与解答】因为 X 为非空的正整数集合, 所以 X 中一定存在一个最小的元素, 设为 a, 则由条件 (2) 得 $a\geqslant[\sqrt{a}]\in X$, 从而 $a=[\sqrt{a}]$, 得到 $a=1$, 即 $1\in X$. 这样由条件 (1) 就可得到: $4,4^2,\cdots,4^n,\cdots\in X$. 设 k 为任意正整数, 当自然数 $m>-\log_2\log_4(1+\frac{1}{k})$ 时, 有

$2^m\log_4(k+1)-2^m\log_4 k=2^m\log_4(1+\frac{1}{k})>1$.

所以必存在自然数 n, 满足 $2^m\log_4 k\leqslant n\leqslant 2^m\log_4(k+1)$, 即 $k^{2^m}\leqslant 4^n<(k+1)^{2^m}$, 又由 $4^n\in X$ 及条件 (2) 可得 $k\in X$. 于是证明了 X 是全体正整数集.

【评注】本题解答需要用到高斯函数的知识, 技巧性很强, 也比较难; 但解答中, 先得到 $1\in X$, 再得到 $4,4^2,\cdots,4^n,\cdots\in X$, 随后得到任意自然数 $k\in X$ 这种"步步为营"的方法值得学习.

[例 35] 在集合 S 中, 有一种运算 $*$, 满足对于任意的 $a,b\in S$, 有惟一的元素 $a*b\in S$, 并且有如下性质: 对任意的 $a,b,c\in S$, 有 $(a*b)*c=a*(b*c)$; 当 $a\neq b$ 时, 恒有 $a*b\neq b*a$.

(1)求证:对于 S 中的任何元素 a,b,c,有 $(a*b)*c=a*c$. (2)记 $S=(1,2,\cdots,1990)$,试在 S 中定义一个运算 $*$,使得它具有上述性质.

【分析与解答】(1)由条件知若 $a*b=b*a$,则 $a=b$,取 $a=a,b=a,c=a$,得到 $(a*a)*a=a*(a*a)$,所以 $a*a=a$;反复利用 $(a*b)*c=a*(b*c)$ 及 $a*a=a$,得到 $((a*b)*a)*a=(a*b)*(a*a)=((a*a)*b)*a=a*((a*b)*a)$,从而 $(a*b)*a=a$. 这样 $((a*b)*c)*(a*c)=(a*b*(c*(a*c))=(a*b)*c=((a*c)*a)*(b*c)=(a*c)*(a*(b*c)=(a*c)*(a*(b*c))$,从而得到 $(a*b)*c=a*c$.

(2)定义 $i*j=i$ 即可.

【评注】本题不是常规题,综合性很强,题目有一定难度,考查的是大家对数学定义的基本体系的理解.

本章小结

高中阶段遇到的关于集合的问题都比较简单,只要弄清楚了集合有关概念的知识,解决这方面的问题应该不难. 本章主要介绍了以下几方面的问题:

(1)元素与集合、集合与集合属于和包含的关系,参见例题1,2,3,26,30;

(2)已知集合之间的关系,求集合或参数的值,参见例题4,5,6,7,11,12,13,14,18,22,24,29;

(3)求集合中元素个数或子集个数,有公式:包含 n 个元素的所有子集个数为 2^n,其真子集的个数为 2^n-1,参见例题8,10,16,20,21,27,32;

(4)证明两集合相等,一般证明集合 $A=B$ 常用的方法是证明 $A\subseteq B$ 并且 $A\supseteq B$,则说明 $A=B$,参见例题23,34.

02 函　数

代数，顾名思义就是"用字母代替数"，因此多项式和函数就成了代数学习中的重点和难点. 而多项式在高中数学竞赛的大纲中是不作要求的，因此函数就成了重点中的重点. 本章主要介绍函数的基本概念、性质和几个主要函数.

先介绍一下知识要点：

1. 映射：设 A,B 为两个集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有惟一的元素和它对应，那么这样的对应就叫做集合 A 到集合 B 的映射，记作 $f:A\to B$. 在这里要注意"象"、"原象"、"单射"、"满射"和"一一映射"的概念.

2. 函数：定义略. 这里要注意"定义域"、"值域"的概念.

3. 函数的性质：单调性、奇偶性、周期性，以及反函数的性质.

4. 主要函数：指数函数和对数函数.

[例 1] 已知集合 $A=B=\mathbf{R}$（实数集），$x\in A, y\in B$，映射 $f:x\to y=2x+1$，试问 $f:A\to B$ 是否为从集合 A 到集合 B 上的一一映射？为什么？

【分析】 判断是否为从集合 A 到集合 B 上的一一映射，首先判断是否为映射，然后判断是否既为"单射"又为"满射".

【解答】 首先，任取 $x\in A$，在法则 $f:x\to y=2x+1$ 下，有 $y=2x+1\in\mathbf{R}=B$，这说明了 $f:A\to B$ 是从集合 A 到集合 B 上的映射.

其次，任取 $x_1,x_2\in A$，且 $x_1\neq x_2$，则 $y_1=2x_1+1$，$y_2=2x_2+1$ 且 $y_1,y_2\in B$，$y_1\neq y_2$，这说明了集合 A 中不同元素在集合 B 上有不同的象与之对应，即为"单射".

另外，对于集合 B 中的任意元素 y，由 $y=2x+1$，可得 $x=\dfrac{y-1}{2}\in\mathbf{R}=A$，即 B 中每一个元素在 A 中都有原象，即该映射为"满射".

综上，说明了对于 $A=B=\mathbf{R}$（实数集），$x\in A, y\in B$，映射 $f:x\to y=2x+1$ 为从集合 A 到集合 B 上的一一映射.

【评注】 从上述求解判断中可以看出，只有当集合 A 中不同元素在集合 B 中有不同的象，集合 B 中每一个元素在集合 A 中都有原象时，映射 $f:A\to B$ 才是从集合 B 到集合 B 上的一一映射.

[例 2] 已知集合 $A=\{1,2,3,k\}$，$b=\{4,7,a^4,a^2+3a\}$，且 $a,k\in\mathbf{N}$，$x\in A, y\in B$，映射 $f:A\to B$ 使 B 中的元素 y 通过关系式 $y=3x+1$ 与 A 中元素 x 对应，求 a 和 k 的值.

【分析与解答】 根据对应法则集合 A 中元素 x 与集合 B 中的元素 y 按关系 $y=3x+1$ 对应，所以 A 中元素 1 的象是 4，2 的象是 7，3 的象是 10.

所以 $a^4=10$ 或 $a^2+3a=10$，又因为 $a\in\mathbf{N}$，由此解得 $a=2$，从而得知 k 的象是 a^4，即 $3k+1=a^4=16$，解得 $k=5$.

所以最后求得 $a=2, k=5$.

【评注】 解决本题关键所在是根据对应法则准确地把握集合 A,B 间元素的对应关系，得到方程问题就能求解.

[例 3] 求下列函数的定义域：(1) $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}+2$，(2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{6-x-x^2}}{|x+1|-1}$.

【分析】 求函数的定义域，实际上就是求使函数有意义的自变量的值.

【解答】 (1) 由 $x-1\geqslant 0, 4-x\geqslant 0$ 得到 $x\geqslant 1, x\leqslant 4$，所以定义域是 $[1,4]$，

(2) 要使该函数式有意义，需使 $6-x-x^2\geqslant 0$，$|x-1|-1\neq 0$，即得到 $-3\leqslant x\leqslant 2$，$x\neq 0$，$x\neq 2$，从而该函数的定义域是 $[-3,2)\cup(-2,$

0) ∪ (0,2].

【评注】求函数定义域,也就是要避免函数没有意义的情况. 例如分母不能为零,含在偶次根式里的式子非负等等.

[例4]已知$f(x)$的定义域是$2\leqslant x\leqslant 4$,求$f(x^2+1)$的定义域.

【分析与解答】因为函数$f(x)$的定义域是$2\leqslant x\leqslant 4$,要使$f(x^2+1)$有意义,必须使$2\leqslant x^2+1\leqslant 4$,解得$1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$或$-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -1$,所以$f(x^2+1)$的定义域是$[-\sqrt{3},-1]\cup[1,\sqrt{3}]$.

【评注】本题是求复合函数的定义域,与简单函数一样,都是求使函数有意义的自变量的值的范围,求自变量范围时要牢牢抓住这一点.

[例5]若函数$f(x)=\dfrac{ax-1}{\sqrt{ax^2+4ax+3}}$的定义域为$\mathbf{R}$,求实数$a$的取值范围.

【分析与解答】该函数的定义域为$\mathbf{R}$,说明$ax^2+4ax+3>0$对一切$x\in\mathbf{R}$都成立,应该有

$$\begin{cases}a>0\\ \Delta=16a^2-12a<0\end{cases}\text{或}$$

$$\begin{cases}a<0\\ \Delta=16a^2-12a>0\end{cases}\text{或 } a=0,$$

解之,得到$0\leqslant a<\dfrac{3}{4}$,所以所求实数$a$的取值范围为$[0,\dfrac{3}{4})$.

【评注】本题是由函数的定义域求参数的取值范围,利用定义域的性质得到参数的性质,从而求出参数.

[例6]求函数$y=\dfrac{2x}{5x+1}$的值域.

【分析与解答】$y=\dfrac{2x}{5x+1}=\dfrac{2x+\frac{2}{5}-\frac{2}{5}}{5x+1}=\dfrac{2}{5}-\dfrac{2}{5(5x+1)}$,从而$y\neq\dfrac{2}{5}$,所以函数$y=\dfrac{2x}{5x+1}$的值域是$\{y\mid y\in\mathbf{R},y\neq\dfrac{2}{5}\}$.

【评注】求函数的值域,首先要明确值域的概念即对于定义域A上函数$y=f(x)$,其值域是指集合$B=\{y\mid y=f(x),x\in A\}$;另外,函数的定义域及函数的性质是确定值域的依据.

[例7]求函数$y=\dfrac{3x^2+3x+1}{x^2+x-1}$的值域.

【分析与解答】由$y=\dfrac{3x^2+3x+1}{x^2+x-1}$得$(y-3)x^2+(y-3)x-(y+1)=0$.

当$y\neq 3$时,$\Delta=(y-3)^2+4(y-3)(y+1)\geqslant 0$,即$5y^2-14y-3\geqslant 0$,解得$y\leqslant-\dfrac{1}{5}$或$y\geqslant 3$.

当$y=3$时,该方程变成了$-4=0$,这说明不存在x的值使得$y=3$.

综上,求得函数$y=\dfrac{3x^2+3x+1}{x^2+x-1}$的值域为$(-\infty,-\dfrac{1}{5}]\cup(3,+\infty)$.

【评注】如何求函数值域的问题是个复杂且方法各异的问题,必须具体问题具体分析. 上题用的是观察法,本题用的是判别式法;还有一些其他常用的方法,例如配方法,分离法,换元法等等.

[例8]已知$f(x)=3x^2-1$,求$f(x-1)$和$f(x^2)$.

【分析】注意,在求$f(x-1)$和$f(x^2)$时,函数的自变量分别变成了$x-1$和x^2.

【解答】$\because\ f(x)=3x^2-1$,$\therefore\ f(x-1)=3(x-1)^2-1=3x^2-6x+2$;$f(x^2)=3(x^2)^2-1=3x^4-1$.

【评注】求函数解析式是函数基本概念中的重要内容之一,有很多种方法,下面将分别介绍几种.

[例9]若$f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$,求$f(x)$.

【分析与解答】(方法一):令$t=\sqrt{x}+1$,则$x=(t-1)^2$,$t\geqslant 1$,代入原式得$f(t)=(t-1)^2+2(t-1)=t^2-1$,$\therefore\ f(x)=x^2-1(x\geqslant 1)$.

(方法二)$\because\ x+2\sqrt{x}=(\sqrt{x}+1)^2-1$;$\therefore\ f(\sqrt{x}+1)=(\sqrt{x}+1)^2-1$,$(\sqrt{x}+1\geqslant 1)$;$\therefore\ f(x)=x^2-1(x\geqslant 1)$.

【评注】本题所用的方法一称作“换元法”,方法二是“配凑法”,这两种方法的思路恰恰相反,本质上却是一样的,实际上就是复合函数和简单函数的转换方法.

[例10] 已知$f(x)$是二次函数,且$f(0)=2$,$f(x+1)-f(x)=x-1$,求$f(x)$的解析式.

【分析】 本题已经给出了该函数$f(x)$的基本特征,为二次函数,所以可先写出该函数表达式的基本模式,再进行求解.

【解答】 由已知可设$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$,由$f(0)=2$,$f(x+1)-f(x)=x-1$可得关系$\begin{cases}c=2\\2ax+(a+b)=x-1\end{cases}$,比较等式两边$x$的同次幂的系数,可以得到$\begin{cases}2a=1\\a+b=-1\end{cases}$,解得$a=\frac{1}{2}$,$b=-\frac{3}{2}$,故所求函数的解析式为$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2$.

【评注】 本题所用的方法叫做"待定系数法",待定系数法是解决包括函数问题在内的数学问题的重要而且常用的方法,应该熟练掌握.

[例11] 已知函数$f(x)=x^2-2x+2$,$x\in[t,t+1]$的最小值是$g(t)$,求函数$g(t)$的表达式.

【分析与解答】 显然要对t的取值进行分类讨论:

$f(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$,$x\in[t,t+1]$,

当$0\leqslant t\leqslant1$,即$t\leqslant1\leqslant t+1$时,$f(x)$在$[t,t+1]$上的最小值$g(t)=f(1)=1$;

当$t<0$,即$t+1<1$时,$f(x)$在$[t,t+1]$上的最小值$g(t)=f(t+1)=t^2+1$;

当$t>1$,即$1<t$时,$f(x)$在$[t,t+1]$上的最小值$g(t)=f(t)=(t-1)^2+1$.

综上,求得$g(t)$的表达式为:$g(t)=\begin{cases}1(0\leqslant t\leqslant1)\\t^2+1(t<0)\\(t-1)^2+1=t^2-2t=2(t>1)\end{cases}$.

【评注】 本题与求函数极值的问题联系紧密,函数极值也是一个重要题型,将在后面的章节中详细讨论.

[例12] 试证明函数$f(x)=\frac{1+x}{\sqrt{x}}$在$(0,1]$上为减函数,在$[1,+\infty)$上为增函数.

【分析与解答】 根据函数单调性定义证明之.

设$x_1<x_2$,则$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1+x_1}{\sqrt{x_1}}-\frac{1+x_2}{\sqrt{x_2}}=(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})\left(1-\frac{1}{\sqrt{x_1x_2}}\right)=\frac{(x_1-x_2)(\sqrt{x_1x_2}-1)}{(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})\sqrt{x_1x_2}}$,当$0<x_1<x_2\leqslant1$时,$\sqrt{x_1x_2}<1$,$f(x_1)-f(x_2)>0$,即$f(x_1)>f(x_2)$,为减函数;

当$1\leqslant x_1<x_2$时,$\sqrt{x_1x_2}>1$,$f(x_1)-f(x_2)<0$,即$f(x_1)<f(x_2)$,为增函数.

故函数$f(x)=\frac{1+x}{\sqrt{x}}$在$(0,1]$上为减函数,在$[1,+\infty)$上为增函数.

【评注】 利用函数单调性的定义是解决与单调性有关问题的基本方法,推导过程也就是不等式证明过程.

[例13] 求函数$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}$的单调区间,并指出相应区间$f(x)$的增减性.

【分析与解答】 先由表达式求出函数$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}$的定义域为$(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$. 设$u=1-2x^2$,$y=u^{-\frac{1}{2}}$,于是原函数$f(x)$可以看成是由$u=1-2x^2$和$y=u^{-\frac{1}{2}}$这两个函数复合而成的. 可求得对于函数$u=1-2x^2$,当$x\in(-\frac{\sqrt{2}}{2},0]$时,它是单调增的;当$x\in[0,\frac{\sqrt{2}}{2})$时,它是单调减的. 而函数$y=u^{-\frac{1}{2}}$在定义域内一直是单调减的.

所以函数$y=f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}$在$(-\frac{\sqrt{2}}{2},0]$上是减函数;在$[0,\frac{\sqrt{2}}{2})$上是增函数.

【评注】 对于复合函数单调性的判断,可先求出复合函数的定义域,把复合函数分解成若干个基本函数,然后判断每个基本函数的单调性,依据"同增异减"的原则,从而判断复合函

数的单调性.

[例 14]设$f(x)$是定义在$\mathbf{R}^+$上的增函数,且$f(xy)=f(x)+f(y)$,

(1)求证:$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$.

(2)若$f(3)=1$,且$f(a)>f(a-1)+2$,求a的取值范围.

【分析与解答】(1)已知$f(xy)=f(x)+f(y)$,取$x=y$,$y=\frac{x}{y}$可得$f(y\frac{x}{y})=f(y)+f(\frac{x}{y})$,移项即可得$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$.

(2)$\because$ $f(3)=1$,$\therefore$ $f(9)=f(3)+f(3)=2$,$\because$ $f(a)>f(a-1)+2$,$\therefore$ $f(a)>f(a-1)+f(9)=f(9(a-1))$.

$f(x)$是定义在$\mathbf{R}^+$上的增函数,需满足如下不等式组:

$$\begin{cases}a>0\\9(a-1)>0.\\a>9(a-1)\end{cases}$$

解不等式组得$1<a<\frac{8}{9}$,故所求a的取值范围是$(1,\frac{8}{9})$.

【评注】本题(1)中所用的方法叫做"特殊值法";(2)属于函数单调性的逆向应用问题,通过建立不等式组求得参数的取值范围.

[例 15]判断下列函数的奇偶性:(1)$f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$,(2)$f(x)=(x-3)\sqrt{\frac{3-x}{3+x}}$,(3)$f(x)=\sqrt{x^2-4}\cdot\sqrt{4-x^2}$,(4)$f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

【分析与解答】判断函数奇偶性要根据奇偶性的定义,先考虑其定义域是否关于原点对称,然后计算$f(-x)$并与$f(x)$进行比较.

(1)该函数定义域为$\begin{cases}x-2\geqslant0\\2-x\geqslant0\end{cases}$,即$x=2$,它是一个点,不关于原点对称,所以函数$f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$既不是奇函数也不是偶函数.

(2)该函数定义域为$\frac{3-x}{3+x}\geqslant0$,求得$-3\leqslant x<3$,不关于原点对称,所以函数$f(x)=(x-3)\sqrt{\frac{3-x}{3+x}}$既不是奇函数也不是偶函数.

(3)该函数定义域为$\begin{cases}x^2-4\geqslant0\\4-x^2\geqslant0\end{cases}$,即$\{-2,2\}$,并且求得$f(-2)=f(2)=0$,所以函数$f(x)=\sqrt{x^2-4}\cdot\sqrt{4-x^2}$既是奇函数又是偶函数.

(4)求得该函数定义域$[-1,0)\cap(0,1]$,它关于原点对称,又$f(-x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{-x}=-f(x)$,所以函数$f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$为奇函数.

【评注】函数的奇偶性包括奇函数、偶函数、既不是奇函数也不是偶函数、既是奇函数又是偶函数等四种情况,特别注意最后一种情况不要忘记.

[例 16]定义在$(-1,1)$上的奇函数$f(x)$是单调减函数,且$f(1-a)+f(1-a^2)<0$,求实数a的取值范围.

【分析】求参数a的取值范围,需要根据已知条件建立不等式组来求解.

【解答】$f(x)$定义在$(-1,1)$上,$\therefore$ $\begin{cases}-1<1-a<1\\-1<1-a^2<1\end{cases}\Rightarrow0<a<\sqrt{2}$;$f(x)$是奇函数,所以$-f(1-a^2)=f(a^2-1)$;由$f(1-a)+f(1-a^2)<0$得到$f(1-a)<-f(1-a^2)=f(a^2-1)$;又$f(x)$是单调减函数,所以$1-a>a^2-1$.

综合上面a的条件求得a的取值范围是$(0,1)$.

【评注】本题是函数奇偶性与单调性的综合试题,充分了解奇偶性与单调性的定义和性质是解题的关键.

[例 17]设$a>0$,$a\neq1$,$f(x)$是一个奇函数,求下式的奇偶性:$g(x)=f(x)(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2})$.

【分析】关键在于判断$\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}$的奇偶性.